Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

АНИЗОТРОПНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ ВЕКТОРНОГО АРГУМЕНТА

В. Ф. Плешаков, Ю. И. Сиротин
(Москва)

Выведен общий вид анизотропных векторных функций векторного аргумента, совместимых с симметрией кристаллов. Искомые функции $V^i = V^i(\mathbf{A})$ представляются в виде $V^i = \sum W^i_{(\mu)} f_\mu$, где $W^i_{(\mu)}$ — некоторые фиксированные полиномы от компонент вектора **A**, конкретный вид которых указан для каждого класса симметрии кристаллов, а f_μ — произвольные функции трех функционально независимых инвариантов вектора **A** относительно соответствующей этому классу точечной группы. Полученные разложения удовлетворяют требованиям единственности и многочленного соответствия. Первое из них означает, что при заданных полиномах $W^i_{(\mu)}$ функции f_μ однозначно определяются функциями V^i; второе — что функции f_μ являются многочленами от своих аргументов, если V^i — многочлены от компонент вектора **A**. Эти разложения особенно удобны, когда компоненты вектор-функции — многочлены от компонент вектора-аргумента.

1. Постановка задачи. Пусть на однородную анизотропную сплошную среду действует векторное поле A^j, и вследствие этого в среде возникает другое векторное поле

$$V^i = F^i(A^j) \tag{1.1}$$

Анизотропные функции F^i не вполне произвольны: они должны быть совместимы с симметрией среды [1].

Если система координат подвергается преобразованию $x^i = x^i(x^{k'})$, причем $\partial x^i / \partial x^{k'} = a^i_{\cdot k'}$, то преобразованные компоненты векторов **A** и **V** удовлетворяют соотношению

$$a^i_{\cdot k'} V^{k'} = F^i(a^j_{\cdot l'} A^{l'}) \tag{1.2}$$

Если, в частности, преобразование $a^i_{\cdot k'}$ входит в группу G точечной симметрии среды, равенства (1.1) и (1.2) эквивалентны. Это — необходимое и достаточное условие совместимости векторной функции F^i с симметрией среды.

Метод построения функций F^i, совместимых с заданной точечной группой G симметрии среды, указан Ривлином [3]. Из целого рационального базиса инвариантов двух векторов **A** и **B** относительно группы G (его можно найти в работе [4]) следует выбрать все инварианты $J_1, \ldots, J_l$, линейные относительно **B**. Любой инвариант векторов **A** и **B**, линейный по **B**, можно представить в форме

$$\Psi = \sum_{\lambda=1}^{l} \Phi_\lambda J_\lambda \tag{1.3}$$

[1] Об определении изотропных и анизотропных тензорных функций и их свойствах см. [1, 2].

(где Φ_λ — инварианты вектора A), а любую векторную функцию вектора A, совместимую с симметрией среды,— в виде

$$F^i = \frac{\partial \Psi}{\partial B_i} = \sum_{\lambda=1}^{l} \Phi_\lambda \frac{\partial J_\lambda}{\partial B_i} \qquad (1.4)$$

При практическом применении анизотропных тензорных функций важно, чтобы выполнялись следующие два условия.

1) Единственность — при фиксированном выборе инвариантов J_λ функции Φ_λ должны однозначно определяться функциями F^i.

2) Многочленное соответствие — если F^i — многочлены от компонент вектора A, функции Φ_λ также должны быть многочленами от своих аргументов.

Функции F^i (A), построенные по Ривлину [3], удовлетворяют только второму требованию. Цель данной работы — построение анизотропных векторных функций векторного аргумента, совместимых с симметрией кристаллов и удовлетворяющих обоим указанным требованиям [1].

2. **Метод решения.** Как известно [6], произвольный инвариант Φ вектора A единственным образом записывается в одной из трех форм:

$$\begin{aligned}
&(a) \qquad \Phi = f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \\
&(b) \qquad \Phi = f_0(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) + \psi f_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \qquad (2.1)\\
&(c) \qquad \Phi = f_0(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) + \sum_{\sigma=1}^{3} \psi_\sigma f_\sigma(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)
\end{aligned}$$

Здесь $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — функционально независимые базисные инварианты вектора A — так называемые] главные инварианты; ψ, ψ_1, ψ_σ — дополнительные базисные инварианты, т. е. все остальные инварианты, входящие в целый рациональный базис; f, f_0, f_1, f_σ — произвольные функции главных инвариантов. Каждая из формул (2.1) справедлива для кристаллографических классов типа (a), (b), (c) соответственно [2].

классы типа (a)

$1,\ m,\ mm2,\ mmm,\ 4mm,\ 4/mmm,\ 3m,\ 6mm,\ \bar{6}2m,\ 6/mmm,\ \bar{4}3m,\ m3m$

классы типа (b)

$2,\ 2/m,\ 222,\ 4,\ 4/m,\ 422,\ \bar{4}2m,\ 3,\ 32,\ \bar{3}m,\ \bar{6},\ 6,\ 6/m,\ 622,\ 23,\ m3,\ 432$

классы типа (c)

$\bar{1},\ \bar{4},\ \bar{3}$

Формула (1.3) принимает вид

$$\begin{aligned}
&(a) \qquad \Psi = \sum_{\lambda=1}^{l} f_\lambda J_\lambda \\
&(b) \qquad \Psi = \sum_{\lambda=1}^{l} (f_{\lambda,0} + \psi f_{\lambda,1}) J_\lambda \qquad (2.2)\\
&(c) \qquad \Psi = \sum_{\lambda=1}^{l} \Big(f_{\lambda,0} + \sum_{\sigma=1}^{3} \psi_\sigma f_{\lambda,\sigma}\Big) J_\lambda
\end{aligned}$$

[1] Для функций, совместимых с симметрией текстур, эта задача решена ранее [5]

[2] Здесь и далее применяются международные обозначения классов симметрии кристаллов (см. например, [7]).

Эти три формулы можно объединить

$$\Psi = \sum_{\lambda=1}^{L} \omega_\lambda f_\lambda \tag{2.3}$$

где обозначение ω применяется для любого множителя при f, имеет ли он вид J или ψJ. Очевидно, L равно l, $2l$, $4l$ в случаях (a), (b) и (c) соответственно.

Пусть f — аналитические функции своих аргументов. Тогда

$$f = \sum_{q=0}^{\infty} f_{(q)} = \sum_{p_1=0}^{\infty} \sum_{p_2=0}^{\infty} \sum_{p_3=0}^{\infty} R_{p_1p_2p_3} (\varphi_1)^{p_1} (\varphi_2)^{p_2} (\varphi_3)^{p_3} \tag{2.4}$$

Здесь $f_{(q)}$ — многочлен от главных инвариантов вектора **A**, степень которого относительно **A** равна q; вещественные коэффициенты $R_{p_1p_2p_3}$ не зависят от **A**. В этом случае и Ψ представляется в виде бесконечного ряда $\Psi_{(0)} + \Psi_{(1)} + \Psi_{(2)} + \ldots$, где $\Psi_{(q)}$ — многочлен, линейный по **B** и степени q по **A**. Очевидно,

$$\Psi_{(q)} = P^{i}_{\cdot j_1 \ldots j_q} A^{j_1} \ldots A^{j_q} B_i, \qquad V_{(q)}{}^{i} = P^{i}_{\cdot j_1' \ldots j_q} A^{j_1} \ldots A^{j_q} \tag{2.5}$$

Здесь $P^{\,i}{}_{j_1 \ldots j_q}$ — тензор, один раз контравариантный, q раз ковариантный, симметричный по всем ковариантным индексам и инвариантный относительно группы G. Как известно [8], число независимых компонент такого тензора равно

$$n_q = \frac{1}{N(G)} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \, [\chi_V{}^q] \, (g) \tag{2.6}$$

где $N(G)$ — порядок группы G, $\chi_{\bar V}(g)$ — след матрицы преобразования g из группы G; $[\chi_v{}^q](g)$ — след q-й симметрической кронекеровской степени той же матрицы [9].

Пусть степени главных инвариантов φ_1, φ_2, φ_3 относительно **A** равны a_1, a_2, a_3. Однородный многочлен $f_{(q)}$ равен сумме тех членов тройного ряда (2.4), для которых $p_1a_1 + p_2a_2 + p_3a_3 = q$. Число таких членов равно денумеранту [10]

$$D(q;\, a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{q!} \left[\frac{d^q}{dt^q} \frac{1}{(1-t^{a_1})(1-t^{a_2})(1-t^{a_3})} \right]_{t=0} \tag{2.7}$$

Если среди инвариантов ω_λ имеется r_0 инвариантов нулевой степени по **A**, r_1 инвариантов первой степени по **A**, ..., r_K инвариантов степени K по **A**, то число членов степени q по **A** в выражении (2.3) для Ψ равно

$$n_q{}^* = \sum_{k=0}^{\min(K,\, q)} r_k D(q-k;\, a_1, a_2, a_3) \tag{2.8}$$

Вообще говоря, $n_q{}^* > n_q$; это значит, что не все слагаемые в сумме (2.3) независимы. Предположим, что существует разложение

$$\Psi = \omega_1 f_1 + \ldots + \omega_m f_m \tag{2.9}$$

все члены которого линейно независимы, удовлетворяющее, однако, как и (2.3), требованию многочленного соответствия.

Пусть s_k — число слагаемых вида $\omega_\mu f_\mu$ в этом разложении, множитель ω_λ в которых имеет степень k относительно **A**. Числа s_k должны удовлетворять бесконечной системе уравнений

$$\sum_{k=0}^{q} s_k D(q-k;\ a_1, a_2, a_3) = n_q \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.10}$$

Решение этой системы, учитывая, что $D(0;\ a_1, a_2, a_3) = 1$, легко выписать в рекуррентной форме

$$s_0 = n_0, \qquad s_q = n_q - \sum_{k=0}^{q-1} s_k D(q-k;\ a_1, a_2, a_3) \qquad (q = 1, 2, \ldots) \tag{2.11}$$

С другой стороны, $s_k \leqslant r_k$ и, в частности, $s_k = 0$, если $k > K$. Поэтому достаточно найти $s_0, s_1, \ldots, s_K$.

Когда эти числа найдены, возможны три случая

$$\alpha)\quad r_q = s_q, \qquad \beta)\quad r_q > s_q = 0, \qquad \gamma)\quad r_q > s_q > 0$$

В случае (α) все члены с множителями ω степени q по **A** остаются в разложении (2.10). В случае (β) все такие члены отбрасываются. В случае (γ) нужно отбросить $r_q - s_q$ таких членов. При этом отбрасывать следует члены с такими множителями ω, которые можно представить в виде $\omega = Q_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)\omega_1 + \ldots + Q_m(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)\omega_m$, где ω_μ — множители при остающихся членах, а $Q_\mu(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ — некоторые многочлены от главных инвариантов.

Разложение (2.9), полученное после отбрасывания всех излишних слагаемых в сумме (2.3), и соответствующие ему формулы

$$V^i = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial \omega_\mu}{\partial B_i} f_\mu \equiv \sum_{\mu=1}^{m} W_{(\mu)}{}^i f_\mu \tag{2.12}$$

решают поставленную задачу. Формулы (2.9) и (2.12) запишем в виде

$$\Psi = \sum_{\mu=1}^{m} W_{(\mu)}{}^i B_i f_\mu, \qquad \mathbf{V} = \sum_{\mu=1}^{m} W_{(\mu)}{}^i \mathbf{e}_i f_\mu \tag{2.13}$$

Число слагаемых в этих суммах $m = s_0 + s_1 + \ldots + s_K$. С другой стороны, обзор формул, приведенных в п. 3, показывает, что для групп типов (a), (b) и (c) число m равно 3, 6, 12 соответственно.

3. Функции V (A), совместимые с симметрией кристаллов. Здесь перечислены вектор-функции векторного аргумента в форме

$$\mathbf{V} = \sum_{\mu=1}^{m} W^i_{(\mu)} \mathbf{e}_i f_\mu$$

для всех классов симметрии кристаллов. Формулы записаны в прямоугольной декартовой системе координат XYZ с ортами **i**, **j**, **k**. Ориентировка ее осей относительно элементов симметрии кристалла совпадает с предложенной IRE[1] за исключением классов 2, m и $2/m$, в которых $2 \parallel Z$ или $m \perp Z$, и класса $\bar{6}2m$, в котором $2 \parallel X$, $\bar{6} \parallel Z$.

Классы, для которых главные инварианты вектора одинаковы, объединены в серию. Каждой серии присвоено наименование того единственного класса типа (a), который входит в ее состав. Главные инварианты вектора **A**, т. е. аргументы произвольных функций f_μ, совпадающие для всех классов данной серии, указаны в скобках после названия серии. Например, формула (3.2) означает

$$\mathbf{V} = \mathbf{i} f_1(A_x, A_y, A_z^2) + \mathbf{j} f_2(A_x, A_y, A_z^2) + A_z \mathbf{k} f_3(A_x, A_y, A_z^2)$$

[1] См. [7], приложение 2; там оси обозначены Ox_1, Ox_2, Ox_3 соответственно.

Для сокращения записи слагаемые, уже выписанные в одной из предыдущих формул, обозначены символами V ($mm2$), V (mmm) и т. п. Например, формулу (3.4) следует читать

$$\mathbf{V}=\mathbf{k}f_1+A_x\mathbf{i}f_2+A_y\mathbf{j}f_3+A_x\mathbf{j}f_4+A_y\mathbf{i}f_5+A_xA_y\mathbf{k}f_6$$

где

$$f_\mu=f_\mu\,(A_z,\ A_x^2,\ A_y^2)\qquad(\mu=1,\ldots,6)$$

Знак Σ в формулах для серий $\bar{4}3m$ и $m3m$ обозначает суммирование по циклической перестановке индексов x, y, z и ортов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Серия 1 (A_x, A_y, A_z)

Класс 1

$$\mathbf{V}=\mathbf{i}f_1+\mathbf{j}f_2+\mathbf{k}f_3\tag{3.1}$$

Серия m (A_x, A_y, A_z^2)

Класс m

$$\mathbf{V}=\mathbf{i}f_1+\mathbf{j}f_2+A_z\mathbf{k}f_3\tag{3.2}$$

Серия $mm2$ (A_z, A_x^2, A_y^2)

Класс $mm2$

$$\mathbf{V}=\mathbf{k}f_1+A_x\mathbf{i}f_2+A_y\mathbf{j}f_3\tag{3.3}$$

Класс 2

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}\,(mm2)+A_x\mathbf{j}f_4+A_y\mathbf{i}f_5+A_xA_y\mathbf{k}f_6\tag{3.4}$$

Серия mmm (A_x^2, A_y^2, A_z^2)

Класс mmm

$$\mathbf{V}=A_x\mathbf{i}f_1+A_y\mathbf{j}f_2+A_z\mathbf{k}f_3\tag{3.5}$$

Класс 222

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}\,(mmm)+A_yA_z\mathbf{i}f_4+A_zA_x\mathbf{j}f_5+A_xA_y\mathbf{k}f_6\tag{3.6}$$

Класс $2/m$

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}\,(mmm)+A_x\mathbf{j}f_4+A_y\mathbf{i}f_5+A_xA_yA_z\mathbf{k}f_6\tag{3.7}$$

Класс $\bar{1}$

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}\,(2/m)+A_x\mathbf{k}f_7+A_y\mathbf{k}f_8+A_z\mathbf{i}f_9+A_z\mathbf{j}f_{10}+A_xA_yA_z\mathbf{i}f_{11}+A_xA_yA_z\mathbf{j}f_{12}\tag{3.8}$$

Серия $4mm$ $(A_z,\ A_x^2+A_y^2,\ A_x^2A_y^2)$

Класс $4mm$

$$\mathbf{V}=\mathbf{k}f_1+(A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j})\,f_2+A_xA_y\,(A_x\mathbf{j}+A_y\mathbf{i})\,f_3\tag{3.9}$$

Класс 4

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}\,(4mm)+(A_x\mathbf{j}-A_y\mathbf{i})\,f_4+A_xA_y\,(A_x\mathbf{i}-A_y\mathbf{j})\,f_5+A_xA_y\,(A_x^2-A_y^2)\,\mathbf{k}f_6\tag{3.10}$$

Серия $4/mmm$ $(A_z^2,\ A_x^2+A_y^2,\ A_x^2A_y^2)$

Класс $4/mmm$

$$\mathbf{V}=A_z\mathbf{k}f_1+(A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j})\,f_2+A_xA_y\,(A_x\mathbf{j}+A_y\mathbf{i})\,f_3\tag{3.11}$$

Класс 422 (3.12)

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}\,(4/mmm)+A_z\,(A_x\mathbf{j}-A_y\mathbf{i})\,f_4+A_xA_y\,(A_x^2-A_y^2)\,\mathbf{k}f_5+A_xA_yA_z\,(A_x\mathbf{i}-A_y\mathbf{j})\,f_6$$

Класс $\bar{4}2m$

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}\,(4/mmm)+A_xA_y\mathbf{k}f_4+A_z\,(A_x\mathbf{j}+A_y\mathbf{i})\,f_5+A_xA_yA_z\,(A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j})\,f_6\tag{3.13}$$

Класс $4/m$

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}\,(4/mmm)+(A_x\mathbf{j}-A_y\mathbf{i})\,f_4+A_xA_y\,(A_x\mathbf{i}-A_y\mathbf{j})\,f_5+A_xA_yA_z\,(A_x^2-A_y^2)\,\mathbf{k}f_6\tag{3.14}$$

Класс $\bar{4}$

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}\,(4/m)+(A_x^2-A_y^2)\,\mathbf{k}f_7+A_xA_y\mathbf{k}f_8+A_z\,(A_x\mathbf{i}-A_y\mathbf{j})\,f_9+$$
$$+A_z\,(A_x\mathbf{j}+A_y\mathbf{i})\,f_{10}+A_xA_yA_z\,(A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j})\,f_{11}+A_xA_yA_z\,(A_x\mathbf{j}-A_y\mathbf{i})\,f_{12}\tag{3.15}$$

Серия $3m$ $(A_z,\ A_x^2+A_y^2,\ A_y^3-3A_x^2A_y)$

Класс $3m$

$$\mathbf{V}=\mathbf{k}f_1+(A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j})f_2+(A_x^2\mathbf{j}-A_y^2\mathbf{j}+2A_xA_y\mathbf{i})f_3 \tag{3.16}$$

Класс 3

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}(3m)+(A_x\mathbf{j}-A_y\mathbf{i})f_4+(A_x^2\mathbf{i}-A_y^2\mathbf{i}-2A_xA_y\mathbf{j})f_5+(A_x^3-3A_xA_y^2)\mathbf{k}f_6 \tag{3.17}$$

Серия $\bar{6}2m$ $(A_z^2,\ A_x^2+A_y^2,\ A_x^3-3A_xA_y^2)$

Класс $\bar{6}2\,m$

$$\mathbf{V}=A_z\mathbf{k}f_1+(A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j})f_2+(A_x^2\mathbf{i}-A_y^2\mathbf{i}-2A_xA_y\mathbf{j})f_3 \tag{3.18}$$

Класс 32 (3.19)

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}(\bar{6}2m)+A_z(A_x\mathbf{j}-A_y\mathbf{i})f_4+A_z(A_x^2\mathbf{j}-A_y^2\mathbf{j}+2A_xA_y\mathbf{i})f_5+(A_y^3-3A_x^2A_y)\mathbf{k}f_6$$

Класс $\bar{6}$

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}(\bar{6}2m)+(A_x\mathbf{j}-A_y\mathbf{i})f_4+(A_x^2\mathbf{j}-A_y^2\mathbf{j}+2A_xA_y\mathbf{i})f_5+A_z(A_y^3-3A_x^2A_y)\mathbf{k}f_6 \tag{3.20}$$

Серия $6mm$ $(A_z,\ A_x^2+A_y^2,\ A_x^6-15A_x^4A_y^2+15A_x^2A_y^4-A_y^6)$

Класс $6mm$

$$\mathbf{V}=\mathbf{k}f_1+(A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j})f_2+(A_x^3-3A_xA_y^2)(A_x^2\mathbf{i}-A_y^2\mathbf{i}-2A_xA_y\mathbf{j})f_3 \tag{3.21}$$

Класс 6

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}(6mm)+(A_x\mathbf{j}-A_y\mathbf{i})f_4+(A_x^3-3A_xA_y^2)(A_x^2\mathbf{j}-A_y^2\mathbf{j}+2A_xA_y\mathbf{i})f_5+$$
$$+(3A_x^5A_y-10A_x^3A_y^3+3A_xA_y^5)\mathbf{k}f_6 \tag{3.22}$$

Серия $6\,/\,mmm$ $(A_z^2,\ A_x+A_y^2,\ A_x^6-15A_x^4A_y^2+15A_x^2A_y^4-A_y^6)$

Класс $6\,/\,mmm$

$$\mathbf{V}=A_z\mathbf{k}f_1+(A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j})f_2+(A_x^3-3A_xA_y^2)(A_x^2\mathbf{i}-A_y^2\mathbf{i}-2A_xA_y\mathbf{j})f_3 \tag{3.23}$$

Класс $6\,/\,m$

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}(6\,/\,mmm)+(A_x\mathbf{j}-A_y\mathbf{i})f_4+(A_x^3-3A_xA_y^2)(A_x^2\mathbf{j}-A_y^2\mathbf{j}+2A_xA_y\mathbf{i})f_5+$$
$$+A_z(3A_x^5A_y-10A_x^3A_y^3+3A_xA_y^5)\mathbf{k}f_6 \tag{3.24}$$

Класс 622

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}(6\,/\,mmm)+A_z(A_x\mathbf{j}-A_y\mathbf{i})f_4+A_z(A_x^3-3A_xA_y^2)(A_x^2\mathbf{j}-A_y^2\mathbf{j}+2A_xA_y\mathbf{i})f_5+$$
$$+(3A_x^5A_y-10A_x^3A_y^3+3A_xA_y^5)\mathbf{k}f_6 \tag{3.25}$$

Класс $\bar{3}m$

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}(6\,/\,mmm)+A_z(A_x^2\mathbf{j}-A_y^2\mathbf{j}+2A_xA_y\mathbf{i})f_4+$$
$$+(A_y^3-3A_x^2A_y)\mathbf{k}f_5+A_z(A_y^3-3A_x^2A_y)(A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j})f_6 \tag{3.26}$$

Класс $\bar{3}$

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}(\bar{3}m)+(A_x\mathbf{j}-A_y\mathbf{i})f_7+(A_x^3-3A_xA_y^2)\mathbf{k}f_8+$$
$$+A_z(A_x^2\mathbf{i}-A_y^2\mathbf{i}-2A_xA_y\mathbf{j})f_9+(A_x^3-3A_xA_y^2)(A_x^2\mathbf{j}-A_y^2\mathbf{j}+2A_xA_y\mathbf{i})f_{10}+$$
$$+A_z(A_x^3-3A_xA_y^2)(A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j})f_{11}+A_z(3A_x^5A_y-10\,A_x^3A_y^3+3A_xA_y^5)\mathbf{k}f_{12} \tag{3.27}$$

Серия $\bar{4}3m$ $(\Sigma A_x^2,\ A_xA_yA_z,\ \Sigma A_y^2A_z^2)$

Класс $\bar{4}3m$

$$\mathbf{V}=f_1\Sigma A_x\mathbf{i}+f_2\Sigma A_yA_z\mathbf{i}+f_3\Sigma A_x^3\mathbf{i} \tag{3.28}$$

Класс 23

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}(\bar{4}3m)+f_4\Sigma(A_y^2-A_z^2)A_x\mathbf{i}+$$
$$+f_5\Sigma(A_y^2-A_z^2)A_yA_z\mathbf{i}+f_6\Sigma(A_y^2-A_z^2)A_x^3\mathbf{i} \tag{3.29}$$

Серия $m3m$ $(\Sigma A_x^2,\ \Sigma A_y^2 A_z^2,\ A_x^2 A_y^2 A_z^2)$

Класс $m3m$

$$\mathbf{V} = f_1 \Sigma A_x \mathbf{i} + f_2 \Sigma A_x^3 \mathbf{i} + A_x A_y A_z f_3 \Sigma A_y A_z \mathbf{i} \tag{3.30}$$

Класс $m3$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(m3m) + f_4 \Sigma (A_y^2 - A_z^2) A_x \mathbf{i} + f_5 \Sigma (A_y^2 - A_z^2) A_x^3 \mathbf{i} + [\Sigma A_x^4 (A_y^2 - A_z^2)] f_6 \Sigma A_x \mathbf{i} \tag{3.31}$$

Класс 432

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(m3m) + f_4 \Sigma (A_y^2 - A_z^2) A_y A_z \mathbf{i} + A_x A_y A_z f_5 \Sigma (A_y^2 - A_z^2) A_x \mathbf{i} + A_x A_y A_z f_6 \Sigma (A_y^2 - A_z^2) A_x^3 \mathbf{i} \tag{3.32}$$

4. Проверка решения. Построив разложения вида (2.9) для каждого класса симметрии кристаллов (формулы (3.1) — (3.32)), необходимо проверить, удовлетворяют ли они требованиям единственности и многочленного соответствия, т. е. являются ли они решениями задачи.

Единственность полученной формы записи векторных функций $V^i = V^i(\mathrm{A})$ проявляется в том, что функции главных инвариантов f_μ в формуле (2.13) однозначно выражаются через функции $V^i(\mathrm{A})$. Рассмотрим группы [1] каждого типа отдельно.

Если кристаллографическая группа G принадлежит к типу (a), доказательство единственности сводится к подсчету якобиана $\partial J_\lambda / \partial B_i$, так как в этом случае $\omega_\lambda = J_\lambda$ и $\lambda = 1, 2, 3$. Легко проверить прямым подсчетом, что все такие якобианы для групп типа (a), отличны от нуля (см. п. 3).

Если группа G принадлежит к типу (b) или (c), введем в рассмотрение группу G^* типа (a), главные инварианты которой совпадают с главными инвариантами группы G. В списке п. 3 каждая группа типа (a) служит группой G^* для остальных групп, входящих в ту же серию.

Группа G, принадлежащая к типу (b), является инвариантной подгруппой индекса 2 своей группы G^*. Пусть g — элемент группы G^*, не входящий в G, а $g\hat{}\mathrm{A}$ и $g\hat{}W^i_{(\mu)}$ — результаты воздействия преобразования $g\hat{}$, соответствующего элементу g, на вектор A и многочлен $W^i_{(\mu)}$. Очевидно, $g\hat{}f = f$. Поэтому из (1.2) получаем систему из шести линейных уравнений относительно f_μ

$$\sum_{\mu=1}^{6} W^i_{(\mu)} f_\mu = V^i(\mathrm{A}), \qquad \sum_{\mu=1}^{6} g\hat{}W^i_{(\mu)} f_\mu = V^i(g\hat{}\mathrm{A}) \tag{4.1}$$

Для однозначной разрешимости этой системы ее определитель должен быть отличен от нуля, и это действительно имеет место для всех групп типа (b).

Группа G, принадлежащая к типу (c), является инвариантной подгруппой индекса 4 своей группы G^*. Построим смежные классы группы G^* по подгруппе G и выберем элементы g_1, g_2, g_3 из различных смежных классов. Тогда f_μ определятся из 12 линейных уравнений

$$\sum_{\mu=1}^{12} W^i_{(\mu)} f_\mu = V^i(\mathrm{A}), \qquad \sum_{\mu=1}^{12} g_\sigma\hat{}W^i_{(\mu)} f_\mu = V^i(g_\sigma\hat{}\mathrm{A}) \qquad (\sigma = 1, 2, 3) \tag{4.2}$$

Доказательство единственности сводится к проверке того, что определитель этой системы отличен от нуля.

Так как уравнения (2.10) удовлетворены, требование многочленного соответствия выполняется, если все слагаемые степени q по A линейно независимы при любом q. Очевидно, достаточно доказать, что слагаемые $\omega_\mu f_\mu$ в разложении (2.9) линейно независимы при любом выборе f_μ (разумеется, предполагается, что ни одна из этих функций не равна тождественно нулю). Но легко убедиться, что линейная независимость функций $\omega_\mu f_\mu$ следует при $f_\mu \neq 0$ из того, что определители рассмотренных выше систем линейных уравнений отличны от нуля. Если одна из функций f_μ тождественно

[1] Слово «группа» здесь означает: точечная группа, соответствующая данному классу симметрии кристаллов.

равна нулю, нужно доказывать линейную независимость остальных слагаемых. Она следует из того, что хотя бы один из соответствующих миноров (m — 1)-го порядка указанного определителя отличен от нуля. Затем можно также рассмотреть случай, когда еще одна функция f_μ тождественно равна нулю (тогда рассматриваются миноры (m — 2)-го порядка определителя (m — 1)-го порядка) и так далее.

5. Пример. Рассмотрим все вычисления на примере класса $\bar{4}2m$. Декартова система координат XYZ выбрана так, что $Z \,||\, \bar{4}$, $X \,||\, 2$. В [4,6] находим инварианты

$$\varphi_1 = A_z^2, \qquad \varphi_2 = A_x^2 + A_y^2, \qquad \varphi_3 = A_x^2 A_y^2; \qquad \psi = A_x A_y A_z \tag{5.1}$$

Инварианты векторов **A** и **B**, линейные по **B**, выписываем из [4]

$$\begin{gathered} J_1 = A_z B_z, \qquad J_2 = A_x B_x + A_y B_y, \qquad J_3 = A_x A_y B_z \\ J_4 = A_z (A_x B_y + A_y B_x), \qquad J_5 = A_x A_y (A_x B_y + A_y B_x) \end{gathered} \tag{5.2}$$

Класс $\bar{4}2m$ принадлежит к типу (b); степени главных инвариантов равны 2, 2, 4. Из (5.1) и (5.2) получаем $K = 6$. Денуменранты D (q; 2, 2, 4), обозначаемые далее D_q, находим непосредственным подсчетом; числа r_q определяются из (5.1) и (5.2); n_q^* вычисляются в формуле (2.9); n_q выписаны из [11]; s_q подсчитываются по формуле (2.12). Все расчеты следует вести до $q = 6$. Здесь справа в табличке приведены полученные результаты.

$q =$	0	1	2	3	4	5	6
$D_q =$	1	0	2	0	4	0	6
$r_q =$	0	2	2	1	2	2	1
$n_q^* =$	0	2	2	5	6	12	13
$n_q =$	0	2	2	5	5	10	10
$s_q =$	0	2	2	1	1	0	0

Отсюда следует, что все инварианты ω степеней 0, 1, 2, 3 по **A** (вместе с функциями f, на которые они умножаются) остаются в окончательном выражении инварианта Ψ; все инварианты ω степеней 5 и 6 следует отбросить; кроме того, нужно отбросить один из инвариантов четвертой степени: или ψJ_1 или ψJ_2. Так как $\psi J_1 = \varphi_1 J_3$, то следует отбросить именно этот инвариант. Окончательно получим

$$\Psi = f_1 J_1 + f_2 J_2 + f_3 J_3 + f_4 J_4 + f_5 J_5 + f_6 \psi J_2 \tag{5.3}$$

Это совпадает с (3.13). Согласно (2.13), искомая вектор-функция **V** (**A**) имеет вид

$$\begin{aligned} V_x &= A_x f_2 + A_y A_z f_4 + A_x A_y^2 f_5 + A_x^2 A_y A_z f_6 \\ V_y &= A_y f_2 + A_x A_z f_4 + A_x^2 A_y f_5 + A_x A_y^2 A_z f_6 \\ V_z &= A_z f_1 + A_x A_y f_3 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Роль группы G^* играет $4 / mmm$. В качестве элемента g, входящего в группу $4 / mmm$, но не в группу $\bar{4}2\,m$, можно избрать, например, отражение в плоскости, перпендикулярной главной оси: $g = m_z$. Очевидно, $\mathbf{V}(m_z \mathbf{A}) = \mathbf{V}(A_x, A_y, -A_z)$. Обозначим $\mathbf{V}(m_z \mathbf{A}) = \mathbf{V}^*$. Тогда решение системы (4.1) запишется так:

$$\begin{gathered} f_1 = \frac{V_z - V_z^*}{2A_z}, \qquad f_2 = \frac{A_x (V_x + V_x^*) - A_y (V_y + V_y^*)}{2(A_x^2 - A_y^2)} \\ f_3 = \frac{V_z + V_z^*}{2A_x A_y}, \qquad f_4 = \frac{A_x (V_y - V_y^*) - A_y (V_x - V_x^*)}{2A_z (A_x^2 - A_y^2)} \\ f_5 = \frac{A_x (V_y + V_y^*) - A_y (V_x + V_x^*)}{2A_x A_y (A_x^2 - A_y^2)}, \qquad f_6 = \frac{A_x (V_x - V_x^*) - A_y (V_y - V_y^*)}{2A_x A_y A_z (A_x^2 - A_y^2)} \end{gathered} \tag{5.5}$$

6. Заключительные замечания. Полученные разложения — естественное обобщение принятой в феноменологических теориях анизотропной сплошной среды записи функциональной зависимости между двумя векторами

$$V^i = P^i + P^i_{\cdot j} A^j + P^i_{\cdot jk} A^j A^k + P^i_{\cdot jkl} A^j A^k A^l + \ldots \tag{6.1}$$

Тензоры P^i, $P^i_{\cdot j}$, $P^i_{\cdot jk}$, $P^i_{\cdot jkl}$, . . . — материальные тензоры; они описывают свойства среды и должны быть инвариантны относительно ее точечной группы G.

В построенном здесь обобщении свойства среды описываются функциями f_μ. Значение требования единственности состоит в том, что лишь при его выполнении становится возможным сравнивать свойства различных материалов. Поэтому любой способ записи анизотропных тензорных функций заданной симметрии может найти практическое применение только при условии, что он удовлетворяет требованию единственности.

Напротив, требование многочленного соответствия имеет смысл лишь в том случае, если заранее предполагается, что вектор **V** — целая рациональная функция вектора **A**. Выполнение этого требования позволяет, в частности, сразу найти все тензоры **P** (6.2)

$$P^i = V^i(0), \qquad P^i_{\cdot j} = \frac{\partial V^i(0)}{\partial A^j}, \qquad P^i_{\cdot jk} = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V^i(0)}{\partial A^j \partial A^k}, \qquad P^i_{\cdot jkl} = \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 V^i(0)}{\partial A^j\,\partial A^k\,\partial A^l}, \ldots$$

— задача, решение которой иным способом было бы при высоком ранге тензора **P** весьма трудоемким. Во многих теориях анизотропной сплошной среды действительно предполагается, что вектор **V** разлагается в ряд (6.1) по степеням компонент вектора **A**, и тогда разработанный здесь способ записи векторных функций **V** (**A**) представляется вполне естественным и, по-видимому, наиболее удобен.

Однако в некоторых случаях приходится рассматривать анизотропные функции, разлагать которые в ряды вида (6.1) невозможно или неудобно (разрывные функции, функции с разрывными производными и т. п.). Построенные здесь анизотропные векторные функции можно применять и в этих случаях. Тогда f_μ в (2.9), (2.13) и (3.1) — (3.32) можно считать произвольными однозначными функциями своих аргументов. Свойство единственности по-прежнему выполняется, так как предположение, что f_μ — полиномы от своих аргументов, используется лишь при доказательстве многочленного соответствия, но не при доказательстве единственности. Итак, разработанный метод записи анизотропных векторных функций применим и в этих, более общих теориях, но теперь его уже нельзя считать ни естественным, ни наиболее удобным. Для указанных теорий удобнее сразу отказаться от требования многочленного соответствия, заменив его требованием, чтобы искомая векторная функция представлялась в виде суммы трех линейно независимых (в геометрическом смысле, а не в функциональном, как в п. 2 и 4) векторных функций. Идея такой формы записи произвольных анизотропных функций высказана в [1,2]; конкретная ее разработка может составить предмет отдельной публикации.

Авторы приносят глубокую благодарность Л. И. Седову и В. В. Лохину за интерес к работе и ценные критические замечания.

Поступила 10 II 1965 Московский университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
2. Лохин В. В., Седов Л. И. Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
3. Rivlin R. S. Constitutive equations involving functional dependence of one vector on another. Z. Angew. Math. und Phys., 1961, B. 12, No 5.
4. Smith G. F., Rivlin R. S. Integrity bases for vectors — the crystal classes. Arch. Rat. Mech. Anal., 1964, vol. 15, No. 3.
5. Сиротин Ю. И. Тензорные функции полярного и аксиального вектора, совместимые с симметрией текстур. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
6. Döring W. Die Richtungsabhängigkeit der Kristallenergie. Ann. Physik, 1958, 7 Folge, B. 1, H. 1—3.
7. Най Дж. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. М., Изд. иностр. лит., 1960.
8. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике. М., Физматгиз, 1958.
9. Lomont J. S. Applications of finite groups. Academic Press, New York — London, 1959.
10. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М., Изд. иностр. лит., 1963.
11. Сиротин Ю. И. Групповые тензорные пространства. Кристаллография, 1960, т. 5, № 2.