Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ГОЛОНОМНЫХ И НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев

(Горький)

Показывается, что динамические системы с многообразием стационарных движений [1] обладают рядом особенностей: соответствующее характеристическое уравнение содержит нулевые корни; при постоянно действующих сколь угодно малых возмущениях происходит движение вдоль этого многообразия; возможны бифуркации, необычные для изолированных состояний равновесия [2].

Рассмотрению стационарных движений динамических систем с циклическими координатами посвящена значительная литература. Основные результаты в этой области содержатся в работах Рауса [2], Клейна и Зоммерфельда [3], Уиттекера [4], Синга [5] и др. Согласно Уиттекеру, под стационарным движением понимается такое движение системы с циклическими координатами, при котором нециклические координаты, а также скорости, соответствующие циклическим координатам, сохраняют постоянное значение. Е. Дж. Раус, Е. Т. Уиттекер и др. считали, что к исследованию устойчивости стационарных движений можно полностью применить способы, используемые при изучении устойчивости изолированных состояний равновесия. В силу этого особенности, связанные с наличием многообразия стационарных движений, остались не изученными; сам факт неизолированности стационарных состояний этими авторами отмечался.

В настоящей работе показывается, что стационарные движения образуют многообразие некоторой размерности, что приводит к появлению ряда особенностей. Эти особенности выражаются в наличии нулевых корней у характеристического уравнения в возможности бифуркаций нового типа, не имеющих места для изолированного состояния равновесия, а также в своеобразии поведения системы при постоянно действующих малых возмущениях. Некоторые результаты теоретического исследования иллюстрируются на примере.

§ 1. Многообразие стационарных движений. Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — обобщенные координаты голономной системы с функцией Лагранжа

$$L = L(q_1, \ldots, q_m; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m, \dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_n) \qquad (m < n) \tag{1.1}$$

Здесь n — число обобщенных координат, из которых последние $(n - m)$ координат циклические. Рассмотрим систему с неполной диссипацией механической энергии, когда функция Релея

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{m} h_{ij}(q_1, \ldots, q_m)\, \dot{q}_i \dot{q}_j$$

не содержит скоростей, соответствующих циклическим координатам. Движение такой системы описывается уравнениями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{i=1}^{m} h_{ij}\dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \omega_k} = 0 \qquad \begin{pmatrix} j = 1, 2, \ldots, m \\ k = 1, \ldots, n - m \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

---

[1] Голономная система с m циклическими координатами имеет в общем случае многообразие стационарных движений размерности m.

[2] Одна из таких бифуркаций была отмечена А. Ю. Ишлинским в работе [1].

Здесь

$$\omega_k = \dot{q}_{m+k}, \qquad L = L(q_1, \ldots, q_m, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m, \omega_1, \ldots, \omega_{n-m}) \qquad (1.3)$$

Уравнения (1.2) описывают движение изображающей точки в $n + m$-мерном пространстве Ф, по осям координат которого отложены величины

$$q_1, q_2, \ldots, q_m, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m, \omega_1, \ldots, \omega_{n-m}$$

По определению, при стационарном движении

$$q_j = q_j^\circ = \text{const}, \qquad \dot{q}_j = 0, \qquad \omega_k = \omega_k^\circ = \text{const}$$

Следовательно, стационарное движение отображается в пространстве Ф состоянием равновесия. Таким образом, задача об устойчивости стационарных движений сводится к задаче об устойчивости состояний равновесия в пространстве Ф. При этом оказывается, что уравнения

$$\partial L / \partial q_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \qquad (1.4)$$

представляют систему m уравнений относительно n неизвестных $q_1^\circ, \ldots, q_m^\circ$, $\omega_1^\circ, \ldots, \omega_{n-m}^\circ$. Поскольку $m < n$, отсюда непосредственно имеем в общем случае многообразие стационарных движений размерности $n - m$.

Рассмотрим теперь стационарные движения неголономной системы. Пусть движение только что рассмотренной системы ограничено неголономными связями, которые отображаются l $(l < n)$ уравнениями вида

$$\sum_{r=1}^{n} a_{sr}(q_1, \ldots, q_m)\, \dot{q}_r = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots l) \qquad (1.5)$$

Составляя уравнения движения системы, теперь вместо (1.2) получим

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{i=1}^{m} h_{ij}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{s=1}^{l} \lambda_s a_{sj} \qquad (j = 1, \ldots, m) \\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \omega_k} = \sum_{s=1}^{l} \lambda_s a_{s, m+k} \qquad (k = 1, \ldots, n - m) \\
&\sum_{j=1}^{m} a_{sj}\dot{q}_j + \sum_{k=1}^{n-m} a_{s, m+k}\omega_k = 0 \qquad (s = 1, \ldots, l)
\end{aligned} \qquad (1.6)$$

Здесь λ_s — неопределенные множители, L — согласно (1.3). Уравнения (1.6) образуют систему $(n + l)$ уравнений для определения $n + l$ величин $q_1, \ldots, q_m, \omega_1, \ldots, \omega_{n-m}, \lambda_1, \ldots, \lambda_l$ как функций времени.

При стационарном движении $q_j = q_j^\circ$, $\dot{q}_j = 0$, $\omega_k = \omega_k^\circ$, $\lambda_s = \lambda_s^\circ$. Подставляя эти значения в (1.6), получаем уравнения стационарных движений неголономной системы

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum \lambda_s^\circ a_{sj} = 0, \qquad \sum \lambda_s^\circ a_{s,m+k} = 0, \qquad \sum a_{s,m+k}\omega_k^\circ = 0 \qquad (1.7)$$

образующие систему $n + l$ уравнений для определения $n + l$ величин $q_1^\circ, \ldots, q_m^\circ, \omega_1^\circ, \ldots, \omega_{n-m}^\circ, \lambda_1^\circ, \ldots, \lambda_{n-m}^\circ$. Однако не все эти уравнения являются независимыми.

В самом деле, если вторые уравнения (1.7) умножить соответственно на ω_k° и затем просуммировать, то в силу третьих уравнений (1.7) получим нуль тождественно относительно λ_s°. Следовательно, хотя бы одно из уравнений системы (1.7) не является независимым, т. е. число уравнений для определения $q_1^\circ, \ldots, q_m^\circ, \omega_1^\circ, \ldots, \omega_{n-m}^\circ, \lambda_1^\circ, \ldots, \lambda_l^\circ$, по крайней мере, на единицу меньше числа $(n+l)$ этих величин.

Таким образом, как в случае голономной, так и неголономной системы стационарные движения образуют многообразие O_q некоторой размерности $q > 0$, причем в случае голономной системы $q \geqslant n - m$.

Запишем уравнения движения рассматриваемой системы в нормальной форме

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = f_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}) \qquad (\alpha = 1, \ldots, n+m) \tag{1.8}$$

Здесь через x_α обозначены $q_1, \ldots, q_m, q_1^{\cdot}, \ldots, q_m^{\cdot}, \omega_1, \ldots, \omega_{n-m}$. Многообразию стационарных движений соответствует в пространстве Φ некоторая q-мерная поверхность O_q, определяемая уравнениями

$$x_\alpha = x_\alpha^\circ(u_1, u_2, \ldots, u_q) \tag{1.9}$$

где $u_1, \ldots, u_q$ — текущие параметры этой поверхности [1]. Наряду с переменными $u_1, \ldots, u_q$ введем новые переменные $v_1, \ldots, v_{n+m-q}$ посредством соотношений

$$x_\alpha = x_\alpha^\circ(u_1, \ldots, u_q) + \sum_{\beta=1}^{n+m-q} \gamma_{\alpha\beta}(u_1, \ldots, u_q) v_\beta \tag{1.10}$$

Здесь $\gamma_{\alpha\beta}$ — некоторые функции переменных $u_1, \ldots, u_q$. В новых переменных уравнения (1.8) запишутся в виде

$$\frac{du_k}{dt} = g_k(u, v), \qquad \frac{dv_r}{dt} = h_r(u, v) \tag{1.11}$$

Линеаризуем уравнения движения (1.11) в окрестности поверхности O_q. Разлагая правые части уравнений (1.11) в ряд по малым величинам $v_1, v_2, \ldots, v_{n+m-q}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{du_k}{dt} &= \sum_{r=1}^{n+m-q} a_{kr}(u_1, \ldots, u_q) v_r + O(\|v\|^2) \qquad (k = 1, \ldots, q) \\ \frac{dv_r}{dt} &= \sum_{s=1}^{n+m-q} b_{rs}(u_1, \ldots, u_q) v_s + O(\|v\|^2) \qquad (r = 1, \ldots, n+m-q) \\ \|v\|^2 &= v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_{n+m-q}^2 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Здесь $O(\|v\|^2)$ обозначает малые члены не ниже второго порядка относительно $\|v\|$. Из (1.12) следует, что для любой точки поверхности O_q характеристическое уравнение имеет вид

$$p^q \,|\, b_{rs} - p\,\delta_{rs} \,| = 0 \tag{1.13}$$

где δ_{rs} — символ Кронекера, откуда непосредственно получается q нулевых корней. Таким образом, число нулевых корней характеристического уравнения не менее размерности многообразия стационарных движений [2].

[1] Отметим, что многообразие стационарных движений может состоять из нескольких компонент, которые могут быть разной размерности. В этом случае под O_q будем понимать одну из компонент многообразия стационарных движений.

[2] Случай, когда число нулевых корней характеристического уравнения больше размерности многообразия стационарных движений, следует рассматривать как особый.

§ 2. О возмущении стационарного движения малыми постоянно действующими силами. К исследованию устойчивости стационарных движений по отношению к малым возмущениям начальных условий, согласно сказанному, может быть применена теорема об асимптотической устойчивости многообразия состояний равновесия, сформулированная в работе [6].

Согласно этой теореме, асимптотическая устойчивость многообразия стационарных движений полностью определяется корнями уравнения (1.13) без учета его q нулевых корней.

Для того чтобы подчеркнуть особенность, которая выявляется при возмущении стационарного движения малыми постоянно действующими силами, приведем сначала известные результаты исследования поведения системы, обладающей изолированным состоянием равновесия [8].

Пусть движение системы описывается уравнениями

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = f_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \delta_\alpha(t) \qquad (\alpha = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

Здесь $\delta_\alpha(t)$ — постоянно действующие возмущения такие, что $|\delta_\alpha(t)| < \delta$, где δ — некоторая малая положительная величина. Предположим, что в точке $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ находится изолированное состояние равновесия.

При описании поведения системы в окрестности состояния равновесия можно выделить следующие случаи.

1. Состояние равновесия устойчиво асимптотически по линейному приближению. В этом случае действительные части всех корней характеристического уравнения отрицательны и при любых, достаточно малых возмущениях $|\delta_\alpha(t)| < \delta$ величины $x\ (t)| < \varepsilon$, причем $\varepsilon \to 0$, если $\delta \to 0$.

2. Критический случай, но устойчивость асимптотическая, т. е. действительные части некоторых корней характеристического уравнения равны нулю, однако существует положительно определенная форма V такая, что в силу дифференциальных уравнений (2.1), в которых положено $\delta_\alpha(t) = 0$, производная по времени dV / dt отрицательна. В этом случае поведение системы в окрестности изолированного состояния равновесия такое же, как и в предыдущем случае.

3. Критический случай, но устойчивость не асимптотическая. В этом случае при сколь угодно малых постоянно действующих возмущениях изображающая точка в пространстве $(x_1, \ldots, x_n)$ может уйти от начала координат на конечное расстояние.

Рассмотрим теперь случай возмущения стационарных движений. Прежде всего заметим, что наличие q нулевых корней у характеристического уравнения (1.12) обусловлено наличием q-мерного многообразия стационарных движений, отнюдь не являясь признаком того, что здесь имеет место критический случай теории устойчивости, как это было бы для изолированного состояния равновесия.

Изучать устойчивость стационарных движений имеет смысл лишь по отношению к малым отклонениям от поверхности O_q стационарных движений. При этом естественно рассматривать вторую группу уравнений (1.12) независимо от первой группы, временно трактуя переменные $u_1, \ldots, u_q$ как параметры.

Предположим, что в некоторой области G значений $u_1, \ldots, u_q$ состояние равновесия $v_1 = v_2 = \ldots = v_{n+m-q} = 0$ системы уравнений

$$\frac{dv_r}{dt} = \sum_{s=1}^{n+m-q} b_{rs}(u_1, \ldots, u_q)\, v_s \qquad (r = 1, \ldots, n+m-q) \tag{2.2}$$

асимптотически устойчиво, так что

$$\| v \| < M \| v^\circ \| \exp(-\sigma t)$$

Здесь v_r° — начальные значения переменных

$$v_r \; (r = 1, \; \ldots, \; n+m-q), \qquad \sigma > 0, \qquad M < +\infty$$

Пусть начальные значения $u_1^\circ, \ldots, u_q^\circ, v_1^\circ \ldots, \overset{\circ}{v}_{n+m-q}$ таковы, что значения $u_1^\circ, \ldots, u_q^\circ$ лежат внутри области G асимптотической устойчивости уравнений (2.2), а величины $v_1^\circ, \ldots, \overset{\circ}{v}_{n+m-q}$ достаточно малы, тогда, согласно теореме [6] об асимптотической устойчивости многообразия состояний равновесия, в силу уравнений движения (1.11) выполняются предельные соотношения

$$\lim_{t\to+\infty} v_r(t) = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} u_s(t) = u_s^*$$

При этом для переменных $v_r(t)$ имеет место оценка

$$\| v(t) \| < M' \| v^\circ \| \exp(-\sigma' t) \qquad (\sigma > \sigma' > 0, \; M' < +\infty)$$

При наличии асимптотически устойчивого многообразия стационарных движений имеет место следующая теорема о поведении системы в окрестности этого многообразия при малых постоянно действующих возмущениях.

Теорема. В области G асимптотической устойчивости стационарных движений для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любых постоянно действующих возмущений, меньших δ, фазовая точка, пока ее u — компоненты находятся в G, не покинет ε — окрестности множества стационарных движений, и всегда найдутся такие сколь угодно малые постоянно действующие возмущения, при которых фазовая точка будет перемещаться вдоль поверхности стационарных движений по любой наперед заданной в области G кривой.

Из этой теоремы, в частности, следует, что связная ветвь множества стационарных движений устойчива по отношению к достаточно малым постоянно действующим возмущениям, когда все ее точки принадлежат области асимптотической устойчивости, и неустойчива, если эта связная ветвь содержит область неустойчивости.

При наличии постояннодействующих возмущений уравнения движения вблизи многообразия O_q стационарных движений можно записать в виде

$$\frac{du_k}{dt} = \Sigma a_{kr}(u_1, \ldots, u_q)\, v_r + O(\| v \|^2) + \delta_k(t) \tag{2.3}$$

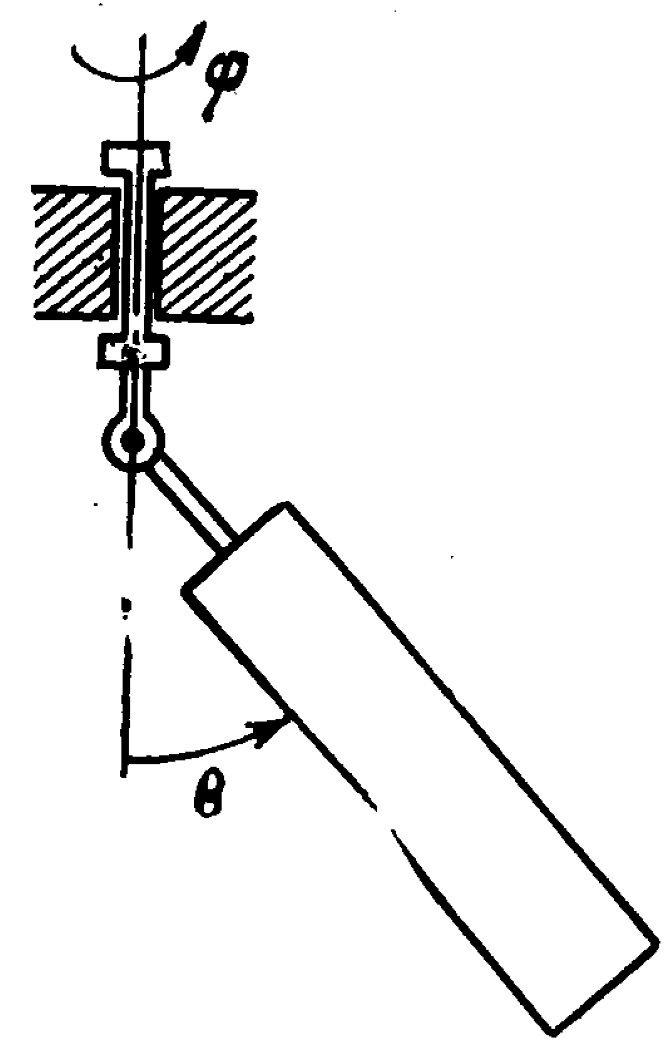
$$\frac{dv_s}{dt} = \Sigma b_{sr}(u_1, \ldots, u_q)\, v_r + O(\| v \|^2) + \delta_s(t)$$

Для доказательства первого утверждения теоремы воспользуемся [7] функцией Ляпунова для второй группы уравнений (2.3). В области G существует положительная квадратичная форма

$$V\,(\alpha \| v \|^2 \leqslant V \leqslant \beta \| v \|^2, \qquad \alpha > 0, \qquad \beta < \infty)$$

с коэффициентами, зависящими от $u_1, \ldots, u_q$, такая, что, в силу уравнений (2.2),

$$\frac{dV}{dt} = -\|v\|^2, \quad \sum_{k=1}^{q}\left|\frac{\partial V}{\partial u_k}\right| < a\|v\|^2 \qquad (a < +\infty)$$



Фиг. 1

На поверхности стационарных движений $V = 0$ и в силу уравнений (2.3)

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -\|v\|^2 + A\|v\|^3 + B\|v\|\delta$$

$$(\delta = \sup\{|\delta_k(t)|,\ |\delta_s(t)|\}) \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует, что

$$dV / dt < 0 \qquad \text{при } 2B\delta < \|v\| < 1 / 2A \tag{2.5}$$

Это означает, что при достаточно малом δ фазовая точка, движение которой описывается уравнениями (2.3), до тех пор, пока переменные $u_1, \ldots u_q$ принадлежат области G, не покидает $2B\delta$ окрестности поверхности стационарных движений. Этим первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго утверждения достаточно установить, что можно подобрать сколь угодно малые возмущения, при которых величина u_1 будет все время возрастать, а остальные переменные u_k $(k = 2, 3, \ldots, q)$ сохранят постоянные значения. Пусть $\delta_s(t) = 0$, $u_k^{\bullet} = 0$ $(k = 2, \ldots, q,\ s = 1, \ldots, n + m - 1)$ и $u_1^{\bullet} = \delta_1 > 0$; тогда из (2.3) для v_s следует:

$$\|v\| < M\|v^\circ\|e^{-\sigma' t} \qquad (0 < \sigma' < \sigma) \tag{2.6}$$

и из первых q уравнений находим требуемые воздействия

$$\delta_1(t) = \delta_1 - \sum_{r=1}^{n+m-q} a_{1r}v_r - O(\|v\|^2), \qquad \delta_k(t) = -\sum_{r=1}^{n+m-q} a_{kr}v_r - O(\|v\|^2) \tag{2.7}$$

В силу (2.6) при уменьшении δ_1 и $\|v^0\|$ эти воздействия могут быть сделаны сколь угодно малыми.

§ 3. **Пример: вращающийся плоский маятник.** Рассмотрим движение тяжелого осесимметричного тела, подвешенного на плоском шарнире, который укреплен в вертикальном подшипнике (фиг. 1). Трением в подшипнике пренебрегаем, а трение в шарнире будем считать вязким. Пусть θ и φ — обобщенные координаты системы, C — осевой момент инерции тела, A — экваториальный момент инерции относительно оси подвеса тела, l — расстояние от оси шарнира до центра тяжести тела, m — масса тела, g — ускорение силы тяжести. Составим выражения функции Лагранжа L и функции диссипации F:

$$L = {}^1/_2\,[A(\theta^{\bullet 2} + \varphi^{\bullet 2}\sin^2\theta) + C\varphi^{\bullet 2}\cos^2\theta] + mg\,l\cos\theta, \qquad F = {}^1/_2 h\theta^{\bullet 2}$$

где h — коэффициент вязкого трения в шарнире. Введем безразмерные величины

$$\tau = t\left(\frac{mgl}{A}\right)^{1/2}, \qquad \alpha = \frac{A - C}{A}, \qquad \beta = \frac{h}{\sqrt{Amgl}} \quad (-1 < \alpha < 1,\ \beta > 0)$$

Напишем уравнения движения системы

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \beta\frac{d\theta}{d\tau} - \alpha\omega^2\sin\theta\cos\theta + \sin\theta = 0, \quad \frac{d}{d\tau}[\omega(1 - \alpha\cos^2\theta)] = 0 \tag{3.1}$$

Уравнение стационарных движений имеет вид

$$(\alpha\omega^2\cos\theta - 1)\sin\theta = 0 \tag{3.2}$$

Отсюда следует, что многообразие стационарных движений является одномерным и состоит из трех ветвей: 1) $\theta = 0$, 2) $\theta = \pi$, 3) $\alpha\omega^2\cos\theta = 1$. Так как $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \omega^2 < \infty$, обозначим $\Omega = \omega^2$ и рассмотрим первый квадрант плоскости

(Ω, Θ). При изменении параметра α от -1 до $+1$ третья ветвь, протекая в области $\frac{1}{2}\pi < \Theta \leqslant \pi$, при $\alpha \to -0$ уходит в бесконечность и затем при $\alpha > 0$ появляется из бесконечности в области $0 \leqslant \Theta < \frac{1}{2}\pi$. Для исследования устойчивости ветвей стационарных движений составим характеристическое уравнение системы

$$p\,[(p^2 + \beta p - \alpha\Omega \cos 2\theta + \cos\theta)(1 - \alpha\cos^2\theta) + \alpha^2\Omega \sin^2 2\theta] = 0$$

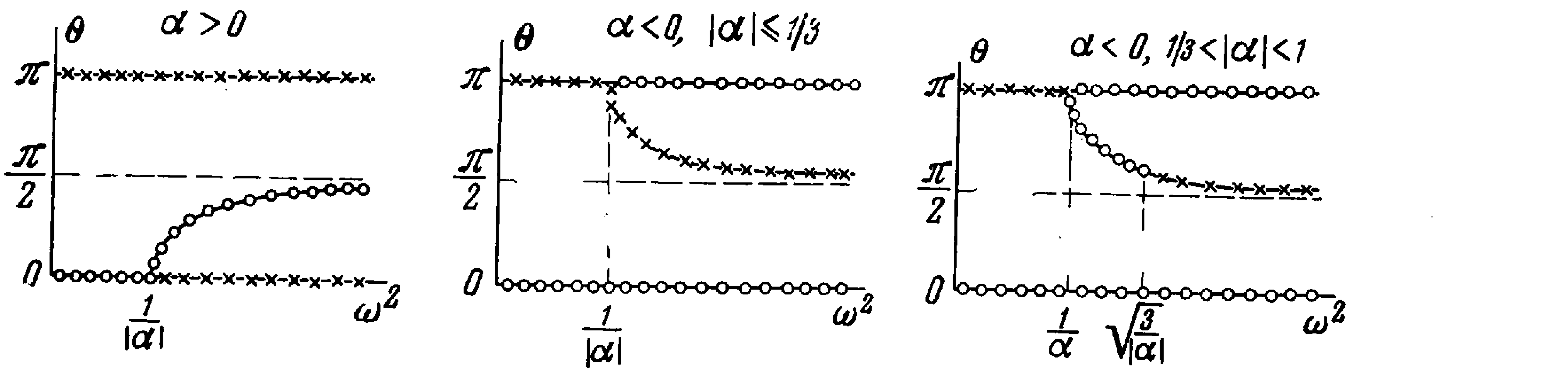
Нулевой корень обусловлен одномерностью многообразия стационарных движений. Устойчивость этого многообразия определяется корнями уравнения

$$(1 - \alpha\cos^2\theta)(p^2 + \beta p - \alpha\Omega\cos 2\theta + \cos\theta) + \alpha^2\Omega\sin^2 2\theta = 0 \qquad (3.3)$$

Подставляя сюда $\theta = 0$, получим характеристическое уравнение для ветви *1*

$$p^2 + \beta p - \alpha\Omega + 1 = 0$$

Откуда следует, что при $\alpha\Omega < 1$ ветвь *1* асимптотически устойчива. В случае $\alpha \leqslant 0$ ветвь *1* всегда устойчива. При $\alpha > 0$ ветвь *1* устойчива лишь в области $\Omega < \alpha^{-1}$.



Фиг. 2

Подставляя в (3.3) значение $\theta = \pi$, получим характеристическое уравнение для ветви *2*. Условие асимптотической устойчивости ветви *2* имеет вид $\alpha\Omega + 1 < 0$. Следовательно, в случае $\alpha \geqslant 0$ ветвь *2* всегда неустойчива, а в случае $\alpha < 0$ ветвь *2* устойчива лишь в области $\Omega > |\alpha|^{-1}$. Характеристическое уравнение для ветви *3*

$$(1 - \alpha\cos^2\theta)p^2 + \beta\,(1 - \alpha\cos^2\theta)p + (\sec\theta + 3\alpha\cos\theta)\sin^2\theta = 0 \qquad (\alpha\Omega\cos\theta = 1)$$

Условие асимптотической устойчивости ветви *3*: $\sec\theta + 3\alpha\cos\theta > 0$. Отсюда следует, что в случае $\alpha > 0$ ветвь *3* всегда устойчива, а в случае $\alpha < 0$ — неустойчива, если $|\alpha| \leqslant \frac{1}{3}$. Для значений α в области $-1 < \alpha < -\frac{1}{3}$ на ветви *3* появляется область устойчивости $|\alpha|^{-1} < \Omega < \sqrt{3\,|\alpha|^{-1}}$. Вне этого интервала значений Ω ветвь *3* остается неустойчивой. Полученные результаты изображены на фиг. 2, где кружочками отмечены устойчивые стационарные движения, а крестиками — неустойчивые.

Проведенное рассмотрение показывает, что случай бифуркации, аналогичный отмеченному А. Ю. Ишлинским [1] на примере вращения тела, подвешенного на струне, имеет место также для вращающегося плоского маятника при значениях параметра $\alpha < 0$ в области $\frac{1}{3} < |\alpha| < 1$ (см. фиг. 2, *в*).

Поступила 9 IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Пример бифуркации, не приводящей к появлению неустойчивых форм стационарного движения. Докл. АН СССР, 1957, т. 117, № 1.
2. Routh E. J. The advanced part of a treatise on the dynamics of a System of ridgid bodies, part 2. Sixth edition, London, 1930.
3. Klein F., Sommerfeld A. Über die theorie des Kreisels. Leipzig, 1897.
4. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. ОНТИ, 1937.
5. Синг Дж. Л. Классическая динамика. Физматгиз, 1963.
6. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Об устойчивости состояний равновесия неголономных систем. ПММ, 1965, вып. 1.
7. Неймарк Ю. И. О некоторых общих свойствах функции Ляпунова. Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, 1961, № 2.
8. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959.