Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

К ЗАДАЧЕ О ПРЕСЛЕДОВАНИИ В СЛУЧАЕ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОТИПНЫХ ОБЪЕКТОВ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

В статье рассматривается задача [1] о минимаксе времени до встречи двух линейных управляемых объектов, описываемых одинаковыми уравнениями, и при условии, что ограничения на ресурсы управления допускают лишь непрерывные движения объектов.

§ 1. Рассмотрим задачу [1] о минимаксе времени T до встречи преследующего ($y(t)$) и преследуемого ($z(t)$) движений, описываемых соответственно уравнениями

$$dy / dt = Ay + Bu, \qquad dz / dt = Az + Bv \tag{1.1}$$

Здесь y, z — n-мерные векторы фазовых координат управляемых объектов, u, v — r-векторы управляющих сил, A, B — постоянные матрицы соответствующих измерений. Все рассматриваемые векторы будут трактоваться как векторы-столбцы. Верхний индекс * будет означать транспонирование. Предполагается в соответствии с [1], что ресурсы управлений $u(t)$ и $v(t)$, которые могут быть использованы при $t \geqslant \tau$ для каждого текущего момента τ, стеснены условием

$$\rho_\tau [u(t)] \leqslant \mu(\tau), \qquad \rho_\tau [v(t)] \leqslant \nu(\tau) \tag{1.2}$$

Примем, что величина $\rho_\tau [w(t)]$ при любом $\vartheta > \tau$ для функций $w(t)$, удовлетворяющих условию $w(t) = 0$ при $t > \vartheta$, может быть истолкована как норма $\rho_{\tau,\vartheta} [w(t)]$ линейного функционала $\varphi_w [h(t)]$, порожденного функцией $w(t)$ на подходящем нормированном пространстве $\{h(t)\}$ функций $h(t)$ $(\tau \leqslant t \leqslant \vartheta)$ (см., например, аналогичный случай в статье [2], стр. 6, 7). При этом ограничимся здесь лишь такими условиями вида (1.2), которые исключают разрывное изменение $y(t)$ и $z(t)$.

Указанному условию удовлетворяют, например, ограничения (1.2) вида

$$\|u(t)\| \leqslant \mu, \qquad \|v(t)\| \leqslant \nu \qquad (\mu > \nu = \text{const}) \tag{1.3}$$

или ограничения

$$\left[\int_\tau^\infty \|u(t)\|^2 dt\right]^{1/2} \leqslant \mu(\tau), \qquad \left[\int_\tau^\infty \|v(t)\|^2 dt\right]^{1/2} \leqslant \nu(\tau) \tag{1.4}$$

но не удовлетворяют ограничения импульсов

$$\int_\tau^\infty \|u(t)\| dt \leqslant \mu(\tau), \qquad \int_\tau^\infty \|v(t)\| dt \leqslant \nu(\tau) \tag{1.5}$$

так как ограничения (1.5) допускают управления $u(t)$ и $v(t)$, содержащие слагаемые в виде мгновенных δ-воздействий $\delta(t - t_*)$, вызывающих скачкообразное изменение фазовых векторов $y(t)$ и $z(t)$ (в (1.3) — (1.5) и ниже символ $\|w\|$ обозначает евклидову норму вектора w).

Предполагается, что изменение величин $\mu(\tau)$ и $\nu(\tau)$ с изменением времени τ определяется расходуемыми ресурсами. Например, если при $\tau \leqslant t < \vartheta$ реализовались управления $u_*(t)$ и $v_*(t)$, то в (1.4)

$$\Delta\mu^2 = \mu^2(\vartheta) - \mu^2(\tau) = -\int_\tau^\vartheta \|u_*(t)\|^2 dt, \qquad \Delta\nu^2 = \nu^2(\vartheta) - \nu^2(\tau) = -\int_\tau^\vartheta \|v_*(t)\|^2 dt$$

Будем рассматривать задачу [1] о минимаксе времени T до встречи движений $y(t)$, $z(t)$ при условии, когда достижение цели преследования означает совпадение в момент встречи $t = \tau + T$ всех координат $y_i(t)$ с $z_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Итак, имеем задачу о $\min_u \max_v T = \max_v \min_u T$ при условии $y(\tau + T) = z(\tau + T)$ и в предположении, что управления u и v в каждый момент $t = \tau$ формируются по принципу обратной связи по реализовавшимся значениям $y(\tau)$, $z(\tau)$, $\mu(\tau)$, $\nu(\tau)$, т. е. в виде функций $u[y(\tau), z(\tau), \mu(\tau), \nu(\tau)]$ и $v[y(\tau), z(\tau), \mu(\tau), \nu(\tau)]$.

Предположим, что системы (1.1) вполне управляемы [3].

Предположение о полной управляемости не ограничивает общности. Действительно, если системы не являются вполне управляемыми, то речь о встрече движений (1.1) вообще может идти лишь в том случае, когда разность $x(\tau) = y(\tau) - z(\tau)$ векторов $y(\tau)$ и $z(\tau)$ лежит в подпространстве X, порожденном векторами-столбцами матрицы $\{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\}$.

В противном случае никаким подбором управлений $u(t)$ и $v(t)$ $(t \geqslant \tau)$ осуществить встречу движений $y(t)$ и $z(t)$ в конечный момент времени $\vartheta > \tau$ нельзя. Справедливость этого утверждения следует из общих результатов теории управления линейными объектами (см., например, [2, 3]). В пространстве X системы (1.1) вполне управляемы. Из сказанного следует, что в случае отсутствия полной управляемости систем (1.1) в исходном n-мерном фазовом пространстве векторов y и z задача о встрече движений $y(t)$ и $z(t)$ может быть сведена к задаче о встрече этих движений в фазовом пространстве X меньшего измерения, где эти системы вполне управляемы.

§ 2. В общем случае решение конфликтной задачи о минимаксе времени до встречи двух движений (и даже сама постановка проблемы) наталкивается на серьезные трудности (см. [1, 4]). Однако для определенного круга задач в частном случае, описанном в § 1, можно сформулировать простое правило, определяющее рациональный способ выбора управлений u и v. Это правило имеет ясный интуитивный смысл и читается следующим образом.

Сопоставим задаче о преследовании движений (1.1) следующую задачу об оптимальном быстродействии [5,6]. Найти управление $w(t)$, стесненное условием

$$\rho_\tau [w(t)] \leqslant \zeta(\tau) \tag{2.1}$$

и переводящее систему

$$dx / dt = Ax + Bw \tag{2.2}$$

из положения $x = x(\tau)$ в положение $x(\tau + T) = 0$ за наименьшее возможное время $T = T^\circ$, т. е. требуется определить

$$T^\circ = \min \quad \text{при } x(\tau + T^\circ) = 0, \qquad \rho_{\tau,\, \tau+T^\circ} [w] \leqslant \zeta(\tau) \tag{2.3}$$

Если $T^\circ [x(\tau), \zeta(\tau)]$ и $w_\tau^\circ(t)$ — решение этой задачи, то для исходной задачи о преследовании принимаем $T = T^\circ [y(\tau) - z(\tau),$

$\mu(\tau) - \nu(\tau)] = \min_u \max_v T$, а оптимальные управления определяем равенствами

$$u^\circ[y(\tau), z(\tau), \mu(\tau), \nu(\tau)] = \frac{w_\tau{}^\circ(\tau)\,\mu(\tau)}{\mu(\tau)-\nu(\tau)}$$
$$v^\circ[y(\tau), z(\tau), \mu(\tau), \nu(\tau)] = \frac{w_\tau{}^\circ(\tau)\,\nu(\tau)}{\mu(\tau)-\nu(\tau)} \tag{2.4}$$

Здесь предполагается, что $\mu(\tau) > \nu(\tau)$, при реализовавшихся значениях $x(\tau) = y(\tau) - z(\tau)$, $\zeta(\tau) = \mu(\tau) - \nu(\tau)$ существует конечное решение $T^\circ[x(\tau), \zeta(\tau)]$ задачи о быстродействии (2.2), (2.3). В дальнейшем область

$$\zeta > 0, \qquad T^\circ[x, \zeta] < \infty \tag{2.5}$$

в пространстве $\{x, \zeta\}$, гда задача (2.2), (2.3) при $\zeta(\tau) = \zeta$, $x(\tau) = x$ имеет решение, будем обозначать символом G.

Поясним смысл сформулированного правила на примере задачи о преследовании при условиях (1.2) вида (1.3). При этом ограничимся самым простым случаем, когда $r = n$ и матрица B — неособая, т. е. случаем, когда размерности векторов y, z и u, v совпадают. Разность $x(t) = y(t) - z(t)$ удовлетворяет (2.2), где $w(t) = u(t) - v(t)$. Пусть в некоторый момент $t = \tau$ реализовалась величина $x(\tau) = y(\tau) - z(\tau)$ и значения $\zeta = \mu - \nu$, $x = x(\tau)$ лежат в области G (2.5). Здесь $\zeta = \text{const}$. Если при $t \geqslant \tau$ все время до встречи оба управления u и v будут выбираться в соответствии с равенством (2.4), т. е. если

$$u(t) = u^\circ(t) = \frac{w_t{}^\circ(t)\,\mu}{\mu - \nu}, \qquad v(t) = v^\circ(t) = \frac{w_t{}^\circ(t)\,\nu}{\mu - \nu} \tag{2.6}$$

то условия (1.3) будут выполнены и в уравнении (2.2) при $t \geqslant \tau$ имеем $w(t) = w_\tau{}^\circ(t)$. Следовательно, тогда по смыслу $w_\tau{}^\circ(t)$ равенство $x(t) = 0$, т. е. встреча движений $y(t)$ и $z(t)$ осуществится впервые при $t = \tau + T^\circ[x(\tau), \zeta]$.

Предположим теперь, что управление $v(t)$ при $t \geqslant \tau$ выбирается снова все время до встречи в соответствии с равенством (2.6), а управление $u(t)$ выбирается как-нибудь, но с учетом ограничения (1.3). Рассмотрим функцию $V[x] = T^\circ[x, \zeta]$. Эта функция определена для всех x и ζ из области G, определенно положительна в G, дифференцируема при $x \neq 0$ и для задачи (2.2), (2.3) играет роль оптимальной функции Ляпунова [6]. Последнее означает, что производная $(dV/dt)_w$ функции $V[x(t)]$ вдоль движений $x(t)$ системы (2.2) при управлении $w(t)$ удовлетворяет уравнению Беллмана [6, 7]

$$\min_w \left(\frac{dV}{dt}\right)_w = \left(\frac{dV}{dt}\right)_{w^*} = -1 \tag{2.7}$$

Так как

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_w = [\operatorname{grad} V]^* [Ax + Bw] \tag{2.8}$$

го из (1.3), (2.1) и (2.7) следует [6]

$$w_t{}^*(t) = -\frac{B^*[\operatorname{grad} V]\,\zeta}{\| B^*[\operatorname{grad} V] \|} \tag{2.9}$$

Если теперь вычислить производную $(dV / dt)_w$ при $w = u - v^\circ(t)$, то можно убедиться в справедливости неравенства

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{u-v^\circ} \geqslant -1 \tag{2.10}$$

Интегрируя это неравенство по времени при $t \geqslant \tau$, получим неравенство

$$V[x(t)] \geqslant V[x(\tau)] - (t - \tau) = T^\circ[x(\tau), \zeta] - (t - \tau) \tag{2.11}$$

правая часть которого положительна при $t < \tau + T^\circ$. Но это означает, что при выборе $v = v^\circ[x(t), \zeta]$ согласно (2.6), встреча движений $y(t)$ и $z(t)$, т. е. равенство $x(t) = 0$, не может осуществиться при $t < \tau + T^\circ$, ибо при $x = 0$ должно выполняться равенство $V[x] = 0$. (Здесь молчаливо предполагалось, что в процессе движения точка $x(t) = y(t) - z(t)$ не покидает области G.)

Если точка $x(t)$ на некоторые периоды времени покидает область G, воспользоваться правилом (2.4) в эти периоды нельзя. Если, однако, выбирать $v(t)$ в эти периоды времени произвольно ($\| v(t) \| \leqslant \nu$), то можно убедиться, что и в таком случае встреча $y(t)$ и $z(t)$ не осуществится при $t < \tau + T^\circ [x(\tau), \zeta]$, если только управление движением $z(t)$ в области G следует правилу (2.4).)

Напротив, если при $t \geqslant \tau$ полагать $u = u^\circ(t)$ (2.6), то получим неравенство

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{u^\circ - v} \leqslant -1 \tag{2.12}$$

из которого следует, что точка $x(t) = y(t) - z(t)$ до встречи не покидает область G.

Интегрирование (2.12) дает неравенство

$$V[x(t)] \leqslant V[x(\tau)] - (t - \tau) = T^\circ [x(\tau), \zeta] - (t - \tau) \tag{2.13}$$

Из неравенства (2.13) следует, что при $u = u^\circ(t)$ (2.6) встреча $y(t)$ и $z(t)$ осуществится не позже, чем при $t = \tau + T^\circ$, ибо при $x \neq 0$ имеем $V[x] > 0$.

Итак, действительно управление (2.4) в рассмотренном случае обеспечивает минимакс времени встречи. Этот минимакс совпадает здесь с максимином, и игра [8], соответствующая задаче о преследовании, имеет седловую точку $T^\circ = T_{u^\circ, v^\circ}$. Следовательно, применение сформулированного выше общего правила в данном случае является оправданным.

§ 3. В общем случае обоснование правила, данного в § 2, наталкивается на серьезные трудности. Более того, возможны такие ситуации, когда это правило либо оказывается неверным, либо вообще не может быть использовано по той причине, что при реализующихся значениях $\zeta(\tau) = \mu(\tau) - \nu(\tau)$ и $x(\tau) = y(\tau) - z(\tau)$ задача (2.2), (2.3) не имеет конечного решения $T^\circ [x(\tau), \zeta(\tau)]$. Однако это не уничтожает полезности сформулированного правила, так как в довольно широком классе случаев оно может служить указателем для выбора оптимального управления u° и v°.

Отметим две трудности, которые встречает обоснование сформулированного правила. Для этой цели обсудим, например, задачу о преследовании в случае многомерных объектов $y(t)$ и $z(t)$, управляемых скалярными воздействиями u и v, стесненными ограничениями (1.3). Доказательство по схеме, изложенной в § 2, в этом случае оказывается более трудным, чем в рассмотренном в § 2 случае $r = n$, так как функция $V[x] = T^\circ [x, \mu - \nu]$ здесь уже не будет гладкой. Вследствие негладкости функции $V[x]$ вывод и использование соотношений вида (2.10) —(2.13) требует дополнительного анализа (см. аналогичный случай при исследовании проблемы оптимального управления в работе [9]). Другим и еще более серьезным обстоятельством, затрудняющим исследование, является вопрос о классе тех управлений $u(t)$ и $v(t)$, которые могут реализоваться в системах (1.1) при условии, что один из партнеров придерживается правила (2.4), а другой отклоняется от этого правила. (Если оба партнера придерживаются правила (2.4), то класс функций $u^\circ(t)$ и $v^\circ(t)$ (2.6) определяется классом элементов $w(t)$ в функциональном пространстве $\{w(t)\}$ с нормой $\rho_{\tau, \tau+T^\circ}(w(t))$ (см. выше стр. 209).)

На примере (стр. 12), разобранном в работе [1], показано, что в процессе преследования по правилу $u = u^\circ(t)$ согласно (2.6) в случае ограничения (1.3) при $r < n$ (там $n = 2$, $r = 1$) возможно появление скользящего режима (там при $v(t) \equiv 0 \neq v^\circ(t)$). Следовательно, в таких случаях постановка задачи о преследовании по принципу обратной связи должна допускать реализации управляющих воздействий $u(t)$ и $v(t)$ более общей природы, чем класс элементов $w(t)$ пространства $\{w(t)\}$ с нормой $\rho_\tau [w]$.

Отмеченные обстоятельства, а также некоторые другие факты, которые рассматриваются ниже в § 6—8, обосновывают целесообразность исследования общего правила, сформулированного в § 2, для различных конкретных классов ограничений (1.2).

Цель настоящей статьи — обсудить правило (2.4) в случае ограничений (1.2) вида (1.4). Это обсуждение составляет материал следующих параграфов § 5 — § 9.

§ 4. Рассмотрим задачу о преследовании, сформулированную в § 1. Будем предполагать, что ресурсы управления стеснены условиями (1.4).

Это означает, что, начиная с любого момента времени $t = \tau$, в системах (1.1) могут реализоваться лишь управления $u(t)$ и $v(t)$, стесненные ограничениями (1.4), причем если при $\tau \leqslant t \leqslant \vartheta$ реализовались управления $u_*(t)$ и $v_*(t)$, то

$$\mu^2(\vartheta) = \mu^2(\tau) - \int_\tau^\vartheta \| u_*(t) \|^2 dt, \qquad \nu^2(\vartheta) = \nu^2(\tau) - \int_\tau^\vartheta \| v_*(t) \|^2 dt \tag{4.1}$$

Следовательно, если в некоторый момент t функции $u(t)$ и $v(t)$ непрерывны, то

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{\| u(t) \|^2}{2\mu}, \qquad \frac{d\nu}{dt} = -\frac{\| v(t) \|^2}{2\nu} \tag{4.2}$$

Уточним постановку задачи с точки зрения класса допустимых реализаций $u(t)$ и $v(t)$. Будем говорить, что управление

$$u = u\,[y(t), z(t), \mu(t), \nu(t)] \tag{4.3}$$

является допустимым, если, какова бы ни была непрерывная функция $v(t)$, удовлетворяющая (4.1), равенство (4.3) определяет непрерывную реализацию $u(t)$, удовлетворяющую (4.1), причем реализации $y(t)$, $z(t)$, $\mu(t)$ и $\nu(t)$ являются решениями дифференциальных уравнений (1.1), (4.2) (по крайней мере, до тех пор, пока величины $y(t)$, $z(t)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$ остаются в области определения функции (4.3)). Аналогичным образом определяется допустимое управление

$$v = v\,[y(\tau), z(\tau), \mu(\tau), \nu(\tau)] \tag{4.4}$$

Скажем, наконец, что допустимые управления (4.3) и (4.4) взаимно допустимы, если они порождают непрерывные реализации управлений $u(t)$ и $v(t)$, причем реализации $y(t)$, $z(t)$, $\mu(t)$ и $\nu(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1.1) (4.2) (в области определения функций (4.3), (4.4)). Будем говорить, что взаимно-допустимые управления (4.3), (4.4) замыкают систему (1.1) дифференциальной обратной связью. В дальнейшем обсудим исходную задачу (1.1), (1.4) о преследовании для управлений (4.3), (4.4), замыкающих систему (1.1) дифференциальной обратной связью.

§ 5. Покажем в этом параграфе, что в случае ограничения (1.4) правило (2.4) определяет допустимые управления u (4.3) и v (4.4), замыкающие систему (1.1) дифференциальной обратной связью. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 5.1. В окрестности каждой точки $x = x(\tau)$ и $\zeta = \zeta(\tau) > 0$, где задача (2.2), (2.3) имеет конечное решение $T^\circ[x, \zeta]$, величины $T^\circ[x, \zeta]$ и $w_\tau{}^\circ(t)$ непрерывны по x и ζ.

Доказательство. В работе [6] показано, что величина $T^\circ[x, \zeta]$ определяется из уравнения

$$\gamma(T) = \min_l \left[\int_0^T \| B^* F^{-1}(t)^* \, l \|^2 dt \right] = \frac{1}{\zeta^2} \quad \text{при } x^* l = -1 \tag{5.1}$$

Оптимальнсе управление $w_\tau{}^\circ(t)$ определяется равенством

$$w_\tau{}^\circ(t) = B^* F^{-1}(t)^* l^\circ \tag{5.2}$$

где l° — вектор, пропорциональный решению задачи (5.1). Вектор l° определяется из уравнения

$$\left[\int_0^T F^{-1}(t)\, BB^* F^{-1}(t)^*\, dt\right] l^\circ = -x \tag{5.3}$$

определитель которого

$$\Delta\left[\int_0^T F^{-1}(t)\, BB^* F^{-1}(t)^*\, dt\right]$$

при условии полной управляемости [3, 6] системы (2.2) отличен от нуля при всех $T > 0$.

Здесь $F^{-1}(t)$ — матрица, обратная к фундаментальной матрице $F(t)$ системы $dx / dt = Ax$. Функция $\gamma(T)$ в левой части (5.1) строго возрастает по T, так как подынтегральное выражение в (5.1) при $l \neq 0$ может обращаться в нуль лишь в отдельных изолированных точках t. Величина γ также непрерывна по x. Отсюда, на основании теоремы о неявной функции, заключаем, что уравнение (5.1) определяет функцию $T^\circ[x, \zeta]$, непрерывную по x и ζ. Это доказывает лемму.

Из леммы 5.1 следует, что функции u° и v°, определенные равенствами (2.4), непрерывны по $y(\tau)$, $z(\tau)$, $\mu(\tau)$ и $\nu(\tau)$ в открытой области G (2.5) пространства $x = y - z$, $\zeta = \mu - \nu$. Следовательно, при подстановке величин

$$u = u^\circ[y(t), z(t), \mu(t), \nu(t)] = \frac{w_t^\circ(t)\,\mu(t)}{\mu(t) - \nu(t)} \tag{5.4}$$

$$v = v^\circ[y(t), \ z(t), \ \mu(t), \ \nu(t)] = \frac{w_t^\circ(t)\,\nu(t)}{\mu(t) - \nu(t)} \tag{5.5}$$

в уравнения (1.1) получается полная система уравнений (1.1), (4.2), правые части которой непрерывны в области G. Поэтому система (1.1), (4.2), (5.4), (5.5) обладает в области G непрерывным решением $y(t)$, $z(t)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$, продолжимым до границ области. Аналогичное заключение справедливо и в тех случаях, когда лишь одно из управлений u или v определено равенством (5.4) или (5.5), а другое управление выбрано в виде явной непрерывной функции времени. Но это и означает, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1. Допустимые управления u° (5.4) и v° (5.5) в области G (2.5) замыкают систему (1.1), (4.2) дифференциальной обратной связью.

§ 6. Обсудим теперь вопрос о том, в какой мере управления u° (5.4) и v° (5.5) будут оптимальными в смысле исходной задачи (1.1), (1.4) о минимаксе времени до встречи.

Прежде всего, как и выше в § 2, можно проверить, что в случае, когда оба партнера все время при $t \geqslant \tau$ придерживаются правил (5.4) и (5.5), встреча движений $y(t)$ и $z(t)$ произойдет в момент $t = \tau + T^\circ[y(\tau) - z(\tau), \mu(\tau) - \nu(\tau)]$, т. е. время T до встречи будет в этом случае равно $T^\circ[x(\tau), \zeta(\tau)]$, каким бы ни было исходное положение $x(\tau) = y(\tau) - z(\tau)$ и $\zeta(\tau) = \mu(\tau) - \nu(\tau) > 0$, для которого задача о быстродействии (2.2), (2.3), имеет решение $T^\circ < \infty$.

Однако этот случай представляет мало интереса, так как в задачах о преследовании больший интерес представляет исследование случаев, когда тот или иной партнер отклоняется от стандартного поведения.

Предположим теперь, что управление u выбирается все время в виде функции (5.4), т. е. — в соответствии с правилом (2.4), а управление v

реализуется в виде какой-либо непрерывной функции $v(t)$, удовлетворяющей условиям (1.4), (4.1). Примем, что процесс рассматривается, начиная с некоторого момента $t = \tau$, и реализовавшиеся в этот момент величины $y(\tau)$, $z(\tau)$, $\mu(\tau)$, $\nu(\tau)$ таковы, что точка $x = x(\tau) = y(\tau) - z(\tau)$, $\zeta = \zeta(\tau) = \mu(\tau) - \nu(\tau)$ лежит в области G. Можно показать, что в этом случае встреча движений $y(t)$ и $z(t)$ обязательно произойдет и это осуществится не позже, чем в момент $t = \tau + T^\circ[x(\tau), \zeta(\tau)]$.

Рассмотрим изменение функции $V(t) = T^\circ[x(t), \zeta(t)]$ со временем. Как отмечено выше в § 5, в области G функция $T^\circ[x, \zeta]$ непрерывна, и, следовательно, вдоль непрерывных движений системы (1.1), (4.2) функция $V(t) = T^\circ[x(t), \zeta(t)]$ изменяется со временем непрерывно. Пусть в некоторый момент $t > \tau$, пока движения (1.1), (4.2) еще не вышли из области G, реализовались такие значения $x = x(t) = y(t) - z(t)$, $\zeta = \zeta(t) = \mu(t) - \nu(t)$, при которых задача

$$\gamma(T) = \min_l \left[\int_0^T \| B^* F^{-1}(\vartheta)^* l \|^2 d\vartheta\right] = \frac{1}{\zeta^2(t)} \quad \text{при } x^*(t)\, l = -1 \tag{6.1}$$

имеет решение $l = l_0(t)$, $T = T^\circ(t)$, удовлетворяющее условию

$$\|B^* F^{-1}(T)^* l_0(t)\| > 0 \tag{6.2}$$

Тогда в этой точке x, ζ, T функция $\gamma(T)$ имеет положительную производную $\partial\gamma / \partial T$, и по теореме о неявной функции заключаем, что функция $T^\circ[x, \zeta]$ в окрестности точки $x = x(t)$, $\zeta = \zeta(t)$ дифференцируема. Поэтому в точке $x(t)$, $\zeta(t)$ можно вычислить производную $(dV(t)/dt)_{u^\circ - v}$ в силу уравнений (1.1) и (4.2) при $u = u^\circ$ (5.4), $v = v(t)$. Получим

$$\left(\frac{dV(t)}{dt}\right)_{u^\circ - v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T^\circ}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{k=1}^r b_{ik}(u_k^\circ - v_k)\right] + \frac{\partial T^\circ}{\partial \zeta}\left[-\frac{\|u^\circ\|^2}{2\mu} + \frac{\|v\|^2}{2\nu}\right] \tag{6.3}$$

где a_{ij} и b_{ik} — элементы матриц A и B. В то же время функция $W(t) = T^\circ[x(t), \zeta(t)]$, вычисленная на движениях $x(t)$, $\zeta(t)$ системы (2.2) при $w = w(t)$, имеет в той же точке $x = x(t)$, $\zeta = \zeta(t)$ производную $(dW/dt)_w$, удовлетворяющую уравнению Беллмана

$$\min_w \left(\frac{dW}{dt}\right)_w = \left(\frac{dW}{dt}\right)_{w^\circ} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T^\circ}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{k=1}^r b_{ik}\overset{\circ}{w}_{t,k}(t)\right] +$$
$$+ \frac{\partial T^\circ}{\partial \zeta}\left(-\frac{\|w_t^\circ(t)\|^2}{2\zeta}\right) = -1 \tag{6.4}$$

так как для системы (2.2) функция $T^\circ[x, \zeta]$ является оптимальной функцией Ляпунова, а функция $w_t^\circ(t)$ — оптимальным управлением. Величина

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_w = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T^\circ}{\partial x_i}\left[\sum_{i=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{k=1}^r b_{ik}w_k\right] + \frac{\partial T^\circ}{\partial \zeta}\left(-\frac{\|w\|^2}{2\zeta}\right)$$

достигает минимума при $w = w_t^\circ(t)$. Поэтому выполняются равенства

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial T^\circ}{\partial x_i} b_{ik} - \frac{\partial T^\circ}{\partial \zeta}\frac{\overset{\circ}{w}_{t,k}(t)}{\zeta} = 0 \tag{6.5}$$

Подставляя в (6.3) значение u° (5.4), полагая $v = v^\circ + \delta v$, где v° определено равенством (5.5), учитывая (6.4) и (6.5), получим

$$\left(\frac{dV(t)}{dt}\right)_{u^\circ - v} = -1 + \frac{\partial T^\circ}{\partial \zeta}\frac{\|\delta v\|^2}{2\nu} \leqslant -1 \tag{6.6}$$

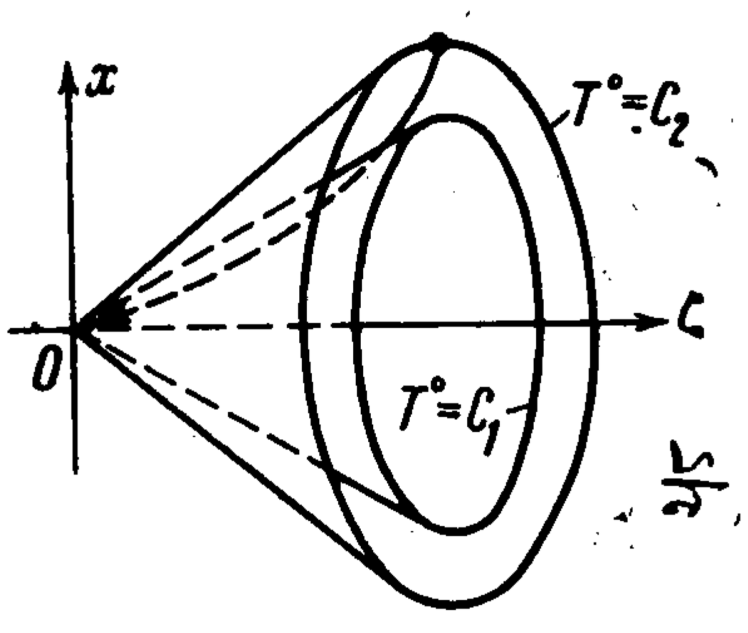
так как из (5.1) вследствие возрастания функции $\gamma(T)$ следует, что $\partial T^\circ / \partial \zeta < 0$. При этом, если $\delta v \not\equiv 0$, то в (6.6) выполняется строгое неравенство.

Итак, в рассматриваемой точке $x(t) = y(t) - z(t)$, $\zeta(t) = \mu(t) - \nu(t)$ выполняется неравенство (6.6).

Если реализуются значения $x(t)$ и $\zeta(t)$, при которых решение $l = l_0(t)$ и $T = T^\circ(t)$ задачи (6.1) не удовлетворяет условию (6.2), т. е. при которых выполнено равенство

$$\|B^* F^{-1}(T)^* l_0(t)\| = 0$$

то вычисление производной $(dV \,/\, dt)_{u-v}$ связано с затруднениями, так как здесь уже нельзя опереться на теорему о дифференцируемости неявной функции $T^\circ[x, \zeta]$. Для изучения поведения функции $V(t)$ в окрестности таких точек $x = x(t)$ и $\zeta = \zeta(t)$ сопоставим системе (2.2) некоторую вспомогательную систему



Фиг. 1

$$dx \,/\, dt = Ax + Bw + \varepsilon E s \tag{6.7}$$

с малым параметром $\varepsilon > 0$. Здесь E — единичная матрица и s — n-мерный вектор дополнительного управления. Задача о предельном быстродействии системы (6.7)

$$(x(\tau) \to x(\tau + T_\varepsilon^\circ) = 0, \; T_\varepsilon^\circ = \min)$$

при ограничении

$$\int_\tau^\infty \|\{w(t), \, s(t)\}\|^2 \, dt \leqslant \zeta^2(\tau) \tag{6.8}$$

имеет решение $T_\varepsilon^\circ[x(\tau), \zeta(\tau)]$, $\{w_\tau^{(\varepsilon)}(t), \, s_\tau^{(\varepsilon)}(t)\}$ при всех $x = x(\tau)$ и $\zeta = \zeta(\tau)$ из области G (2.5), где имеет решение задача (2.2), (2.3). Функция $T_\varepsilon^\circ[x, \zeta]$ дифференцируема в окрестности любой точки $x = x(\tau)$, $\zeta = \zeta(\tau)$, где задача (6.7), (6.8) имеет конечное решение $T_\varepsilon^\circ[x, \zeta] > 0$, т. е., во всяком случае, всюду в области G.

Кроме того, в замкнутой окрестности каждой точки x, ζ из G выполняются равномерно по всей такой окрестности следующие предельные соотношения:

$$\lim T_\varepsilon^\circ[x, \zeta] = T^\circ[x, \zeta], \qquad \lim w_\tau^{(\varepsilon)}(t) = w_\tau^\circ(t), \qquad \lim s_\tau^{(\varepsilon)}(t) = 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0 \tag{6.9}$$

Сравним изменение функций $V(t) = T^\circ[x(t), \zeta(t)]$ и $V_\varepsilon(t) = T_\varepsilon^\circ[x(t), \zeta(t)]$ вдоль движения системы (1.1), (1.4) на малых отрезках времени $\Delta t > 0$ при $w = u^\circ - [v^\circ + \delta v]$, $s = 0$. Функция $T_\varepsilon^\circ = V_\varepsilon$ удовлетворяет уравнению Беллмана

$$\min_{\{w, s\}} (dV_\varepsilon \,/\, dt) = (dV_\varepsilon \,/\, dt)_{\{w^\varepsilon, s^\varepsilon\}} = -1$$

в силу системы (6.7). Используя это уравнение, предельные соотношения (6.9) и оценивая производную $(dV_\varepsilon \,/\, d\vartheta)_{u^\circ - v, s=0}$ при $t \leqslant \vartheta \leqslant t + \Delta t$ подобно тому, как это сделано выше для функции V (см. (6.3) — (6.6)), получим неравенство

$$V(t + \Delta t) - V(t) \leqslant -\Delta t\,(1 + \varkappa\|\delta v\|^2 - O(\varepsilon)) \tag{6.10}$$

где $\varkappa > 0$ — const, символ $O(\varepsilon)$ означает величину, бесконечно малую при $\varepsilon \to 0$.

Из (6.10) следует, что при $u = u^\circ$ выполняется неравенство

$$\sup \left(\frac{dV}{dt}\right)^+_{u^\circ - v} \leqslant -1 \tag{6.11}$$

каково бы ни было управление $v(t)$. Здесь символ $\sup (dV/dt)^+_{u^\circ - v}$ означает правое верхнее производное число функции $V(t)$ в точке $x(t)$, $\zeta(t)$.

Итак, приходим к выводу, что при $u = u^\circ$ и любом выборе управления $v(t)$ (1.4) выполняется неравенство (6.11) при всех тех значениях $t \geqslant \tau$, при которых движение $x(t) = y(t) - z(t)$, $\zeta(t) = \mu(t) - \nu(t)$ системы (1.1), (4.2) еще остается в области G, определенной неравенствами

$$\mu(t) - \nu(t) > 0, \qquad \mu(t) > 0, \qquad \nu(t) > 0, \qquad T^\circ[x, \zeta] < \infty \tag{6.12}$$

причем функция $V(t) = T^\circ[x(t), \zeta(t)]$ изменяется при этом непрерывно с изменением t.

В области G (2.5) функция $T[x, \zeta]$ определенно положительна всюду, кроме оси $x = 0$. Поверхности уровня $T^\circ[x, \zeta] = \text{const} > 0$ в пространстве $\{x, \zeta\}$ являются конусами, сечения которых плоскостями $\zeta = \text{const} > 0$ будут эллипсоидами (фиг. 1)

Но в таком случае неравенства (6.6) и (6.11) означают, что движения системы (1.1), (4.2) при $u = u^\circ$ (5.4) в любой момент времени $t \geqslant \tau$, пока они остаются в области G, пересекают поверхности $T^\circ[x, \zeta] = \mathrm{const} = c$ в сторону убывания c, т. е. снаружи внутрь. Отсюда следует, что при $t \geqslant \tau$ движение $x(t) = y(t) - z(t)$, $\zeta(t) = \mu(t) - \nu(t)$ остается в области G до тех пор, пока $\| x \| > 0$. Следовательно, в силу (6.6) и (6.11) имеем неравенство

$$\tau + T^\circ[x(\tau), \zeta(\tau)] \geqslant t + T^\circ[x(t), \zeta(t)] \tag{6.13}$$

справедливое при всех $t \geqslant \tau$, пока $\| x(t) \| > 0$.

Так как при $\| x \| > 0$ имеем $T^\circ[x, \zeta] > 0$, то из (6.13) следует, что при $u = u^\circ$ (5.4) равенство $x(t) = 0$ или, иначе говоря, встреча движений $y(t)$ и $z(t)$, осуществится не позже, чем в момент $t = \tau + T^\circ[x(\tau), \zeta(\tau)]$.

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.1. Пусть точка $x(\tau) = y(\tau) - z(\tau)$, $\zeta(\tau) = \mu(\tau) - \nu(\tau)$ лежит в области G (2.5), и при $t \geqslant \tau$ управление $u = u(t)$ выбирается все время в соответствии с равенством (5.4), тогда, как бы ни выбиралось непрерывное управление $v = v(t)$, стесненное условиями (4.1), встреча движений $y(t)$ и $z(t)$ произойдет не позже, чем в момент

$$t = \tau + T^\circ[x(\tau), \zeta(\tau)]$$

Заметим, что в случае, если управление $v(t)$ будет на отрезке $\tau \leqslant t \leqslant \tau + T^\circ[x(\tau), \zeta(\tau)]$ отличаться от оптимального управления $v^\circ(t)$ (5.5) на множестве значений t положительной меры, то при $u = u^\circ(t)$ (5.4) встреча движений $y(t)$ и $z(t)$ произойдет строго раньше, чем при $t = \tau + T^\circ[x(\tau), \zeta(\tau)]$, так как в этом случае в (6.13) при значениях $t < \tau + T^\circ[x(\tau), \zeta(\tau)]$ будет получаться и сохраняться строгое неравенство вида $\tau + T^\circ[x(\tau), \zeta(\tau)] > t + T^\circ[x(t), \zeta(t)] + \varepsilon$.

Теорема 6.1 показывает, что управление u°, определенное равенством (5.4), действительно является в определенном смысле оптимальным для преследующего движения $y(t)$, (1.1). Именно, из этой теоремы и из того условия, что при любом управлении $u = u^*$ при выборе $v = u^*\nu / \mu$ встреча $y(t)$ и $z(t)$ произойдет не раньше, чем при $t = \tau + T^\circ$, замечаем, что $T^\circ = \min_u \max_v T = T_{u^\circ, v^\circ}$.

§ 7. Обсудим в этом параграфе ситуацию, которая возникает в случае, когда по правилу (2.4) управляется преследуемое движение $z(t)$ (1.1).

Итак, примем, что в момент $t = \tau$ реализовались значения $x(\tau) = y(\tau) - z(\tau)$, $\zeta(\tau) = \mu(\tau) - \nu(\tau)$, лежащие в области G (2.5), причем при $t \geqslant \tau$ управление v выбирается равным v° (5.5) все время, пока движение $x(t) = y(t) - z(t)$, $\zeta(t) = \mu(t) - \nu(t)$ остается в области G и пока не произошла встреча движений $y(t)$ и $z(t)$. В этом случае для любого такого момента времени справедливо неравенство

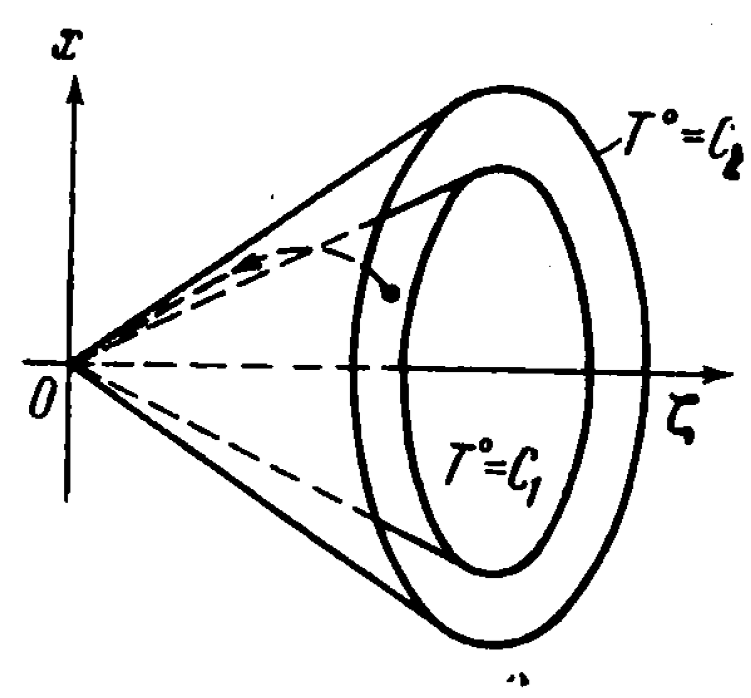
$$\inf \left(\frac{dT^\circ[x(t), \zeta(t)]}{dt} \right)^+_{u - v^\circ} \geqslant -1 \tag{7.1}$$

которое выводится путем, аналогичным тому, каким были выведены неравенства (6.6) и (6.11). В неравенстве (7.1) символ $\inf (dT^\circ / dt)^+_{u-v^\circ}$ означает нижнее правое производное число функции $V(t) = T^\circ[x(t), \zeta(t)]$, вычисленное вдоль движений системы (1.1), (4.2) при $v = v^\circ$ (5.5). Интегрируя неравенство (7.1) по времени для всех тех моментов t, для которых движение $x(t)$, $\zeta(t)$ (1.1), (4.2) остается еще в области G и $x(t) \neq 0$, получим неравенство

$$t - \tau \geqslant T^\circ[x(\tau), \ \zeta(\tau)] - T^\circ[x(t), \ \zeta(t)] \tag{7.2}$$

Однако дальнейшие рассуждения в этом параграфе в отличие от рассуждений в § 6, должны учитывать новые обстоятельства, которые осложняют здесь решение вопроса о результатах преследования. Дело в том, что в случае $u = u^\circ$ (5.4), рассмотренном в § 6, неравенства (6.6), (6.11) обеспечивают сохранение движения $x(t) = y(t) - z(t)$, $\zeta(t) = \mu(t) - \nu(t)$ в области G (2.5) вплоть до встречи движений $y(t)$ и $z(t)$.

Здесь же движение $x(t)$, $\zeta(t)$ при $v = v^\circ(t)$ и $u \neq u^\circ(t)$ может выйти на границу области G раньше, чем осуществится встреча $y(t)$ и $z(t)$.



Фиг. 2

В случае выхода движения $x(t)$, $\zeta(t)$ на границу G в некоторый момент $t = \vartheta$ должно необходимо выполняться одно из соотношений

$$\lim\,[\mu(t) - \nu(t)] = 0 \tag{7.3}$$

$$\lim T^\circ[x(t), \mu(t) - \nu(t)] = \infty \tag{7.4}$$

$$\lim \mu(t) = 0 \tag{7.5}$$

при $t \to \vartheta - 0$. Если осуществляются предельные соотношения (7.3) и (7.5), причем в момент $t = \vartheta$ имеем $x(\vartheta) \neq 0$, то в дальнейшем при $t > \vartheta$ оба движения $y(t)$ и $z(t)$ будут осуществляться как свободные, без воздействия управлений $u(t)$ и $v(t)$, ресурсы которых, в силу (7.3) и (7.5), будут исчерпаны к моменту $t = \vartheta$. Но в таком случае встреча движений $y(t)$ и $z(t)$ не осуществится вообще. Если в момент $t = \vartheta$ осуществляется лишь предельное соотношение (7.5) и $x(\vartheta) \neq 0$, то при $t > \vartheta$ всегда можно так распорядиться управлением $v(t)$, чтобы встреча $y(t)$ и $z(t)$ была неосуществима (для этого достаточно положить $v(t) \equiv 0$ при $t > \vartheta$).

Итак, способ управления $u = u(t)$, при котором в момент $t = \vartheta$ осуществляется (7.5), но еще не происходит встречи $y(t)$ и $z(t)$, является для преследующего объекта явно невыгодным, и в дальнейшем такие случаи рассматривать не будем.

В случаях, когда до встречи движений $y(t)$ и $z(t)$ осуществляются соотношения (7.3) или (7.4), но не осуществляется (7.5), возникает более неясная ситуация, где уже для управления движениями (1.1) нельзя воспользоваться правилом (2.4), так как при этом движение (1.1), (4.2) выходит из области G, в которой это правило имеет смысл.

Аналогичная ситуация возникает и в тех случаях, когда с самого начала процесса при $t = \tau$ реализуются величины $x(\tau) = y(\tau) - z(\tau)$, $\zeta(\tau) = \mu(\tau) - \nu(\tau)$, не лежащие в области G. Подробное обсуждение этой ситуации выходит за рамки статьи.

Будем предполагать, что движение $x(t) = y(t) - z(t)$, $\zeta(t) = \mu(t) - \nu(t)$ при всех $t \geqslant \tau$ до встречи точек $y(t)$ и $z(t)$ не выходит из области G. Однако даже и в этом случае из неравенств (7.1) и (7.2) нельзя сделать заключение, что встреча $y(t)$ и $z(t)$ произойдет не раньше, чем в момент $t = \tau + T^\circ[x(\tau), \ \zeta(\tau)]$. Следовательно, хотя здесь функции $T^\circ[x, \zeta]$, $u^\circ[x, \zeta]$ и $v^\circ[x, \zeta]$ в области G удовлетворяют уравнению Беллмана

$$\min_u \max_v \left(\frac{dT^\circ}{dt}\right)_{u,\,v} = \max_v \min_u \left(\frac{dT^\circ}{dt}\right)_{u,\,v} = \left(\frac{dT^\circ}{dt}\right)_{u^\circ,\,v^\circ} = -1 \tag{7.6}$$

однако даже в случае, если движения $x(t)$, $\zeta(t)$ не покидают эту область, величина T° и пара управлений u°, v° не имеют соответственно смысла $\max_v \min_u T$ и седловой точки $\{u^\circ, v^\circ\}$ для игры [8], отвечающей данной задаче о преследовании. Дело заключается в том, что при $x(t) \to 0$ величина $T^\circ[x(t), \zeta(t)]$ может не стремиться к нулю, если при этом $\zeta(t) \to 0$ (см. фиг. 2)

Такая ситуация возникает, например, в следующей простой задаче.

Пример 7.1. Рассмотрим системы (1.1), описываемые уравнениями первого порядка

$$dy / dt = u, \qquad dz / dt = v \tag{7.7}$$

где y, z, u, v — скаляры. В соответствии с (4.2) изменения величин

$$\mu^2(\tau) = \int_\tau^\infty u^2(t)\,dt, \qquad \nu^2(\tau) = \int_\tau^\infty v^2(t)\,dt$$

описываются уравнениями

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{u^2}{2\mu}, \qquad \frac{d\nu}{dt} = -\frac{v^2}{2\nu} \tag{7.8}$$

Система (2.2) сводится в данном случае к уравнению

$$dx / dt = w \qquad (x = y - z, w = u - v) \tag{7.9}$$

Пусть $\tau < 0$. Постараемся подобрать начальные условия $x(\tau) = y(\tau) - z(\tau)$ и $\zeta(\tau) = \mu(\tau) - \nu(\tau)$ и управление $u(t)$ $(\tau \leqslant t < 0)$ так, чтобы все время при $\tau \leqslant t < 0$ вдоль движения $x(t)$ (7.9), где $u = u(t)$, $v = v^\circ(t)$ (5.5), выполнялось условие

$$\{x(t), \zeta(t)\} \in G, \qquad T^\circ[x(t), \zeta(t)] = 1 \tag{7.10}$$

и чтобы встреча $y(t) = z(t)$ осуществилась при $t = 0$. Для выполнения условия (7.10) достаточно, согласно (5.1), чтобы выполнялось условие

$$\zeta(t) = \mu(t) - \nu(t) = x(t) > 0 \tag{7.11}$$

так как в данном случае в (5.1) имеем $F(t) = 1$. Управление $w_\tau^\circ(t)$, вычисленное тогда по формуле (5.2), будет

$$w_\tau^\circ(t) = -x(\tau) \tag{7.12}$$

и, следовательно, согласно (5.5), (7.11) и (7.12), имеем условие

$$v^\circ(t) = -\nu(t) \tag{7.13}$$

Из (7.8) и (7.13), выбирая $\nu(0) = 1$, получим

$$\nu(t) = e^{-1/2\,t} \tag{7.14}$$

Тогда из (7.9), (7.11), (7.13) и (7.14) следует, что должно быть

$$\mu(t) = e^{-1/2\,t} + x(t), \qquad u(t) = -e^{-1/2\,t} + dx / dt \tag{7.15}$$

Теперь функция $x(t)$ определяется из дифференциального уравнения, которое получается подстановкой (7.15) в первое уравнение (7.8); это уравнение имеет вид

$$dx/dt = -x(t) - \sqrt{x(t)e^{-1/2 t} + x^2(t)} \tag{7.16}$$

Уравнение (7.16) при условии $x(0) = 0$ можно разрешить в форме ряда

$$x(t) = {}^1/_4 t^2 + \varphi(t), \qquad \varphi(t) = \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + \ldots \tag{7.17}$$

причем для функции $\varphi(t)$ получается дифференциальное уравнение

$$d\varphi / dt = f[t, \varphi]$$

с голоморфной правой частью в окрестности точки $t = 0$, $x = 0$. Отсюда, согласно теореме Коши [10], следует сходимость ряда (7.17) при достаточно малых значениях t. Кроме того, при малых t функция $x(t)$ (7.17) положительна.

Итак, при достаточно малых значениях t $(\tau \leqslant t < 0)$ построено управление (7.15)

$$u(t) = -e^{-1/2\,t} + {}^1/_2 t + d\varphi / dt$$

такое, что хотя при всех $t \in [\tau, 0)$ управление $v = v^\circ[x(t), \zeta(t)]$ выбирается все время в соответствии с (2.4), т. е. в виде (5.5), причем $T^\circ[x(t), \zeta(t)] \equiv 1$ $(\tau \leqslant t < 0)$, т. е все время $(dT^\circ / dt)_{u-v^\circ} \equiv 0$, однако встреча движений $y(t)$ и $z(t)$ осуществляется в действительности при $t = 0$. Следовательно, в данном примере время до встречи T при $v = v^\circ$ оказывается меньше, чем $T^\circ[x(\tau), \zeta(\tau)]$.

Приведенный пример доказывает высказанное выше утверждение, что, вообще говоря, величина $T^\circ[x(\tau), \zeta(\tau)]$ не является максимином времени до встречи $y(t)$ и $z(t)$, а пара управлений u° (5.4) и v° (5.5) не является седловой точкой [9] соответствующей игры, даже если ограничиваться управлениями u и v, не выводящими движения (1.1), (4.2) из области G (2.5).

Именно, пример показывает возможность таких отклонений управления u от u°, при которых, хотя второе из движений (1.1) и будет все время при $t \geqslant \tau$ управляться по правилу (2.4), встреча произойдет раньше, чем в момент $t = T^\circ[y(\tau) - z(\tau), \mu(\tau) - \nu(\tau)] + \tau$. Это может случиться, однако, в области G лишь при условии, что $\zeta(t) = \mu(t) - \nu(t) \to 0$, но при этом $\lim T^\circ[x(t), \zeta(t)] \neq 0$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 7.1. Пусть в момент времена $t = \tau$ реализовались величины $x(\tau) = y(\tau) - z(\tau)$, $\zeta(\tau) = \mu(\tau) - \nu(\tau)$, лежащие в области G (2.5). Если в течение времени t

$$\tau \leqslant t < \vartheta < \tau + T^\circ[x(\tau), \zeta(\tau)] \tag{7.18}$$

движение $x(t) = y(t) - z(t)$, $\zeta(t) = \mu(t) - \nu(t)$ остается в области G, причем выполняется неравенство $\zeta(t) > \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ — const), и управление $v = v(t)$ при $t \geqslant \tau$ выбирается в соответствии с равенством (5.5), то в момент $t = \vartheta$ встреча движений $y(t)$ и $z(t)$ осуществиться не может.

Доказательство. Величины $T^\circ[x(t), \zeta(t)]$, $x(t)$ и $\zeta(t)$ меняются вдоль движений системы (1.1), (4.2) непрерывно. Следовательно, в момент $t = \vartheta$ при условиях теоремы выполняется неравенство $\zeta(\vartheta) \geqslant \varepsilon > 0$. Если, вопреки утверждению теоремы, принять, что $x(\vartheta) = 0$, то должно быть

$$\lim T^\circ[x(t), \zeta(t)] = 0 \quad \text{при } t \to \vartheta - 0 \tag{7.19}$$

так как при $\zeta(\vartheta) \geqslant \varepsilon$ величина $T^\circ[x, \zeta(\vartheta)]$ непрерывна и определенно положительна по x. Но соотношения (7.18), (7.19) и (7.2) оказываются противоречивыми, полученное противоречие доказывает теорему.

Примечание. Из доказательства теоремы 7.1 видно, что при $\vartheta < \tau + T^\circ[x(\tau)$ $\zeta(\tau)]$ не может выполняться условие $\lim T^\circ[x(t), \zeta(t)] = 0$ при $t \to \vartheta - 0$, если точка $x(t)$, $\zeta(t)$ не выходит из области G, и все время выполняется равенство $v = v^\circ(t)$.

§ 8. Теоремы 6.1 и 7.1 показывают, что выбор управления $v = v^\circ[x(t), \zeta(t)]$ (5.5) для второго движения (1.1) будет целесообразным в области G, во всяком случае, пока $\zeta(t) = \mu(t) - \nu(t) > \varepsilon$, где ε — какое-либо наперед выбранное положительное число.

В то же время пример 7.1 показывает, что при $\zeta(t) = \mu(t) - \nu(t) \to 0$, но $\lim T^\circ[x(t), \mu(t) - \nu(t)] \neq 0$ $(t \to \vartheta - 0)$, движение $z(t)$ может быть иногда настигнуто движением $y(t)$ раньше (при $t = \vartheta$), чем в момент $t = \tau + T^\circ[x(\tau), \zeta(\tau)]$, если это движение $z(t)$ и при $\zeta(t) < \varepsilon$ будет слепо управляться по правилу (2.4). Поэтому для движения $z(t)$, когда $\zeta(t) = \mu(t) - \nu(t) \to 0$ при $T^\circ[x(t), \zeta(t)] > \varepsilon > 0$ было бы полезным переводить это движение на другой закон управления, отличный от правила (5.5).

Построение такого оптимального способа управления, который описывался бы функцией $v = v[y(t), z(t), \mu(t), \nu(t)]$ и учитывал бы указанное обстоятельство, является новой сложной задачей, исследование которой выходит за рамки этой статьи.

Однако если допустить возможность дополнительной информации о реализующемся движении $y(t)$, то можно указать ряд простых и достаточно целесообразных способов управления движением $z(t)$. Один такой способ заключается в следующем.

Рассмотрим задачу о преследовании второго из движений (1.1) первым при условиях, которые облегчают задачу управления преследуемым движением $z(t)$. Предположим, как и в исходной постановке задачи, что в органе, вырабатывающем управление u, в каждый момент t, могут учитываться реализовавшиеся величины $y(t)$, $z(t)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$. Однако примем теперь, что в органе, вырабатывающем управление v, можно учитывать наряду с этими величинами, еще и величину $u(t-\eta)$, где $\eta > 0$ — малая постоянная величина. Иначе говоря, допустим возможность выбора управления $v(t)$ в форме

$$v = v\,[y(t),\ z(t),\ \mu(t),\ \nu(t),\ u(t-\eta)]$$

При этом допустим теперь для $u(t)$ и $v(t)$ кусочно-непрерывные реализации. В таком случае в ситуациях, отмеченных в этом параграфе, можно полагать

$$v(t) = u(t-\eta) \tag{8.1}$$

если запаздывание η — достаточно малая величина.

Управление $v(t)$ (8.1) обладает следующим свойством. Если в момент $t=\tau$ реализовались величины $x(\tau)$ и $\zeta(\tau)$ из области G (2.5), то при достаточно малом $\eta > 0$ управление $v(t)$ (8.1) обеспечивает встречу движений $y(t)$ и $z(t)$ не раньше, чем в момент $t > \tau + T^\circ\,[x(\tau),\ \zeta(\tau)] - \vartheta_*$, где ϑ_* — сколь угодно малое наперед выбранное положительное число. Если в начальный момент $t=\tau$ реализовались величины $x(\tau)$ и $\zeta(\tau)$ вне области G (2.5), то при достаточно малом $\eta > 0$ управление $v(t)$ (8.1) обеспечивает встречу движений $y(t)$ и $z(t)$ не раньше, чем в момент $t > \tau + \theta_*$, где θ_* – сколь угодно большое наперед выбранное положительное число. Подробное исследование указанных свойств управления $v(t)$ (8.1) здесь проводить не будем.

Учитывая теоремы 6.1. и 7.1. и свойства управления $v(t)$ (8.1), приходим к следующему правилу целесообразного выбора управления v. Зададимся малыми числами $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$. Если в момент t реализуются величины $x(t) = y(t) - z(t)$ и $\zeta(t) = \mu(t) - \nu(t)$, удовлетворяющие неравенствам

$$\zeta(t) > \varepsilon_1, \qquad T^\circ\,[x(t),\ \zeta(t)] < \infty \tag{8.2}$$

то управление v выбирается по правилу (5.5). Если в момент t одно из условий (8.2) нарушено, причем $T^\circ\,[x(t),\ \zeta(t)] > \varepsilon_2$, то управление v выбирается по правилу (8.1).

Для того чтобы при этом избежать появления скользящих режимов в случае частой смены управлений v (5.5) и (8.1) вдоль движения (1.1), (4.2), можно в смену управлений (5.5), (8.1) ввести малый гистерезис. Именно, от управления (5.5) к управлению (8.1) можно переходить при нарушении неравенств

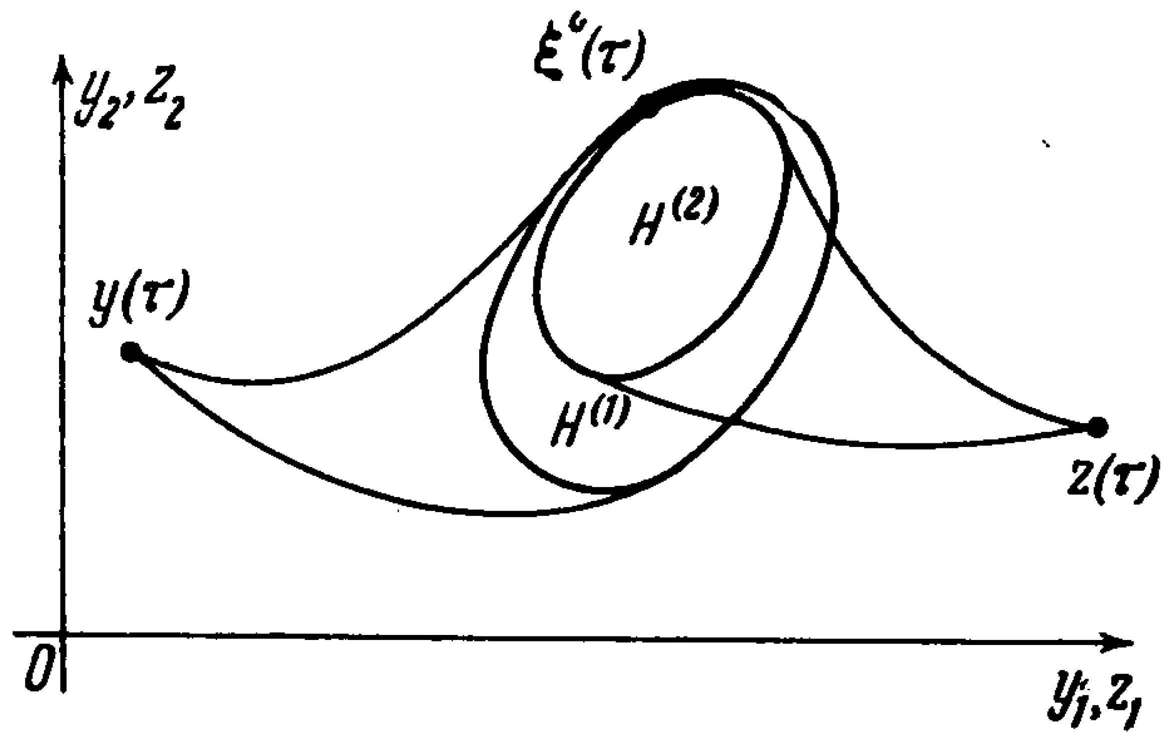
$$\zeta(t) > \varepsilon_1^{(1)}, \qquad T^\circ[x(t), \zeta(t)] < \infty \tag{8.3}$$

а от управления (8.1) к (5.5) переходить при осуществлении неравенств

$$\zeta(t) \geqslant \varepsilon_1^{(2)}, \qquad T^\circ[x(t), \zeta(t)] \leqslant \theta \tag{8.4}$$

где $\varepsilon_1^{(2)} > \varepsilon_1^{(1)} > 0$ и θ — достаточно большое число.

§ 9. В заключение статьи обсудим связь между правилом (2.4) выбора управлений $u = u^\circ$ (5.4) и $v = v^\circ$ (5.5) и правилом прицеливания, сформулированным в статье [1] и базирующимся на наведении движений $y(t)$ и $z(t)$ на ту точку $\xi^\circ(t)$, где касаются границы (см. фиг. 3) областей достижимости $H^{(1)}[y(t), \mu(t), t + T_0]$ и $H^{(2)}[z(t), \nu(t), t - T_0]$ процессов $y(t)$ и $z(t)$ в момент $t + T_0$ $[y(t), z(t), \mu(t), \nu(t)]$ поглощения процесса $z(t)$ процессом $y(t)$ (см. [1], стр. 7—9).



Фиг. 3

Для определенности рассмотрим здесь, как и выше в § 6—8, лишь случай ограничений (1.2) вида (1.4). Покажем, что упомянутые правила совпадают друг с другом.

Прежде всего заметим, что справедливо равенство

$$T^\circ[x(\tau), \zeta(\tau)] = T_0[y(\tau), z(\tau), \mu(\tau), \nu(\tau)] \tag{9.1}$$

причем обе величины имеют смысл при одних и тех же значениях

$$x(\tau) = y(\tau) - z(\tau), \quad \zeta(\tau) = \mu(t) - \nu(\tau)$$

Действительно, пусть при некоторых $x(\tau)$, $\zeta(\tau)$ величина $T^\circ[x(\tau), \zeta(\tau)]$ имеет смысл. Это означает, что существует управление $w_\tau^\circ(t)$, стесненное условием

$$\rho_{\tau, \tau+T^\circ}[w_\tau^\circ(t)] \leqslant \zeta(\tau) \tag{9.2}$$

и приводящее систему (2.2) в состояние $x(\tau + T^\circ) = 0$. Но в таком случае, каким бы ни было управление $v(t)$, стесненное условием

$$\rho_{\tau, \tau+T^\circ}[v(t)] = \left[\int_\tau^{\tau+T^\circ} \|v(t)\|^2 dt\right]^{1/2} \leqslant \nu(\tau) \tag{9.3}$$

управление

$$u(t) = v(t) + w_\tau^\circ(t) \tag{9.4}$$

будет удовлетворять условию

$$\rho_{\tau, \tau+T^\circ}[u(t)] = \left[\int_\tau^{\tau+T^\circ} \|u(t)\|^2 dt\right]^{1/2} \leqslant \nu(\tau) + \zeta(\tau) = \mu(\tau) \tag{9.5}$$

и обеспечит встречу движений $y(t)$ и $z(t)$ в момент времени $t = \tau + T^\circ$. А это и означает, что область достижимости $H^{(2)}[z(\tau), \nu(\tau), \tau + T^\circ]$ движения $z(t)$ лежит в области достижимости $H^{(1)}[y(\tau), \mu(\tau), \tau + T^\circ]$ движения $y(t)$. Следовательно, при этих значениях $x(\tau)$ и $\zeta(\tau)$ величина $T_0[y(\tau), z(\tau), \mu(\tau), \nu(\tau)]$ имеет смысл и справедливо неравенство

$$T_0[y(\tau), z(\tau), \mu(\tau), \nu(\tau)] \leqslant T^\circ[x(\tau), \zeta(\tau)] \tag{9.6}$$

Предположим теперь обратное, что при реализовавшихся значениях $y(\tau)$, $z(\tau)$, $\mu(\tau)$, $\nu(\tau)$ имеет смысл величина T_0. Рассмотрим задачу об управлении системой (2.2) из точки $x = x(\tau)$ в точку $x(\tau + T_0) = 0$ с наименьшей возможной нормой

$$\rho_{\tau,\tau+T_0}[w(t)] = \left[\int\limits_{\tau}^{\tau+T_0} \|w(t)\|^2 \, dt\right]^{1/2} = \zeta^\circ = \min \tag{9.7}$$

При условиях полной управляемости системы (2.2) эта задача имеет решение. Если в (9.7) оказывается

$$\zeta^\circ \leqslant \mu(\tau) - \nu(\tau) \tag{9.8}$$

то это означает, что $T^\circ \leqslant T_0$ и вследствие неравенства (9.6) утверждение об эквивалентности величин T_0 и T° будет доказано.

Предположим теперь, что в (9.7) оказалось

$$\zeta^\circ > \mu(\tau) - \nu(\tau) \tag{9.9}$$

Пусть $w_\tau(t)^\circ$ — оптимальное управление, разрешающее задачу об управлении $x = x(\tau)$, $x(\tau + T_0) = 0$ для системы (2.2) при условии (9.7). Тогда

$$x(\tau + T_0) = F(T_0)\,x(\tau) + \int\limits_{\tau}^{\tau+T_0} F(\tau + T^\circ - t)\,Bw_\tau(t)^\circ \, dt = 0 \tag{9.10}$$

или

$$-x(\tau) = \int\limits_{\tau}^{\tau+T_0} F(\tau - t)\,Bw_\tau(t)^\circ \, dt \tag{9.11}$$

Выберем управление $v_0(t) = w_\tau(t)^\circ \nu(\tau) / \zeta^\circ$; оно удовлетворяет условию

$$\left[\int\limits_{\tau}^{\tau+T_0} \|v_0(t)\|^2 \, dt\right]^{1/2} = \nu(\tau) \tag{9.12}$$

Следовательно, по смыслу величины T_0 должно найтись управление $u_0(t)$, которое удовлетворяет условию

$$\left[\int\limits_{\tau}^{\tau+T_0} \|u_0(t)\|^2 \, dt\right]^{1/2} \leqslant \mu(\tau) \tag{9.13}$$

и обеспечивает встречу движений $y(t)$ и $z(t)$ в момент $t = \tau + T_0$. Поэтому управления $u_0(t)$ и $v_0(t)$ должны удовлетворять равенству, аналогичному равенству (9.11)

$$-x(\tau) = \int\limits_{\tau}^{\tau+T_0} F(\tau - t)\,B\,[u_0(t) - v_0(t)]\, dt \tag{9.14}$$

Учитывая значение $v_0(t)$ и равенство (9.11), получим из (9.14) равенство

$$-\frac{\zeta^\circ + \nu(\tau)}{\zeta^\circ}\,x(\tau) = \int\limits_{\tau}^{\tau+T_0} F(\tau - t)\,Bu_0(t)\, dt \tag{9.15}$$

которое означает, что управление $w = u_0(t)$ решает задачу о переводе системы (2.2) из состояния $x = ([\zeta^\circ + \nu(\tau)] / \zeta^\circ)x(\tau)$ в момент $t = \tau$ в состояние $x(\tau + T_0) = 0$. Наименьшая норма $\rho^\circ_\tau[w]$ управления $w(t)$, которое решает такую задачу согласно (9.7) и (9.9), такова

$$\rho^\bullet_{\tau,\tau+T_0}[w] = \zeta^\circ\left(\frac{\zeta^\circ + \nu(\tau)}{\zeta^\circ}\right) = \zeta^\circ + \nu(\tau) > \mu(\tau) \tag{9.16}$$

Но неравенство (9.16) противоречит предположению, что $\rho_\tau[u_0] \leqslant \mu(\tau)$. Полученное противоречие исключает неравенство (9.9), а это, согласно предыдущему, доказывает эквивалентность величин T° и T_0.

Покажем теперь, что правило (2.4) для выбора управлений $u^\circ(\tau)$ и $v^\circ(\tau)$ как раз и означает прицеливание движений $y(t)$ и $z(t)$ в точку $\xi^\circ(\tau)$ к моменту времени $t = \tau + T^\circ = \tau + T_0$.

В самом деле, управление $u(t) = w_\tau^\circ(t)\mu(\tau) : (\mu(\tau) - \nu(\tau))$ к моменту времени $t = \tau + T^\circ$ приводит движение $y(t)$ на границу области $H^{(1)}[y(\tau), \mu(\tau), \tau + T^\circ]$, так как управление $w_\tau^\circ(t)$ является оптимальным для задачи (2.1) — (2.3).

Точно так же управление $v(t) = w_\tau^\circ(t)\nu(\tau) : (\mu(\tau) - \nu(\tau))$ к моменту времени $t = \tau + T^\circ$ приводит движение $z(t)$ на границу области $H^{(2)}[z(\tau), \nu(\tau), \tau + T^\circ]$.

Кроме того, эти управления осуществляют встречу движений $y(t)$ и $z(t)$ в момент $t = \tau + T^\circ$. Следовательно, действительно, управления

$$u = u^\circ = \frac{w_\tau^\circ(\tau)\mu(\tau)}{\mu(\tau) - \nu(\tau)}, \qquad v = v^\circ = \frac{w_\tau^\circ(\tau)\nu(\tau)}{\mu(\tau) - \nu(\tau)} \tag{9.17}$$

нацеливают движения $y(t)$ и $z(t)$ на ту единственную точку $\xi^\circ(\tau)$, где пересекаются границы областей $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$, являющихся подобными фигурами, размеры которых относятся как μ / ν. Это доказывает наше утверждение о совпадении правил (2.4) и правила прицеливания в точку $\xi^\circ(\tau)$ из работы [1]. Учитывая результаты, сформулированные в предыдущих параграфах, приходим теперь к следующему выводу.

Если при $t = \tau$ реализовались величины $y(\tau)$, $z(\tau)$ и $\mu(\tau) > \nu(\tau)$, для которых существует конечный момент $t = \tau + T_0$ поглощения процесса $z(t)$ (1.1) процессом $y(t)$ (1.1), и если при $t \geqslant \tau$ управление $u(t)$ выбирается все время из условия прицеливания движения $y(t)$ в точку $\xi^\circ(t)$, то в процессе преследования система все время до встречи будет замкнута дифференциальной обратной связью, и встреча произойдет не позже, чем в момент $t = \tau + T_0$.

Если при этом $v(t)$ также все время прицеливает движение $z(t)$ в точку $\xi^\circ(t)$, то встреча произойдет при $t = \tau + T_0[y(\tau), z(\tau), \mu(\tau), \nu(\tau)]$.

Если же, однако, управление $u(t)$ будет отклоняться от правила прицеливания в точку $\xi^\circ(t)$, то выбор управления $v(t)$ из условия прицеливания движения $z(t)$ все время при $t \geqslant \tau$ в точку $\xi^\circ(t)$ не обеспечивает время до встречи, не меньшее, чем $T_0[y(\tau), z(\tau), \mu(\tau), \nu(\tau)]$, даже если ограничиваться такими управлениями $u(t)$, при которых при $t \geqslant \tau$ будут сохраняться конечные значения $T_0[y(t), z(t), \mu(t), \nu(t)]$.

Однако комбинированное управление $v(t)$, которое при $T_0[y(t), z(t), \mu(t), \nu(t)] < \theta$ и $\mu(t) - \nu(t) > \varepsilon_1 > 0$ выбирается из условия прицеливания в точку $\xi^\circ(t)$, а при $T_0[y(t), z(t), \mu(t), v(t)] \geqslant \theta$ или при $\mu(t) - \nu(t) \leqslant \varepsilon_1$ и $T_0[y(t), z(t), \mu(t), v(t)] \geqslant \varepsilon_2$ выбирается равным $u(t - \eta)$ при достаточно малых $\eta > 0$, обеспечивает встречу не раньше, чем в момент $t = \tau + T_0[y(\tau), z(\tau), \mu(\tau), \nu(\tau)] - \vartheta_*$, где ϑ_* — сколь угодно малое наперед выбранное положительное число (см. стр. 221).

Опишем, наконец, вычислительную схему, по которой строятся управления u° или v°, определяемые правилом (2.4). Эта схема следует из правила [2], которое описывает построение оптимального управления $w^\circ_\tau(t)$, разрешающего задачу (2.2), (2.3) о предельном быстродействии. В соответствии с этим правилом следует выбрать функциональное пространство $\{h(t)\}_{[\tau,\vartheta]}$ $(\tau \leqslant t \leqslant \vartheta)$ с нормой $\varkappa_{\tau,\vartheta}[h(t)]$, для которого величина $\rho_{\tau,\vartheta}$ $[w(t)]$, ограничивающая ресурсы управления, имеет смысл нормы линейного функционала

$$\varphi_w[h] = \int_\tau^\vartheta w^*(t)\,h(t)\,dt \tag{9.18}$$

определенного на функциях $h(t)$. Затем следует решить задачу на условный минимум

$$\gamma(\vartheta - \tau) = \min \varkappa_{\tau,\vartheta}\left[\sum_{i=1}^n l_i h^{(i)}(t)\right] \quad \text{при } x^*(\tau)\,l = -1 \tag{9.19}$$

$$h_k^{(i)}(t) = \sum_{j=1}^n f_{ij}^{-1}(t-\tau)\,b_{jk} \qquad (\{f_{ij}^{-1}\} = F^{-1})$$

Число ϑ°, при котором

$$\gamma(\vartheta^\circ - \tau) = [\mu(\tau) - \nu(\tau)]^{-1} = \zeta(\tau)^{-1} \tag{9.20}$$

определяет величину $T^\circ[x(\tau),\ \zeta(\tau)] = \vartheta^\circ - \tau$.

Управление $w^\circ_\tau(t)$ определяется из условия максимума

$$\int_\tau^{\vartheta^\circ} w_\tau^\circ(t)^*\,h^\circ(t)\,dt = \max_w \quad \text{при } \rho_{\tau,\vartheta^\circ}[w(t)] = \zeta(\tau) \tag{9.21}$$

После определения $w^\circ_\tau(\tau)$ значения $u^\circ(\tau)$ и $v^\circ(\tau)$ вычисляются по формулам (2.4).

Таким образом, если тот или иной партнер придерживается правила (2.4), то процедура вычисления управления $u^\circ(t)$ (или $v^\circ(t)$) в текущие моменты времени $t \geqslant \tau$ сводится к непрерывной корректировке величины $\vartheta^\circ(t)$ и функции $w^\circ_t(t)$ в соответствии с уравнением (9.20) и соотношением (9.21).

Поступила 28 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н., Репин Ю. М., Третьяков В. Е. О некоторых игровых ситуациях в теории управляемых систем. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1965, № 4.
2. Красовский Н. Н. О стабилизации динамических систем дополнительными силами. Дифференциальные уравнения, 1965, т. 1, № 1.
3. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления. Тр. I Международн. конгресса ИФАК, т. 2, Изд-во АН СССР, 1961.
4. Понтрягин Л. С. О некоторых дифференциальных играх. Докл. АН СССР, 1964, т. 156, № 4.
5. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
6. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования ПММ, 1959, т. 23, вып. 4.
7. Беллман Р., Гликсберг О., Гросс Дж. Некоторые вопросы математической теории процессов управления. Изд. иностр. лит., 1962.
8. Мак Кинси Дж. Введение в теорию игр. Изд. иностр. лит., 1964.
9. Болтянский В. Г. Достаточные условия оптимальности и обоснование метода динамического программирования. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1964, т. 28, № 3.
10. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, изд. 2-е, Гостехиздат, 1950.