Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

О ВЛИЯНИИ ДИССИПАТИВНЫХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ НА УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М. С. Габриелян

(Ереван)

Устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых не вполне управляемую консервативную механическую систему можно сделать вполне управляемой, стабилизируемой и наблюдаемой в окрестности установившегося движения наложением диссипативных и гироскопических сил. Заметим, что в статье [1] рассматривалось влияние диссипативных и гироскопических сил на свойства управляемости консервативных механических систем в некоторых частных случаях.

§ 1. Рассмотрим голономную, консервативную механическую систему, управляюмую одним управляющим воздействием. Известно [2], что линейное приближение такой системы в окрестности равновесия можно представить в виде

$$y_i'' = \lambda_i y_i + \alpha_i u \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Известно [3], что система (1.1) вполне управляема воздействием u тогда и только тогда, когда

$$\lambda_i \neq \lambda_j, \quad \alpha_i \neq 0; \quad (i, j = 1, \ldots, n, \ i \neq j) \tag{1.2}$$

Предположим, что система (1.1) не вполне управляема воздействием u. Это значит, что среди λ_i есть равные или некоторые из чисел α_i равны нулю.

Ниже исследуется следующий вопрос, существуют ли такие диссипативные силы, что не вполне управляемая силой u система (1.1) становится вполне управляемой этой силой при наличии диссипации? Необходимые условия разрешимости этой задачи можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1.1. Если среди чисел λ_i по крайней мере два равны нулю или если хотя бы в одном уравнении системы (1.1) $\lambda_i = \alpha_i = 0$, то система (1.1) не может быть вполне управляемой воздействием u, какие бы не были диссипативные или гироскопические силы, приложенные дополнительно на эту систему.

В самом деле, в указанных случаях можно с помощью неособого линейного преобразования привести хотя бы одно уравнение (1.1) к виду $y_i'' = 0$.

Пусть на систему дополнительно действуют какие-то диссипативные и гироскопические силы. Тогда уравнение $y_i'' = 0$ примет вид

$$y''_i = a_1 y_1' + \ldots + a_n y_n' \tag{1.3}$$

и, следовательно, величина $y_i' - a_1 y_1 - \ldots - a_n y_n = \text{const}$ является первым интегралом системы (1.1) при наличии диссипации и гироскопических сил, независимо от u. Система, очевидно, не вполне управляема, если допускает хотя бы один первый интеграл, не зависящий от управляющего воздействия. Это и доказывает утверждение.

Аналогичное утверждение имеет место для нелинейного случая если имеется более двух циклических координат или если при одной координате соответствующее значение $\alpha = 0$. Рассмотрим систему

$$y_i'' = \lambda_i y_i + \alpha_i u \quad (i = 1, \ldots, k), \qquad y_i'' = \lambda_i y_i \quad (i = k+1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &\lambda_i \neq \lambda_j, \quad \alpha_i \neq 0 \quad (i, j = 1, \ldots, k, \ i \neq j) \\ &\lambda_i \neq 0 \quad (i = 1, \ldots, k-1, \ k+1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Предположим, что на систему (1.4), кроме консервативных сил и управляющего воздействия, действуют диссипативные силы.

Теорема 1.2. Для существования таких диссипативных сил, чтобы не вполне управляемая механическая система (1.1) стала вполне управляемой при наличии диссипации, достаточно, чтобы выполнялись условия (1.5).

Доказательство. Пусть диссипативные силы порождаются функцией Релея

$$2R = \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_{ii} y_i'^2 + \sum_{i=k}^{n} (\gamma_{ii} y_i'^2 + 2\gamma_{ii+1} y_i' y_{i+1}') \tag{1.6}$$

Здесь R определенно положительна; $\gamma_{nn+1} = 0$, т. е. рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &x_{2i-1}' = x_{2i}, \quad x_{2i}' = \lambda_i x_{2i-1} - \frac{\partial R}{\partial x_{2i}} + \alpha_i u \quad (i = 1, \ldots, k) \\ &x_{2i-1}' = x_{2i}, \quad x_{2i}' = \lambda_i x_{2i-1} - \frac{\partial R}{\partial x_{2i}} \quad (i = k+1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{1.7}$$

которая в векторно-матричной форме будет $x' = Ax + bu$.

Для положительного ответа на поставленный вопрос достаточно показать, что при подходящем выборе чисел γ_{ij}, удовлетворяющих условиям знакоположительности функции R (1.6):

1) собственные числа матрицы A будут действительными и различными;

2) проекция вектора b на любую строку матрицы S^{-1}(где S — фундаментальная матрица матрицы A) отлична от нуля.

Составим для системы (1.7) характеристическое уравнение $|A - \mu E| = 0$, которое в развернутом виде будет

$$(\lambda_1 - \gamma_{11}\mu - \mu^2) \ldots (\lambda_{k-1} - \mu\gamma_{k-1, k-1} - \mu^2)\, \Delta_{2p}(\mu) = 0 \qquad (p = n - k + 1) \tag{1.8}$$

Здесь $\Delta_{2p}(\mu)$ определяются из рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} \Delta_{2i}(\mu) = (-\mu^2 - \gamma_{n-i+1, n-i+1}\mu + \lambda_{n-i+1})\, \Delta_{2i-2}(\mu) - \mu^2 \gamma_{n-i+1, n-i+2}^2\, \Delta_{2i-4}(\mu) \\ (i = 1, \ldots, p, \ \Delta_0 = 1, \ \Delta_{-2} = 0) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Покажем, что при подходящем выборе γ_{ij}, $\Delta_{2i}(\mu) = 0$, имеет $2i$ различных, действительных корней. Обозначим их через $\mu_1^{(2i)}, \ldots, \mu_{2i}^{(2i)}$. Доказательство будем вести методом индукции.

Из (1.9) $\Delta_2(\mu) = \mu^2 + \gamma_{nn}\mu - \lambda_n = 0$ при $\gamma_{nn}^2 > -4\lambda_n$ имеет два действительных корня

$$\mu_{1,2}^{(2)} = -{}^1/_2\gamma_{nn} \pm \sqrt{{}^1/_4\gamma_{nn}^2 + \lambda_n}$$

которые также различны.

Покажем, что $\Delta_4(\mu) = 0$ при подходящем выборе чисел $\gamma_{n-1, n-1}$, $\gamma_{n-1, n}$ имеет четыре действительных корня. Так как $\Delta_4(\mu) \to +\infty$ при $\mu \to -\infty$, а из (1.9) вытекает $\Delta_4(\mu_1^{(2)}) < 0$, то, как непрерывная функция, $\Delta_4(\mu)$ в интервале $-\infty < \mu < \mu_1^{(2)}$

имеет по крайней мере один действительный корень. Точно так же можно убедиться, что в промежутке $\mu_2^{(2)} < \mu < +\infty$ функция $\Delta_4(\mu)$ имеет по крайней мере еще один корень. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. При условиях

$$\gamma_{ii} > \varepsilon - \varepsilon^{-1}\lambda_i, \qquad \gamma_{ii}^2 + 4\lambda_i > 0 \qquad (i = k, \ldots, n) \tag{1.10}$$

наложенных на γ_{ii}, имеет место соотношение

$$-(-\varepsilon)^2 - \gamma_{ii}(-\varepsilon) + \lambda_i > 0 \tag{1.11}$$

т. е. точка $\mu = -\varepsilon$ находится между корнями уравнения

$$-\mu^2 - \gamma_{ii}\mu + \lambda_i = 0 \qquad (i = k, \ldots, n) \tag{1.12}$$

Подберем $\gamma_{n-1,n}$ так, чтобы

$$\Delta_4(-\varepsilon) = (-\varepsilon^2 + \gamma_{n-1,\,n-1}\varepsilon + \lambda_{n-1})\,\Delta_2(-\varepsilon) - \varepsilon^2\gamma^2_{n,\,n-1} > 0$$

для этого достаточно потребовать, чтобы

$$\gamma^2_{n-1,\,n} < \varepsilon^{-2}\left[(-\varepsilon^2 + \gamma_{n-1,\,n-1}\varepsilon + \lambda_{n-1})\,\Delta_2(-\varepsilon)\right] \tag{1.13}$$

Из (1.10) и (1.13) следует, что указанный выбор γ_{nn}, $\gamma_{n-1,\,n-1}$ и $\gamma_{n-1,\,n}$ не противоречит определенной положительности R (1.6). С другой стороны, при указанном выборе γ_{nn}, $\gamma_{n-1,\,n-1}$ и $\gamma_{n,n-1}$, функция $\Delta_4(\mu)$, как непрерывная функция в интервалах $(-\varepsilon, \mu_2^{(2)})$ и $(\mu_1^2 - \varepsilon)$, имеет по крайней мере по одному корню.

Но так как число корней $\Delta_4(\mu)$ не может быть больше четырех, то при указанном выборе γ_{ij}, $\Delta_4(\mu)$ имеет четыре действительных, различных корней, расположенных в следующем порядке:

$$\mu_1^{(4)} < \mu_1^{(2)} < \mu_2^{(4)} < -\varepsilon < \mu_3^{(4)} < \mu_2^{(2)} < \mu_4^{(4)}$$

Предположим, что числа $\gamma_{n-j+1,\,n-j+1}, \gamma_{n-j+1,\,n-j+2} (j = 1, \ldots, i-1)$ выбраны так, что корни $\Delta_{2i-2}(\mu)$ и $\Delta_{2i-4}(\mu)$ действительные, различные и расположены так:

$$\begin{gathered}\mu_1^{(2i-2)} < \mu_1^{(2i-4)} < \mu_2^{(2i-2)} < \mu_2^{(2i-4)} < \cdots < \mu_{i-2}^{(2i-2)} < \mu_{i-2}^{(2i-4)} < \mu_{i-1}^{(2i-2)} < -\varepsilon < \mu_i^{(2i-2)} < \\ < \mu_{i-1}^{(2i-4)} < \mu_{i+1}^{(2i-2)} < \cdots < \mu_{2i-5}^{(2i-4)} < \mu_{2i-3}^{(2i-2)} < \mu_{2i-4}^{(2i-4)} < \mu_{2i-2}^{(2i-2)}\end{gathered} \tag{1.14}$$

и докажем, что при (1.10) число $\gamma_{n-i+1,\,n-i+2}$ можно выбрать так, чтобы корни $\Delta_{2i}(\mu)$ и $\Delta_{2i-2}(\mu)$ были расположены аналогично (1.14). Из (1.9), (1.11), (1.14) и от того, что $\Delta_{2i}(\mu) \to (-1)^i\infty$, когда $\mu \to \pm\infty$ $(i = 1, \ldots, p)$, следует, что

$$\begin{gathered}\operatorname{sign}\Delta_{2i}(\mu_1^{(2i-2)}) = (-1)^{i-1}, \qquad \operatorname{sign}\Delta_{2i}(\mu_{2i-2}^{(2i-2)}) = (-1)^{i-1} \\ \operatorname{sign}\Delta_{2i}(\mu_2^{(2i-2)}) = (-1)^{i-2}, \qquad \operatorname{sign}\Delta_{2i}(\mu_{2i-3}^{(2i-2)}) = (-1)^{i-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_{2i}(\mu_{i-1}^{(2i-2)}) < 0, \qquad \Delta_{2i}(\mu_i^{(2i-2)}) < 0\end{gathered} \tag{1.15}$$

то, как непрерывная функция, $\Delta_{2i}(\mu)$ в каждом из интервалов

$$\begin{gathered}(-\infty, \mu_1^{(2i-2)}),\ (\mu_1^{(2i-2)}, \mu_2^{(2i-2)}), \ldots, (\mu_{i-2}^{(2i-2)}, \mu_{i-1}^{(2i-2)}) \\ (\mu_i^{(2i-2)}, \mu_{i+1}^{(2i-2)}), \ldots, (\mu_{2i-3}^{(2i-2)}, \mu_{2i-2}^{(2i-2)}),\ (\mu_{2i-2}^{(2i-2)}, +\infty)\end{gathered} \tag{1.16}$$

имеет по крайней мере по одному корню. Но так как

$$\Delta_{2i}(\mu_{i-1}^{(2i-2)}) < 0, \qquad \Delta_{2i}(\mu_i^{(2i-2)}) < 0, \qquad \Delta_{2i-2}(-\varepsilon) > 0, \qquad \Delta_{2i-4}(-\varepsilon) > 0$$

то из (1.9)

$$(-\varepsilon^2 + \gamma_{n-i+1,\,n-i+1}\,\varepsilon + \lambda_{n-i+1})\,\Delta_{2i-2}(-\varepsilon) > 0$$

Подберем $\gamma_{n-i+1,\,n-i+2}$ так, чтобы

$$\gamma^2_{n-i+1,\,n-i+2} < \frac{(-\varepsilon^2 + \gamma_{n-i+1,\,n-i+1}\,\varepsilon + \lambda_{n-i+1})\,\Delta_{2i-2}(-\varepsilon)}{\varepsilon^2\Delta_{2i-4}(-\varepsilon)} \tag{1.17}$$

Тогда согласно (1.9) имеем $\Delta_{2i}(-\varepsilon) > 0$. Это значит, что $\Delta_{2i}(\mu)$ в интервалах $(\mu_i^{(2i-2)}, -\varepsilon)$ и $(-\varepsilon, \mu_i^{(2i-2)})$ меняет знак, следовательно, $\Delta_{2i}(\mu)$ в этих интервалах имеет по одному корню, так как $\Delta_{2i}(\mu)$ не может иметь больше чем $2i$ корней.

Корни $\Delta_{2i}(\mu)$ и $\Delta_{2i-2}(\mu)$ совпадать не могут, так как в противном случае из формулы (1.9) следовало бы, что $\Delta_0 = 0$, но $\Delta_0 = 1$. Таким образом, можно утверждать, что $\Delta_{2p}(\mu)$ при подходящем выборе $\gamma_{ii}, \gamma_{i-1,i}$ $(i = k, \ldots, n)$ имеет $2p$ действительных, различных корней, не совпадающих с корнями $\Delta_{2p-2}(\mu)$. Среди корней $\mu_j^{(2p)}$ $(j = 1, \ldots, 2p)$ лишь один может быть нулем, притом только тогда, когда $\lambda_k = 0$. Предположим после этого, что только $\mu_1^{(2p)}$ может быть нулем, а остальные отличны от нуля. Из (1.9) следует также, что нулевой корень $\mu_1^{(2p)}$ не зависит от γ_{ij}, а остальные при любых γ_{ij} отличны от нуля.

Из уравнения (1.8) следует, что при условии $\gamma_{ii}^2 > -4\lambda_i$ $(i = 1, \ldots, k-1)$ остальные $2k-2$ корни этого уравнения тоже действительные и отличные от нуля.

Пусть

$$\begin{gathered}
{}^1/_2\left|-\gamma_{ii} + \sqrt{\gamma_{ii}^2 + 4\lambda_i}\right| < \min_m |\mu_m^{(2p)}| \\
{}^1/_2\left|\gamma_{ii} + \sqrt{\gamma_{ii}^2 + 4\lambda_i}\right| < \max_m |\mu_m^{(2p)}|, \ \mu_m^{(2p)} \neq 0 \qquad (1.18) \\
-\gamma_{ii} \pm \sqrt{\gamma_{ii}^2 + 4\lambda_i} \neq -\gamma_{ll} \pm \sqrt{\gamma_{ll}^2 + 4\lambda_l} \\
(i, l = 1, \ldots, k-1, \quad i \neq l, \quad m = 1, 2, \ldots, 2p, \ m \neq j \ \text{при} \ \mu_j^{(2p)} = 0)
\end{gathered}$$

Этого можно добиться увеличением γ_{ii} $(i = 1, \ldots, k-1)$, не нарушая определенной положительности формы R. Тогда корни уравнения (1.8) все будут действительными и различными, которые обозначим через $\mu_j (j = 1, \ldots, 2n)$, а нулем может быть только μ_{2k-1}.

Для доказательства второй части теоремы, нужно показать, что ни одна из строк матрицы S^{-1} не перпендикулярна $2n$-мерному вектору-столбцу

$$b = \{0, \alpha_1, 0, \ldots, 0, \alpha_k, 0, \ldots, 0\} \qquad (1.19)$$

где матрица S — фундаментальная матрица матрицы A

$$S = \left\| \begin{matrix}
1 & 1 & \ldots 0 & 0 & 0 & \ldots 0 \\
\mu_1 & \mu_2 & \ldots 0 & 0 & 0 & \ldots 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \ldots 1 & 1 & 0 & \ldots 0 \\
0 & 0 & \ldots \mu_{2k-3} & \mu_{2k-2} & 0 & \ldots 0 \\
0 & 0 & \ldots 0 & 0 & s_{2k-1}^{(2k-1)} & \ldots s_{2k-1}^{(2n)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \ldots 0 & 0 & s_{2n}^{(2k-1)} & \ldots s_{2n}^{(2n)}
\end{matrix} \right\| \qquad (1.20)$$

Числа $s_i^{(j)}$ $(i = 2k-1, \ldots, 2n)$, — компоненты j-го собственного вектора матрицы A $(j = 2k-1, \ldots, 2n)$, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{gathered}
s_{2k}^{(j)} = \mu_j s_{2k-1}^{(j)} \\
\lambda_k s_{2k-1}^{(j)} - \gamma_{kk} s_{2k}^{(j)} - \gamma_{kk+1} s_{2k+2}^{(j)} = \mu_j s_{2k}^{(j)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-\gamma_{n-1,n} s_{2n-2}^{(j)} + \lambda_n s_{2n-1}^{(j)} - \gamma_{nn} s_{2n}^{(j)} = \mu_j s_{2n}^{(j)} \qquad (j = 2k-1, \ldots, 2n)
\end{gathered}$$

Эту систему можно представить в виде (1.21)

$$\begin{gathered}
\gamma_{n-i,\, n-i+1} \mu_j s_{2n-2i-1}^{(j)} = (\lambda_{n-i+1} - \mu_j \gamma_{n-i+1,\, n-i+1} - \mu_j^2) s_{2n-2i+1}^{(j)} - \mu_j \gamma_{n-i+1,\, n-i+2} s_{2n-2i+3}^{(j)} \\
s_{2n-2i+2}^{(j)} = \mu_j s_{2n-2i+1}^{(j)}, \qquad s_{2n-1}^{(j)} = 1, \qquad s_{2n+1}^{(j)} = 0, \qquad \gamma_{k-1k} = \gamma_{nn+1} = 0 \\
(i = 1, \ldots, n-k+1, \ j = 2k-1, \ldots, 2n)
\end{gathered}$$

Произведем замену $s_i^{(j)}$ по формуле

$$s_{2n-2i+1}^{(j)} = \gamma_{n-1n}^{-1}\gamma_{n-2,\,n-1}^{-1}\ldots\gamma_{n-i+1,\,n-i+2}^{-1}v_{2n-2i+1}^{(j)}$$

$$(i=1,\ldots,n-k+1,\ j=2k-1,\ldots,2n,\ v_{2n-1}^{(j)}=s_{2n-1}^{(j)}=1)$$

Тогда уравнения (1.21) примут вид

$$\mu_j v_{2n-2i-1}^{(j)} = v_{2n-2i+1}^{(j)}(\lambda_{n-i+1}-\mu_j\gamma_{n-i+1,\,n-i+1}-\mu_j^2)-\mu_j\gamma_{n-i+1,\,n-i+2}^2 v_{2n-2i+3}^{(j)}$$

$$(i=1,\ldots,n-k+1,\ j=2k-1,\ldots,2n,\ v_{2n+1}^{(j)}=0) \qquad (1.22)$$

В случае $\mu_j \neq 0$ ($j = 2k, \ldots, 2n$) при $\lambda_k = 0$ компоненты $2k-1$-го собственного вектора матрицы A принимают вид

$$s_1^{(2k-1)}=0,\ldots,s_{2k-2}^{(2k-1)}=0,\quad s_{2k-1}^{(2k-1)}=1,\quad s_{2k}^{(2k-1)}=0,\ldots,s_{2n}^{(2k-1)}=0 \qquad (1.23)$$

Уравнение (1.22) при этом превращается в тождество. Поэтому разделяя уравнения (1.22) на μ_j ($j = 2k, \ldots, 2n$), получим

$$v_{2n-2i-1}^{(j)} = v_{2n-2i+1}^{(j)}\left(\frac{\lambda_{n-i+1}}{\mu_j}-\gamma_{n-i+1,\,n-i+1}-\mu_j\right)-\gamma_{n-i+1,\,n-i+2}^2 v_{2n-2i+3}^{(j)} \qquad (1.24)$$

Заметим, что ни один из уравнений $\Delta_{2i}(\mu) = 0$ ($i = 1, \ldots, p-1$) (1.9) не может иметь нулевой корень, поэтому при составлении системы (1.9) можно было в качестве рекуррентных соотношений взять

$$D_{2i}(\mu) = \left(\frac{\lambda_{n-i+1}}{\mu}-\mu-\gamma_{n-i+1,\,n-i+1}\right)D_{2i-2}(\mu)-\gamma_{n-i+1,\,n-i+2}^2 D_{2i-4}(\mu)$$

$$(i=1,\ldots,p-1,\ D_0=1) \qquad (1.25)$$

Очевидно, что корни $D_{2i}(\mu)$ и $\Delta_{2i}(\mu)$ ($i = 1, \ldots, p-1$) совпадают.

Из уравнений (1.24) и (1.25) следует, что

$$v_{2n-2i+1}^{(j)} = D_{2i}(\mu_j) \qquad (i=0,\ldots,n-k,\ j=2k,\ldots,2n) \qquad (1.26)$$

Следовательно

$$s_{2n-2i+1}^{(j)} = \gamma_{n-1,\,n}^{-1}\gamma_{n-2,\,n-1}^{-1}\ldots\gamma_{n-i+1,\,n-i+2}^{-1}D_{2i-2}(\mu_j),\qquad s_{2n-2i+2}^{(j)}=\mu_j s_{2n-2i+1}^{(j)} \qquad (1.27)$$

Составим матрицу S^{-1}, для этого вычислим определитель матрицы S. Так как матрица S имеет квазидиагональную структуру, то

$$|S| = \sqrt{\gamma_{11}^2+4\lambda_1}\ldots\sqrt{\gamma_{k-1,\,k-1}^2+4\lambda_{k-1}}\begin{vmatrix} s_{2k-1}^{(2k-1)} & \ldots & s_{2k-1}^{(2n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{2n}^{(2k-1)} & \ldots & s_{2n}^{(2n)} \end{vmatrix}$$

Умножая каждый столбец определителя на μ_j^{n-k} ($j = 2k-1, \ldots, 2n$, $\mu_{2k-1} \neq 0$), приводим его к определителю Вандермонда, после чего получим

$$|S| = (-1)^\alpha\sqrt{\gamma_{11}^2+4\lambda_1}\ldots\sqrt{\gamma_{k-1,\,k-1}^2+4\lambda_{k-1}}\ \frac{\gamma_{n-1n}^{2k-2n}\ldots\gamma_{kk+1}^{-2}\lambda_n^{n-k}\ldots\lambda_{k+1}}{\mu_{2k-1}^{n-k}\ldots\mu_{2n}^{n-k}}\times$$

$$\times(\mu_{2k}-\mu_{2k-1})\ldots(\mu_{2n}-\mu_{2n-1}) \quad \text{при } \mu_{2k-1}\neq 0 \qquad (1.28)$$

Когда же $\lambda_k = 0$, $\mu_{2k-1} = 0$, то для вычисления $|S|$ достаточно делить и умножать на $\mu_{2k}^{n-k}\ldots\mu_{2n}^{n-k}$ и получим формулу, подобную (1.28). Обозначим элементы матрицы S^{-1} через p_{ij}. Из (1.20) следует, что

$$S^{-1} = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & p_{2k-3,\,2k-3} & p_{2k-3,\,2k-2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & p_{2k-2,\,2k-3} & p_{2k-2,\,2k-2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & p_{2k-1,\,2k-1} & \ldots & p_{2k-1,\,2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & p_{2n,\,2k-1} & \ldots & p_{2n,\,2n} \end{Vmatrix} \qquad (1.29)$$

Для доказательства того, что ни одна из строк матрицы S^{-1} не перпендикулярна вектору b (1.19), достаточно показать, что

$$p_{12} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma_{11}^2 + 4\lambda_1}} \neq 0, \qquad p_{22} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_{22}^2 + 4\lambda_2}} \neq 0, \ldots$$

$$p_{2k-3,\,2k-2} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma^2_{k-1,\;k-1} + 4\lambda_{k-1}}} \neq 0, \qquad p_{2k-2,\,2k-2} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2_{k-1,\,k-1} + 4\lambda_{k-1}}} \neq 0$$

$$p_{2k-1,\,2k} = (-1)^{\beta_1} \frac{\gamma_{n-1,n} \cdots \gamma_{k,k+1}\mu_{2k-1}^{n-k}}{(\mu_{2k} - \mu_{2k-1}) \cdots (\mu_{2n} - \mu_{2n-1})} \neq 0 \text{ при } \mu_{2k-1} \neq 0 \tag{1.30}$$

$$p_{2k-1,\,2k} = (-1)^{\beta_2} \frac{\gamma_{n-1,n} \cdots \gamma_{k,k+1}}{\mu_{2k} \cdots \mu_{2n}} \neq 0 \text{ при } \mu_{2k-1} = 0$$

$$p_{j2k} = (-1)^{\beta_3} \frac{\gamma_{n-1,n} \cdots \gamma_{k,k+1}\mu_j^{n-k}}{(\mu_{2k-1} - \mu_j) \cdots (\mu_{j-1} - \mu_j)(\mu_j - \mu_{j+1}) \cdots (\mu_j - \mu_{2n})} \neq 0$$

$$(j = 2k, \ldots, 2n, \ \beta_1, \beta_2, \beta_3 \text{ — целые числа})$$

А это следует непосредственно из хода доказательства теоремы 1.2.

Таким образом, при выполнении условий (1.5) диссипативные силы можно подобрать согласно (1.6), (1.10), (1.17), (1.18). Согласно теореме о дуальности [4] между вполне управляемостью и наблюдамостью не вполне наблюдаемую по величине $\xi = (cx)$ (где $c = \{c_1, 0, \ldots, c_k, 0, \ldots \ldots, 0\}$) систему (1.1) можно сделать вполне наблюдаемой, если к системе, кроме консервативных сил, приложить диссипативные силы вышеуказанным образом. Если дополнительно предполагать, что $\lambda_k \neq 0$, то при (1.5) система (1.1) также не вполне наблюдаема по скорости $\xi' = (b^*x)$, но при наложении диссипативных сил вышесказанным образом систему можно сделать вполне наблюдаемой по величине $\xi' = (b^*x)$.

В обоих случаях условия (1.5) являются необходимыми и достаточными для существования диссипативных сил, делающих систему (1.1) вполне наблюдаемой по величине $\xi = (cx)$ и $\xi' = (b^*x)$.

§ 2. Для изучения улучшения управляемости системы (1.1) приложением гироскопических сил, можно доказать достаточность условий теоремы (1.1), при наличии которых система (1.4) станет вполне управляемой.

Доказательство. Пусть гироскопические силы приложены так, что система (1.4) при наличии этих сил принимает следующий вид:

$$\begin{gathered} x'_{2j-1} = x_{2j}, \quad x_{2i}' = \lambda_i x_{2i-1} + \alpha_i u \quad (i = 1, \ldots, k-1) \\ x_{2k}' = \lambda_k x_{2k-1} + \omega_k x_{2k+2} + \alpha_k u \\ x_{2i}' = -\omega_{i-1} x_{2i-2} + \lambda_i x_{2i-1} + \omega_i x_{2i+2} \quad (i = k+1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, n, \ w_n = 0) \end{gathered} \tag{2.1}$$

а в векторно-матричной форме $x' = Ax + bu$.

Приведем систему (2.1) при помощи неособого, действительного линейного преобразования к первому нормальному виду ([5], стр. 125). Для этого нужно определить элементарные делители матрицы $A - \mu E$. Составим уравнение

$$|A - \mu E| = 0 \tag{2.2}$$

которое в развернутом виде будет

$$(\mu^2 - \lambda_1)(\mu^2 - \lambda_2) \ldots (\mu^2 - \lambda_{k-1})\,\Delta_{2p}(\mu) = 0 \qquad (p = n - k + 1)$$

Здесь $\Delta_{2p}(\mu)$ определяются из рекуррентных соотношений

$$\Delta_{2i}(\mu) = (\mu^2 - \lambda_{n-i+1})\,\Delta_{2i-2}(\mu) + \omega^2_{n-i+1}\mu^2\Delta_{2i-4}(\mu) \ (i = 1, \ldots, p; \ \Delta_0 = 1; \ \Delta_{-2} = 0) \tag{2.3}$$

Обозначая $\mu^2 = \nu$, покажем, что можно числа ω_j подобрать так, чтобы уравнение $\Delta_{2i}(\nu) = 0$ имело i различных, действительных корней, не совпадающих с корнями $\Delta_{2i-2}(\nu) = 0$. Докажем это методом индукции. При $i = 1$ это очевидно, так как λ_n — действительное число, а $\Delta_2(\nu) = \nu - \lambda_n = 0$ или $\nu_1^{(2)} = \lambda_n$. При $i = 2$ имеем

$$\Delta_4(\nu) = (\nu - \lambda_{n-1})\,\Delta_2(\nu) + \omega_{n-1}^2\Delta_0$$

Пусть $-\varepsilon < 0$ — произвольное число, не совпадающее с числами $\lambda_{n-1}, \nu^{(2)}$, т. е. с корнями $(\lambda_{n-1} - \nu)\,\Delta_2(\nu) = 0$, тогда при

$$\omega_{n-1}^2 > \frac{-(\lambda_{n-1} + \varepsilon)\,\Delta_2(-\varepsilon)}{\varepsilon\Delta_0}, \qquad \Delta_4(-\varepsilon) < 0$$

Но так как $\Delta_4(\nu) \to +\infty$, когда $\nu \to \pm\infty$, то $\Delta_4(\nu)$ имеет два действительных, различных корней $\nu_1^{(4)}, \nu_2^{(4)}$. Корни $\Delta_4(\nu)$ и $\Delta_2(\nu)$ совпадать не могут, так как в противном случае $\Delta_0 = 0$. Таким образом, доказано, что $\Delta_4(\nu)$ имеет два действительных, различных корней, не совпадающих с $\nu_1^{(2)}$.

Предположим, что уравнения $\Delta_{2i-2}(\nu)$ и $\Delta_{2i-4}(\nu)$ имеют соответственно $i - 1$, и $i - 2$ действительных, различных корней, которые не совпадают.

Покажем, что ω_{n-i+1} можно подобрать так, чтобы $\Delta_{2i}(\nu)$ имел i действительных, различных корней, не совпадающих с корнями $\Delta_{2i-2}(\nu)$. Выпишем $\Delta_{2i}(\nu)$

$$\Delta_{2i}(\nu) = (\nu - \lambda_{n+1-i})\,\Delta_{2i-2}(\nu) + \omega_{n-i+1}\nu\Delta_{2i-4}(\nu) \tag{2.4}$$

Так как $\Delta_{2j}(\nu)$ является полиномом порядка j относительно ν и коэффициент у старшего члена равняется единице $(j = 0, \ldots, p)$, то

$$\operatorname{sign}\Delta_{2i}(-\infty) = (-1)^i, \qquad \operatorname{sign}\Delta_{2i-4}(-\infty) = (-1)^i \tag{2.5}$$
$$\Delta_{2i}(+\infty) > 0, \quad \Delta_{2i-4}(+\infty) > 0$$

Пусть

$$\varepsilon > \max_j |\nu_j^{(2i-4)}| \quad (1 \leqslant j \leqslant i-2)$$

Здесь $\nu_j^{(2i-4)}$ — корни уравнения $\Delta_{2i-4}(\nu) = 0$. Тогда $\operatorname{sign}\Delta_{2i}(-\varepsilon) = (-1)^{i-1}$ при (2.4), (2.5) и

$$\omega_{n-i+1}^2 > \frac{-(\varepsilon + \lambda_{n-i+1})\,\Delta_{2i-2}(\nu)}{\varepsilon\Delta_{2i-4}(-\varepsilon)}$$

Таким образом, уравнение $\Delta_{2i}(\nu) = 0$ имеет по крайней мере один корень левее точки $\nu = -\varepsilon$. Так как $\nu = 0$ не является корнем для $\Delta_{2i-4}(\nu)$, то $\nu\Delta_{2i-4}(\nu)$ имеет $i - 1$ действительных, различных корней, т. е. при изменении ν от $-\varepsilon$ до $+\infty$, $\nu\Delta_{2i-4}(\nu)$ меняет знак $i - 1$ раз. Выбирая ω_{n-i+1} столь большим, что хотя бы в одной точке каждого интервала, заключенного между корнями $\nu\Delta_{2i-4}(\nu) = 0$, знаки $\nu\Delta_{2i-4}(\nu)$ и $\Delta_{2i}(\nu)$ совпадали, из (2.4), (2.5) получим, что $\Delta_{2i}(\nu)$ правее точки $\nu = -\varepsilon$ имеет $i - 1$ перемену знака, следовательно, как непрерывная функция $\Delta_{2i}(\nu)$ правее точки $\nu = -\varepsilon$ имеет по крайней мере $i - 1$ действительных корней.

Из вышесказанного следует, что увеличением ω_{n-i+1} можно добиться того, чтобы $\Delta_{2i}(\nu)$ имел по крайней мере i действительных, различных корней. Но так как больше i, $\Delta_{2i}(\nu)$ не может иметь корней, то $\Delta_{2i}(\nu)$ имеет точно i действительных, различных корней. Корни $\Delta_{2i}(\nu)$ и $\Delta_{2i-2}(\nu)$ совпадать не могут, так как в противном случае или корни $\Delta_{2i-4}(\nu)$ и $\Delta_{2i-2}(\nu)$ совпадали бы, или $\nu = 0$ явился бы корнем $\Delta_{2i-2}(\nu)$.

Но оба случая невозможны, так как в первом случае, согласно индукции, $\Delta_{2i-2}(\nu)$ и $\Delta_{2i-4}(\nu)$ не имеют общих корней, а во втором $\lambda_n \ldots \lambda_{n-i+1} = 0$ $(i = 1, \ldots, p-1)$, которое также невозможно, согласно (1.2).

Таким образом, доказано, что можно подобрать числа $\omega_k, \ldots, \omega_{n-1}$ так, чтобы корни $\Delta_{2i}(\nu)$ были действительными, различными и не совпадали с корнями $\Delta_{2i-2}(\nu)$ $(i = 1, \ldots, p)$. Из условий (1.2) следует, что только λ_k может быть нулем, а при $\lambda_k = 0$ (из (2.3)) $\Delta_{2p}(\nu)$ имеет один нулевой корень независимо от $\omega_k, \ldots, \omega_{n-1}$. Предположим, что только $\nu_k^{(2p)}$ равняется нулю, когда $\lambda_k = 0$.

Так как корни $\Delta_{2p-2}(\nu)$ и $\Delta_{2p-4}(\nu)$ не совпадают, то из (2.3) следует, что единственный общий корень, который могут иметь $\Delta_{2p}(\nu) = 0$ и $\Delta_{2p-4}(\nu) = 0$ есть λ_k. Следовательно, в очень малых окрестностях остальных $p - 1$ корней уравнения $\Delta_{2p}(\nu) = 0$, производная

$$\frac{d\Delta_{2p}(\nu)}{d\omega_k^2} = \nu\Delta_{2p-4}(\nu) \neq 0$$

т. е. существуют монотонные функции $f_j(\omega_n^{(2)}) = \nu_j^{(2p)}$ ($j = 2, \ldots, p$), выражающие корни $\nu_j^{(2p)}$ через ω_k^2. Отсюда следует, что при малом изменении ω_k^2 можно добиться того, чтобы ни одно из чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$ не совпадало с корнями $\nu_2^{(2p)}, \ldots, \nu_p^{(2p)}$ уравнения $\Delta_{2p}(\nu) = 0$. Если λ_k является корнем $\Delta_{2p-4}(\nu)$, то $\nu_1^{(2p)} = \lambda_k$, который тоже не совпадает с числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$. Если же λ_k не является корнем уравнения $\Delta_{2p-4}(\nu) = 0$, то $\nu_1^{(2p)} \neq \lambda_k$, и при помощи изменения ω_k^2 можно добиться того, чтобы $\nu_1^{(2p)}$ тоже не совпадал с числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$.

Таким образом, при (1.2) можно числа $\omega_k, \ldots, \omega_{n-1}$ подобрать так, чтобы все корни уравнения $(\nu - \lambda_1) \ldots (\nu - \lambda_{k-1}) \Delta_{2p}(\nu) = 0$ были различными и действительными. Обозначим их через $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \nu_k, \ldots, \nu_n$, при этом $\nu_k = 0$, когда $\lambda_k = 0$. Таким образом, при подходящем выборе $\omega_k, \ldots, \omega_{n-1}$ уравнение (2.2) можно записать в виде

$$(\mu^2 - \lambda_1) \ldots (\mu^2 - \lambda_{k-1})(\mu^2 - \nu_k) \ldots (\mu^2 - \nu_n) = 0 \tag{2.6}$$

Следовательно ([5], стр. 127), при помощи неособого линейного преобразования (в поле действительных чисел) можно матрицу A привести к квазидиагональному виду, каждая диагональная клетка которой второго порядка и имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ \nu_i & 0 \end{Vmatrix} \tag{2.7}$$

Тогда систему (2.1) в матричной символике примет вид

$$z' = SAS^{-1}z + Sbu, \quad (|S| \neq 0) \qquad \left(SAS^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ldots 0 & 1 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 \ldots \lambda_{k-1} & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 & 1 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 \ldots 0 & 0 & \nu_k & 0 \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 1 \\ 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \ldots \nu_n & 0 \end{Vmatrix} = L\right) \tag{2.8}$$

Составим матричное уравнение $SA = LS$; оно равносильно системе уравнений:

$$\begin{aligned} &\lambda_j s_{2i-1,2j} = s_{2i,2j}, \quad s_{2i-1,2j-1} = s_{2i,2j} \\ &\lambda_j s_{2i,2j} = \lambda_i s_{2i-1,2j-1}, \quad s_{2i-1,2j-1} = \lambda_i s_{2i-1,2j} \end{aligned} \quad (i, j = 1, \ldots, k-1)$$

$$\begin{aligned} &\lambda_j s_{2i-1,2j} = s_{2i,2j}, \quad \omega_{j-1} s_{2i-1,2j-2} + s_{2i-1,2j-1} - s_{2i-1,2j+2}\omega_j = s_{2i,2j} \\ &\lambda_j s_{2i,2j} = \nu_i s_{2i-1,2j-1}\omega_{j-1}, \quad s_{2i,2j-2} + s_{2i,2j-1} - s_{2i\,2j+2}\omega_j = \nu_i s_{2i-1,2j} \end{aligned} \quad (i, j = k, \ldots, n) \tag{2.9}$$

Для определения S достаточно найти такое решение однородной системы (2.9), при котором определитель $|S| \neq 0$. Предположим, что

$$s_{ij} = \delta_{ij} \ (i, j = 1, \ldots, 2k-2, \ \delta_{ii} = 1, \ \delta_{ij} = 0, \ i \neq j)$$

$$s_{2i-1,2j-\frac{1}{2}[1+(-1)^{j-k+1}]} = 0, \quad s_{2i,2j-\frac{1}{2}[1-(-1)^{j-k+1}]} = 0 \ (i, j = k, \ldots, n) \tag{2.10}$$

При определении других элементов матрицы S рассмотрим два случая.

Первый случай. Пусть $p = n - k + 1$ — четное число; тогда можно удовлетворить системе (2.9), если выбрать остальные s_{ij} следующим образом:

$$s_{2i-1,2k+4j-5} = \lambda_{k+2j-2}\frac{\Delta_{2p-4j+2}(\nu_i)}{\omega_{n-1}\ldots\omega_{k+2j-2}}\nu_i^{j-2}, \qquad s_{2i-1,2k+4j-2} = \frac{\Delta_{2p-4j}(\nu_i)}{\omega_{n-1}\ldots\omega_{k+2j-1}}\nu_i^{j-1} \quad (2.11)$$

$$s_{2i,2k+4j-4} = \frac{\Delta_{2p-4j+2}(\nu_i)}{\omega_{n-1}\ldots\omega_{k+2j-2}}\nu_i^{j-1}, \qquad s_{2i,2k+4j-3} = \frac{\Delta_{2p-4j}(\nu_i)}{\omega_{n-1}\ldots\omega_{k+2j-1}}\lambda_{k+2j-1}\nu_i^{j-1}$$

$$(j = 1, \ldots, {}^1\!/_2 p = {}^1\!/_2[n-k+1], \quad i = k, \ldots, n)$$

При $\lambda_k = 0$, $\nu_k = 0$ определить $s_{2k-1,2k-1}$ из (2.11) невозможно, поэтому в этом случае для удовлетворения уравнений (2.9) достаточно взять

$$s_{2k-1,2k-1} = C\frac{(-1)^p\lambda_{k+2}\ldots\lambda_n(\omega_k^2 - \lambda_{k+1})}{\omega_k\ldots\omega_{n-1}}$$

Из (2.10) следует, что матрица S имеет вид

$$S = \left\| \begin{matrix} 1\ldots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\ldots 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ 0\ldots 0 & s_{2k-1,2k-1} & 0 & 0 & s_{2k-1,2k+2} & \ldots 0 & s_{2k-1,2n} \\ 0\ldots 0 & 0 & s_{2k,2k} & s_{2k,2k+1} & 0 & \ldots s_{2k,2n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\ldots 0 & s_{2n-1,2k-1} & 0 & 0 & s_{2n-1,2k+2} & \ldots 0 & s_{2n-1,2n} \\ 0\ldots 0 & 0 & 0 & s_{2n,2k} & s_{2n,2k+1} & \ldots s_{2n,2n-1} & 0 \end{matrix} \right\|$$

Отсюда следует, что

$$|S| = \begin{vmatrix} s_{2k-1,2k-1} & s_{2k-1,2k+2} & \ldots & s_{2k-1,2n} \\ s_{2k+1,2k-1} & s_{2k+1,2k+2} & \ldots & s_{2k+1,2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{2n-1,2k-1} & s_{2n-1,2k+2} & \ldots & s_{2n-1,2n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} s_{2k,2k} & s_{2k,2k+1} & \ldots & s_{2k,2n-1} \\ s_{2k+2,2k} & s_{2k+2,2k+1} & \ldots & s_{2k+2,2n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{2n,2k} & s_{2n,2k+1} & \ldots & s_{2n,2n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^\alpha\frac{\lambda_k\ldots\lambda_n\lambda_{k+1}\lambda^2{}_{k+2}\ldots\lambda_n^{p-1}}{\omega_k^2\omega_{k+1}^4\ldots\omega_{n-1}^{2(p-1)}\nu_k\ldots\nu_n}(\nu_{k+1}-\nu_k)^2\ldots(\nu_n-\nu_{n-1})^2 \quad (2.12)$$

при $\lambda_k \neq 0$, $\nu_k \neq 0$, а при $\lambda_k = \nu_k = 0$

$$|S| = c(-1)^\alpha\frac{\lambda_{k+1}\ldots\lambda_n\lambda_{k+2}\,\lambda_{k+3}^2\ldots\lambda_n^{p-2}}{\omega_k\omega_{k+1}^3\ldots\omega_{n-1}^{2p-3}}(\nu_{k+2}-\nu_{k+1})^2\ldots(\nu_n-\nu_{n-1})^2\nu_{k+1}\ldots\nu_n$$

Из (2.12) следует, что $|S| \neq 0$ при любых λ_i, удовлетворяющих условиям (1.5) (C для (2.12) всегда можно предположить отличным от нуля, так как достаточно предполагать $\omega_k^2 \neq \lambda_{k+1}$, а это всегда возможно).

Второй случай. Пусть $p = n - k + 1$ — нечетное число. Тогда одно из решений системы (2.9) при (2.10) будет

при $\lambda_k \neq 0$ $(\nu_k \neq 0)$ (2.13)

$$s_{2i-1,2k+4j-5} = \lambda_{k+2j-2}\frac{\Delta_{2p-4j+2}(\nu_i)}{\omega_{n-1}\ldots\omega_{k+2j-4}}\nu_i^{j-2} \qquad \left(j = 1, \ldots, \frac{p-1}{2}, \ i = k, \ldots, n\right)$$

$$s_{2i,2k+4j-4} = \frac{\Delta_{2p-4j+2}(\nu_i)}{\omega_{n-1}\dots\omega_{k+2j-2}}\nu_i^{j-1} \qquad \left(j=1,\dots,\frac{p+1}{2},\ i=k,\dots,n\right)$$

$$s_{2i-1,2k+4j-2} = \frac{\Delta_{2p-4j}(\nu_i)}{\omega_{n-1}\dots\omega_{k+2j-1}}\nu_i^{j-1} \qquad \left(j=1,\dots,\frac{p-1}{2},\ i=k,\dots,n\right)$$

$$s_{2i,2k+4j-3} = \lambda_{k+2j-1}\frac{\Delta_{2p-4j}(\nu_i)\nu_i^{j-1}}{\omega_{n-1}\dots\omega_{k+2j-1}} \qquad \left(j=1,\dots,\frac{p-1}{2},\ i=k,\dots,n\right)$$

при $\lambda_k = 0\ (\nu_k = 0)$

$$s_{2k-1,2k-1} = (-1)^p\frac{(\omega_k^2-\lambda_{k+1})\lambda_{k+2}\dots\lambda_n}{\omega_{n-1}\dots\omega_k} = c$$

Считая определитель $|S|$ точно так же, как для четного p, получим:

при $\lambda_k \neq 0\ (\nu_k \neq 0)$

$$|S| = (-1)^\alpha\frac{\lambda_k\dots\lambda_n\lambda_{k+1}\dots\lambda_n^{p-1}}{\omega_k^2\dots\omega_{n-1}^{2p-2}\nu_k\dots\nu_n}(\nu_{k+1}-\nu_k)^2\dots(\nu_n-\nu_{n-1})^2$$

при $\lambda_k = 0\ (\nu_k = 0)$

$$|S| = c(-1)^\alpha\frac{\lambda_{k+1}\dots\lambda_n\lambda_{k+1}\dots\lambda_n^{p-2}}{\omega_k\omega_{k+1}^3\dots\omega_{n-1}^{2p-3}}\nu_{k+1}\dots\nu_n(\nu_{k+2}-\nu_{k+1})^2\dots(\nu_n-\nu_{n-1})^2$$

В этом случае также $|S| \neq 0$ при условии (1.5).

Выясним же, вполне ли управляема система (2.1) управляющим воздействием u. Для этого выпишем $2n$-мерный вектор, столбец Sb. Из (1.4), (1.5) и (2.10) следует:

$$Sb = \{0, \alpha_1, \dots, 0, \alpha_k s_{2k2k}, \dots, 0, \alpha_k, s_{2n,2k}\} \tag{2.14}$$

Но так как матрица $L = SAS^{-1}$ согласно (2.8) имеет квазидиагональную структуру, точно такую же, какая рассматривалась в статье [3], а вектор Sb совпадает с вектором b, то условия вполне управляемости системы (2.7) будут

$$\alpha_i \neq 0, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad (i, j = 1, \dots, k-1), \qquad \alpha_k s_{2i2k} \neq 0 \quad (i = k, \dots, n)$$
$$\lambda_i \neq \nu_j \quad (i = 1, \dots, k-1, j = k, \dots, n), \qquad \nu_i \neq \nu_j \quad (i, j = k, \dots, n)$$

Но согласно условиям (1.5) и вышеприведенному доказательству условия (2.15) выполнены, т. е. система (2.7), а следовательно, и (2.1) вполне управляемы при подходящем выборе $\omega_k, \dots, \omega_{n-1}$.

Следует отметить, что гироскопические силы могут способствовать улучшению наблюдаемости системы, а именно, если не вполне наблюдаемую по координате $\xi = \Sigma\alpha_i x_{2i-1}$ систему (1.4) подвергнуть воздействию гироскопических сил, то при (1.5) можно подобрать эти силы так, чтобы система (1.4) при наличии этих сил стала вполне наблюдаемой по величине ξ. При $\lambda_\kappa \neq 0$ и (1.5) не вполне наблюдаемую по скорости $\xi' = (b^*x)$ систему (1.4) можно сделать вполне наблюдаемой, прилагая к системе вышеуказанным образом выбранные гироскопические силы.

Поступила 30 VIII 1965

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Габриелян М. С., Красовский Н. Н. К задаче о стабилизации механической системы. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения, изд. 2-е. М., Гостехиздат, 1955.
3. Габриелян М. С. О стабилизации неустойчивых движений механических систем. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
4. Калман Р. Е. Об общей теории системы управления. Кн. «Тр. 1-го Междунар. конгресса Междунар. федерации по автоматич. управлению 27 июня — 7 июля 1960 г., т. 2, М., Изд-во АН СССР, 1961, т. 2.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., Гостехиздат, 1953.