Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ

А. Л. Гольденвейзер

(Москва)

Излагается асимптотический метод интегрирования динамических уравнений классической линейной теории упругих тонких оболочек для задачи о свободных колебаниях. Он представляет собой динамический аналог асимптотического метода, разработанного для статической задачи [1].

При помощи предложенного метода анализируются асимптотические свойства частот и соответствующих напряженных состояний в зависимости от порядка малости безразмерной толщины оболочки и от густоты и конфигурации узловых линий; устанавливается классификация видов свободных колебаний и для каждого из них выводятся упрощенные уравнения для определения их в первом приближении; проводится качественный анализ спектра собственных частот оболочки.

Методы интегрирования полученных приближенных уравнений не рассматриваются. Обсуждаются только качественные особенности соответствующих краевых задач (в тех случаях, когда они не принадлежат к изученным задачам).

1. При исследовании свободных колебаний тонкой упругой оболочки будем исходить из уравнений и формул моментной теории.

Уравнения равновесия (1.1)

$$\frac{1}{A}\frac{\partial T_1}{\partial \alpha}+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}(T_1-T_2)+\frac{1}{B}\frac{\partial S}{\partial \beta}+\frac{2}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}S-\left(\frac{N_1}{R_1'}-\frac{N_2}{R_{12}}\right)+\lambda\xi=0 \quad (\alpha\beta)$$

$$\frac{T_1}{R_1'}+\frac{T_2}{R_2'}-\frac{2S}{R_{12}}+\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(BN_1)+\frac{\partial}{\partial \beta}(AN_2)\right]+\lambda\zeta=0 \tag{1.2}$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial G_1}{\partial \alpha}+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}(G_1-G_2)-\frac{1}{B}\frac{\partial H}{\partial \beta}-\frac{2}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}H-N_1=0 \quad (\alpha\beta)$$

Соотношения упругости

$$T_1=\frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_1+\sigma\varepsilon_2) \quad (\alpha\beta), \qquad S=\frac{Eh}{1+\sigma}\omega \tag{1.3}$$

$$G_1=-\frac{2Eh^3}{3(1-\sigma^2)}(\varkappa_1+\sigma\varkappa_2) \quad (\alpha\beta), \qquad H=\frac{2Eh^3}{3(1+\sigma)}\tau \tag{1.4}$$

Формулы деформации-смещения

$$2Eh\varepsilon_1=\frac{1}{A}\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\eta-\frac{\zeta}{R_1'} \quad (\alpha\beta)$$

$$2Eh\omega=\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{\xi}{A}+\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\eta}{B}+\frac{2\zeta}{R_{12}} \tag{1.5}$$

$$2Eh\varkappa_1=\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha}+\frac{\xi}{R_1'}-\frac{\eta}{R_{12}}\right)+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial \zeta}{\partial \beta}+\frac{\eta}{R_2'}-\frac{\xi}{R_{12}}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial \beta}(A\xi)-\frac{\partial}{\partial \alpha}(B\eta)\right] \quad (\alpha\beta) \tag{1.6}$$

$$2Eh\tau=\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial \zeta}{\partial \beta}+\frac{\eta}{R_2'}-\frac{\xi}{R_{12}}\right)-\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha}+\frac{\xi}{R_1'}-\frac{\eta}{R_{12}}\right)+$$
$$+\frac{1}{R_1'}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial \xi}{\partial \beta}-\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\eta+\frac{\zeta}{R_{12}}\right)-\frac{1}{R_{12}}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial \eta}{\partial \beta}+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\xi-\frac{\zeta}{R_2'}\right)$$

Здесь приняты обозначения монографии [1] и считается, что α и β — безразмерные параметры произвольной ортогональной системы координат. Символ ($\alpha\beta$) обозначает, что из равенства, перед которым он стоит, можно получить другое равенство взаимной заменой, α, 1, A, ξ на β, 2, B, η. Число λ и величины ξ, η, ζ определяются формулами

$$\lambda = \frac{m\omega^2}{2Eh}, \qquad \xi = 2Ehu, \qquad \eta = 2Ehv, \qquad \zeta = 2Ehw$$

где m — масса, приходящаяся на единицу площади срединной поверхности, а ω — частота колебаний (для краткости в дальнейшем ξ, η, ζ будем называть перемещениями).

Считается, что оболочка совершает гармонические колебания и что множитель $\sin \omega t$ при искомых величинах отброшен.

Принимается, что оболочка имеет два замкнутых края, которые совмещены (если нужно, с помощью предварительного преобразования ортогональных криволинейных координат) с линиями $\alpha = \alpha_1$, $\alpha = \alpha_2$. Один из этих контуров может стянуться в точку, тогда на нем вместо граничных условий должны выполняться условия непрерывности.

2. В зависимости от того, как располагаются β-линии, т. е. семейство кривых, содержащих края оболочки, будут различаться следующие случаи.

Случай I^a $\quad 1/R_2' \neq 0, \quad 1/R_{12} \neq 0$

Случай I^b $\quad 1/R_2' \neq 0, \quad 1/R_{12} = 0$

(β-линии не проходят вдоль асимптотических линий; в подслучае I^a — они не совпадают с линиями кривизны, а в подслучае I^b — совпадают.)

Случай II^a $\quad 1/R_2' = 0, \quad 1/R_{12} \neq 0, \quad 1/R_1' \neq 0$

Случай II^b $\quad 1/R_2' = 0, \quad 1/R_{12} \neq 0, \quad 1/R_1' = 0$

(β-линии проходят вдоль одного из двух семейств асимптотических линий; в подслучае II^a оно не ортогонально второму семейству, а в подслучае II^b — ортогонально.)

Случай III $\quad 1/R_2' = 0, \quad 1/R_{12} = 0, \quad 1/\mathrm{R}_1' \neq 0$

(β-линии проходят вдоль единственного семейства асимптотических линий.)

Случай I может иметь место для оболочек любой кривизны, случай II^a — только для оболочек отрицательной кривизны (подслучай II^a для неминимальных поверхностей, а подслучай II^b — для минимальных), а случай III — только для оболочек нулевой кривизны.

Выкладки проводятся для всех случаев одновременно; соответствующие формулы, когда это нужно, отмечаются соответствующей римской цифрой или римской цифрой с буквой.

3. В предлагаемой работе основное внимание уделяется колебаниям с достаточно большой изменяемостью напряженного и деформированного состояния, причем под изменяемостью понимается то же, что и в статике теории оболочек [1]. Задача решается в самом грубом приближении (возможность уточнений обсуждается в п. 9). В соответствии с этим при исследовании различных типов интегралов динамических уравнений теории оболочек в п.п. 4—8 в каждом отдельно взятом равенстве сохраняются

только главные (для интегралов рассматриваемого типа) члены. При оценках отдельных слагаемых принимается, что символы дифференцирования, стоящие при искомых величинах (перемещениях, усилиях, моментах), подчиняются соотношениям

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \sim h_*^{-p}, \qquad \frac{\partial}{\partial\beta} \sim h_*^{-q} \qquad \left(h_* = \frac{h}{R}\right) \tag{3.1}$$

Здесь $h_* = h / R$ — безразмерная полутолщина оболочки; R — характерный радиус кривизны срединной поверхности; p, q — показатели изменяемости в направлении α- и β-линий, соответственно.

Всюду принимается, что

$$0 < \max(p, q) < 1 \tag{3.2}$$

В этом соотношении левое неравенство обеспечивает применимость предлагаемого метода исследования, а правое обеспечивает применимость уравнений и формул (1.1) — (1.6).

Будем считать, кроме того, что

$$\lambda = \frac{m\omega^2}{2Eh} \sim h_*^{2r} \tag{3.3}$$

Здесь r — число, характеризующее асимптотический порядок частоты колебаний (ω убывает при возрастании r как h_*^{2r}).

4. Будем называть основными интегралами квазипоперечных колебаний такие решения динамических уравнений теории оболочек, для которых выполняется асимптотическое соотношение

$$\max(\xi, \eta) \gg \zeta \tag{4.1}$$

а перемещения ξ, η, ζ в первом приближении определяются уравнениями

$$\begin{gathered}
\frac{1}{A}\frac{\partial T_1}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}(T_1 - T_2) + \frac{1}{B}\frac{\partial S}{\partial\beta} + \frac{2}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}S = 0 \quad (\alpha\beta) \\
\frac{T_1}{R_1'} + \frac{T_2}{R_2'} - \frac{2S}{R_{12}} + \lambda\zeta = 0 \\
T_1 = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2) \quad (\alpha\beta), \quad S = \frac{Eh}{1+\sigma}\omega \\
2Eh\varepsilon_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\eta - \frac{\zeta}{R_1'} \quad (\alpha\beta) \\
2Eh\omega = \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\xi}{A} + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\eta}{B} + \frac{2\zeta}{R_{12}}
\end{gathered} \tag{4.2}$$

Это динамические уравнения безмоментной теории, в которых не учитываются тангенциальные силы инерции.

Таким образом, основные интегралы квазипоперечных колебаний представляют собой динамический аналог тех решений статических уравнений теории оболочек, которые были названы основными интегралами [1]. Аналогия проявляется и в том, что при интегрировании (4.2) в каждой точке края можно учитывать только по два граничных условия.

Асимптотические свойства основных интегралов квазипоперечных колебаний приведены в таблице.

	I^a	I^b	II^a	II^b	III
ξ	p	p	p	$2p-q$	p
η	p	$2p-q$	p	p	$2p-q$
T_1	$\frac{2p-2q}{p}$	$\frac{2p-2q}{p}$	$\frac{3p-3q}{2p-q}$	$\frac{3p-3q}{2p-q}$	$4p-4q$
T_2	0	0	$p-q$	$p-q$	$2p-2q$
S	$p-q$	$p-q$	$2p-2q$	$2p-2q$	$3p-3q$
$2Eh\varepsilon_1$	0	0	$p-q$	$p-q$	$2p-2q$
$2Eh\varepsilon_2$	0	0	$p-q$	$p-q$	$2p-2q$
$2Eh\omega$	$p-q$	$p-q$	$2p-2q$	$2p-2q$	$3p-3q$
λ	0	0	$2p-2q$	$2p-2q$	$4p-4q$
Область формальн. существов.	$p<1/2$, $\frac{q<1/2}{3q-p<1}$	$p<1/2$, $\frac{q<1/2}{4q-2p<1}$	$3p-q<1$, $q<1$	$3p-q<1$, $3q-p<1$	$4p-2q<1$, $q<1/2$

В таблице помещены показатели степени s в асимптотическом соотношении $A\sim h_*^{s}$, где под A подразумевается величина, указанная в первом столбце (для усилия T_1 из двух значений s, разделенных знаком дроби надо выбирать наименьшее). Использована свобода выбора масштабного фактора для рассматриваемой однородной задачи и принято (здесь и всюду в дальнейшем), что $\zeta\sim h_*^0$. Учтены формулы (3.1) и для определенности считается, что $p\geqslant q$. При проверке последнего столбца таблицы надо принимать во внимание, что $\partial B/\partial\alpha=0$ в случае III.

Таблица и формулы (3.1) позволяют получить асимптотическую оценку всех членов уравнений (4.2) и в каждом из них найти главные (соизмеримые наинизшей степени h_*) члены. Отбросив остальные слагаемые, можно построить систему, определяющую обсуждаемые интегралы в самом грубом приближении. Она должна быть свободна от явных несоответствий. А именно, вся система должна содержать столько неизвестных, сколько в ней уравнений, а в любой подсистеме число уравнений не должно превышать числа неизвестных. На этом требовании и базируется вывод асимптотических свойств основных интегралов квазипоперечных колебаний, сведенных в таблицу.

Не представляет труда установить также асимптотические свойства моментов и перерезывающих усилий. Эти величины с помощью (1.6), (1.4), (1.1) выражаются через ξ, η, ζ формулами, содержащими только прямые действия. Из них вытекает, что во всех случаях (п. 2)

$$G_1\sim G_2\sim h_*^{2-2p};\qquad H\sim h_*^{2-p-q};\qquad N_1\sim h_*^{2-3p},\qquad N_2\sim h_*^{2-2p-q}\qquad(4.3)$$

Пользуясь таблицей и соотношениями (3.1), (4.3), можно оценить все слагаемые исходных динамических уравнений (1.1) — (1.6) и найти неравенства, которым надо подчинить p, q, чтобы величины, отбрасываемые при переходе от (1.1) к (4.2), при достаточно малых h_* были меньше сохраняемых. Это дает левое неравенство (3.2) и два дополнительных неравенства, помещенные в последней строке таблицы (в этой строке предположение, что $p\geqslant q$ отброшено). Для подслучаев I^a, I^b возможны два варианта второго неравенства (они разделены чертой дроби) верхнее имеет силу, когда $1 / R_1' \neq 0$, а нижнее — когда $1 / R_1' = 0$. В дальнейшем будем говорить, что неравенства такого рода определяют область формального существования интегралов данного типа.

5. Основными интегралами квазитангенциальных колебаний назовем такие решения динамических уравнений теории оболочек, для которых выполняется асимптотическое соотношение

$$\max(\xi, \zeta) \gg \zeta \tag{5.1}$$

а тангенциальные смещения ξ, η и тангенциальные усилия T_1, T_2, S определяются уравнениями

$$\frac{1}{A}\frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}(T_1 - T_2) + \frac{1}{B}\frac{\partial S}{\partial \beta} + \frac{2}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}S + \lambda\xi = 0 \quad (\alpha\beta) \tag{5.2}$$

$$T_1 = \frac{1}{1-\sigma^2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\eta + \frac{\sigma}{B}\frac{\partial \eta}{\partial \beta} + \frac{\sigma}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\xi\right) \quad (\alpha\beta)$$

$$S = \frac{1}{2(1+\sigma)}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\eta}{B} + \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{\xi}{A}\right)$$

Нормальное смещение, моменты и перерезывающие усилия могут быть выражены через неизвестные, вошедшие в систему (5.2), с помощью прямых действий: ζ определяется из уравнения

$$\frac{T_1}{R_1'} + \frac{T_2}{R_2'} - \frac{2S}{R_{12}} + \lambda\zeta = 0 \tag{5.3}$$

а G_1, G_2, H, N_1, N_2 строятся так же, как описано в п. 4.

Асимптотические свойства основных интегралов квазитангенциальных колебаний при $p = q$, т. е. при одинаковых показателях изменяемости в направлении α- и β-линий, выражаются такими соотношениями

$$\begin{gathered} \xi \sim \eta \sim h_*^{-p}, \qquad \zeta \sim h_*^{\circ}, \qquad T_1 \sim T_2 \sim S \sim h_*^{-2p} \\ G_1 \sim G_2 \sim H \sim h_*^{2-2p}, \quad N_1 \sim N_2 \sim h_*^{3-3p}, \qquad \lambda \sim h_*^{-2p} \end{gathered} \tag{5.4}$$

При помощи (5.4) и (3.1) легко вывести неравенства для p, q, определяющие область формального существования (см. п. 4) основных интегралов квазитангенциальных колебаний. Эти неравенства полностью совпадают с (3.2), т. е. выполняются всегда, когда одновременно применимы и предлагаемый метод исследования и классическая теория оболочек.

Основные интегралы квазипоперечных колебаний не имеют аналога в асимптотической теории решения статических задач. Уравнения (5.2) представляют собой уравнения плоской задачи теории упругости (в искаженной метрике). При интегрировании этих уравнений также можно учитывать только по два граничных условия в каждой точке края.

6. Интегралами квазипоперечных колебаний с большой изменяемостью назовем решения уравнений колебаний теории оболочек, в которых нормальное смещение, моменты и перерезывающие усилия определяются уравнениями

$$\frac{1}{A}\frac{\partial N_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial N_2}{\partial \beta} + \lambda\zeta = 0, \qquad G_1 = -\frac{2Eh^3}{3(1-\sigma^2)}(\varkappa_1 + \sigma\varkappa_2) \quad (\alpha\beta) \tag{6.1}$$

$$2Eh\varkappa_1 = \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha^2} \quad (\alpha\beta) \qquad 2Eh\tau = \frac{1}{AB}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha \partial \beta}, \qquad H = \frac{2Eh^3}{3(1+\sigma)}\tau$$

т. е. уравнениями теории изгибных колебаний пластин (в п. 6 изучаются колебания с большой изменяемостью и поэтому A, B рассматриваются как константы).

В интегралах квазипоперечных колебаний с большой изменяемостью асимптотические свойства напряженного состояния остаются такими же, как и для основных интегралов квазипоперечных колебаний (п. 4), а для параметра λ во всех случаях (п. 2) имеет силу соотношение

$$\lambda \sim h^{2-4\gamma}, \qquad \gamma = \max(p, q) \tag{6.2}$$

Тангенциальные смещения ξ, η для интегралов рассматриваемого вида определяются в первом приближении уравнениями

$$\frac{1}{A}\frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \quad (\alpha\beta) \tag{6.3}$$

$$T_1 = \frac{1}{1-\sigma^2}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} - \frac{\zeta}{R_1'} + \nu\left(\frac{1}{B}\frac{\partial \eta}{\partial \beta} - \frac{\zeta}{R_2'}\right)\right] \qquad (\alpha\beta)$$

$$S = \frac{1}{2(1+\sigma)}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial \xi}{\partial \beta} + \frac{2\zeta}{R_{12}}\right)$$

В них величину ζ надо рассматривать как известную, и, следовательно, они представляют собой неоднородные уравнения статической плоской задачи теории упругости.

Интегралы квазипоперечных колебаний с большой изменяемостью могут существовать только тогда, когда нарушено по меньшей мере одно из неравенств последней строки таблицы. Это значит, что их область формального существования определяется так:

$$\max(p, q) > {}^1/_2 \quad (I) \quad \text{при} \quad 1/R_1' \neq 0 \tag{6.4}$$

$$\max(p, {}^3/_2 q - {}^1/_2 p) > {}^1/_2 \quad (I^a)$$

$$\max(p, 2q - p) > {}^1/_2 \quad (I^b) \qquad \text{при} \quad 1/R_1' = 0$$

$$\max({}^3/_2 p - {}^1/_2 q, q) > {}^1/_2 \quad (II^a), \qquad \max({}^3/_2 p - {}^1/_2 q, {}^3/_2 q - {}^1/_2 p) > {}^1/_2 \quad (II^b)$$

$$\max(2p - q;\ q) > {}^1/_2 \quad (III)$$

Аналогом обсуждаемых интегралов в статической задаче будут интегралы с большой изменяемостью, определяющие изгибное и тангенциальное напряженное состояние (монография [1], часть IV, § 15). Приближенные уравнения (6.1) и (6.3) в совокупности содержат достаточно произволов для того, чтобы можно было выполнить все четыре граничных условия в каждой точке краев оболочки.

7. Основные интегралы, введенные в пп. 4, 5, не содержат достаточно произволов для выполнения всех граничных условий теории оболочек, и вообще говоря, при решении краевых задач с помощью соответствующих приближенных уравнений будут возникать невязки в граничных условиях. Введем в связи с этим в рассмотрение дополнительные интегралы, которые позволят устранить такие невязки.

В предалагаемой статье предполагается, что граничные условия накладываются на линиях $\alpha = \text{const}$, а следовательно, на этих линиях и надо устранять упомянутые невязки. Учитывая эти требования, сформулируем свойства, определяющие дополнительный интеграл так: если p' и q — показатели изменяемости в направлении α- и β-линий, то должно выполняться неравенство

$$p' > q \geqslant 0 \tag{7.1}$$

и, кроме того, нормальное перемещение ζ должно в первом приближении определяться уравнениями

$$\frac{T_2}{R_2'} + \frac{1}{A}\frac{\partial N_1}{\partial\alpha} + \lambda\zeta = 0, \qquad T_2 = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_2 + \sigma\varepsilon_1), \qquad N_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial G_1}{\partial\alpha} \tag{7.2}$$

$$2Eh\varepsilon_2 = -\frac{\zeta}{R_2'} \quad (I), \qquad 2Eh\varepsilon_r = \frac{1}{B}\frac{\partial\eta}{\partial\beta} \quad (II), (III), \qquad 2Eh\varkappa_1 = \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha^2}$$

$$G_1 = -\frac{2Eh^3}{3(1-\sigma^2)}\varkappa_1, \qquad \varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2 = 0 \tag{7.3}$$

представляющими собой динамический аналог приближенных уравнений теории простого краевого эффекта [1].

Исключив из (7.2) все неизвестные, кроме ζ, получим уравнение

$$\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}\frac{1}{A^4}\frac{\partial^4\zeta}{\partial\alpha^4} + \left(\frac{1}{R_2'^2} - \lambda\right)\zeta = 0 \tag{7.4}$$

которое отличается от разрешающего уравнения теории статического простого краевого эффекта только динамическим слагаемым $\lambda\zeta$.

При составлении (7.4) учитывалось, что показатель изменяемости по α заведомо положителен, поэтому величины A, B, R_1', R_2' и R_{12} в уравнениях первого приближения можно рассматривать как постоянные (по α). В рамках такой же точности можно выразить остальные искомые величины через ζ

$$T_1 = \frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 c}{\partial\beta^2} \quad (p' < 2q), \qquad T_1 = \frac{1}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial c}{\partial\alpha} \quad (p' > 2q)$$

$$T_2 = \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2}, \qquad S = -\frac{1}{AB}\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha\partial\beta}$$

$$\xi = -\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)(1/R_2'^2 - \lambda)}\left(\frac{\nu}{R_2'} + \frac{1}{R_1'}\right)\frac{1}{A^3}\frac{\partial^3\zeta}{\partial\alpha^3} \quad (I, II^a, III)$$

$$\xi = \frac{h^2}{3(1-\sigma^2)\lambda}\frac{2\nu}{R_{12}}\frac{1}{A^2B}\frac{\partial^3\zeta}{\partial\alpha^2\partial\beta} \quad (II^b) \tag{7.5}$$

$$\eta = -\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)(1/R_2'^2 - \lambda)}\frac{2}{R_{12}}\frac{1}{A^3}\frac{\partial^3\zeta}{\partial\alpha^3} \quad (I, II)$$

$$\eta = -\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)\lambda}\frac{1}{R_1'}\frac{1}{A^2B}\frac{\partial^3\zeta}{\partial\alpha^2\partial\beta} \quad (III)$$

$$c = \frac{h^2}{3(1-\sigma^2)(1/R_2'^2 - \lambda)}\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha^2} \quad (I), \qquad c = -\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)\lambda}\frac{2}{R_{12}}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha\partial\beta} \quad (II)$$

$$c = -\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)\lambda}\frac{1}{R_1'}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\beta^2} \quad (III)$$

Эти формулы выводятся так же, как в статической теории простого краевого эффекта. Они имеют силу, если выполняются неравенства (7.1) и если $1 / R_2'^2 - \lambda$ не слишком мало.

8. Условимся говорить, что данный дополнительный интеграл соответствует данному основному интегралу, когда у них совпадают показатели изменяемости q и параметр λ имеет одинаковые значения.

Если дополнительный интеграл соответствует основному интегралу квазипоперечных колебаний, то он будет называться дополнительным интегралом квазипоперечных колебаний. В этом случае λ соизмеримо тем степеням h_*, которые указаны в таблице. Учтя это, можно из уравнения

(7.4) вывести такие формулы для показателя изменяемости p':

при $p \geqslant q$

$$p' = {}^1/_2 \quad (I); \quad p' = {}^1/_2 - {}^1/_2\,(p - q) \quad (II), \quad p' = {}^1/_2 - p + q \quad (III)$$

при $q \geqslant p$

$$p' = {}^1/_2 - {}^1/_2\,(q - p) \quad (II^0), \qquad p' = {}^1/_2 \quad (I,\ II^a,\ III)$$

Легко проверить, что всегда, когда выполняются неравенства, помещенные в последней строке таблицы, будут выполняться и неравенства (7.1). Это значит, что области формального существования основного интеграла квазипоперечных колебаний и соответствующего ему дополнительного интеграла совпадают.

Если дополнительный интеграл соответствует основному интегралу квазитангенциальных колебаний, то он будет называться дополнительным интегралом квазитангенциальных колебаний. В этом случае для λ имеется асимптотическая оценка (5.4), которая в более общем случае ($p \neq q$) принимает вид

$$\lambda \sim h_*^{-2\gamma}, \qquad \gamma = \max\,(p,\ q) \tag{8.1}$$

Отсюда с помощью (7.4) находим

$$p' = {}^1/_2 + {}^1/_2\gamma$$

Это значит, что левая часть соотношения (7.1) будет выполняться всегда. Следовательно, для любого основного интеграла квазитангенциальных колебаний может быть построен соответствующий ему дополнительный интеграл, если только кривая, на базе которой он строится, не имеет точек, где $\lambda - 1\ /\ R_2'$ мало.

Дополнительный интеграл квазипоперечных колебаний можно рассматривать как динамический аналог простого краевого эффекта статической задачи, но между ними существуют и принципиальные различия. Простой краевой эффект разрушается в точках, где выполняется чисто геометрическое равенство $R_2' = \infty$, а если он существует, то всегда, осциллируя, затухает. Дополнительный интеграл квазипоперечных колебаний разрушается в точках, свойства которых зависят от вида рассматриваемых колебаний, а если этот интеграл существует, то он может иметь и чисто осциллирующую часть (если $\lambda > 1\ /\ R_2'^2$).

Дополнительный интеграл квазитангенциальных колебаний в статической задаче аналога не имеет.

9. Для каждого из введенных в пп. 4—8 видов интегралов построены определяющие их приближенные уравнения и формулы. Это значит, что если исходные динамические уравнения теории оболочек записать в виде

$$L\,(R) = 0 \tag{9.1}$$

(L и R — соответственно, символы дифференциальных операторов и совокупности искомых переменных теории оболочек), то можно утверждать, что указаны способы (разные для интегралов разных видов) представить уравнение (9.1) следующим образом:

$$L\,(R) \equiv L'\,(R) + l\,(R) = 0 \tag{9.2}$$

где L' и l — главная и второстепенная части оператора L и принято, что R можно приближенно определить из уравнения

$$L'\,(R) = 0$$

Даны асимптотические оценки величин $L'(R)$ и $l(R)$ и выведены неравенства для p и q, при выполнении которых для достаточно малых h_* будет иметь место условное неравенство

$$|L'(R)| \gg |l(R)| \tag{9.3}$$

Оно обозначает, что в каждом отдельно взятом уравнении слагаемые, отнесенные к $L'(R)$, значительно превышают по модулю слагаемые, отнесенные к $l(R)$.

Динамические уравнения теории оболочек (9.1) можно решать методом последовательных приближений, положив

$$R = R_0 + R_1 + \ldots + R_s$$

и считая, что R_t удовлетворяют уравнениям

$$L'(R_0) = 0, \quad L'(R_t) = -l(R_{t-1}) \quad (0 < t < s), \quad L(R_s) = -l(R_{s-1})$$

Для того чтобы этот процесс имел асимптотический характер, необходимо (но, конечно, недостаточно), чтобы имело место (9.3). В связи с этим область значений p и q, в пределах которой выполняется (9.3), была названа областью формального существования данного интеграла.

Более обоснованное исследование условий существования интегралов, введенных в пп. 4—8, приведет, вероятно, к формулировке некоторых дополнительных требований, подобных тем, которые выявились при асимптотическом анализе статической задачи (например, требование, чтобы цилиндрическая оболочка не была слишком длинной, чтобы коническая оболочка не содержала вершины и т. д.).

10. В дальнейшем, не оговаривая этого специально, ограничимся случаями, когда краевые условия разделяются на тангенциальные и нетангенциальные (монография [1], часть II, § 3). Тогда, по аналогии со статической задачей, естественно предположить, что и в динамике возможно применение метода расчленения напряженного состояния. Первый вариант этого метода заключается в том, что решение в первом приближении ищется в виде суммы основного интеграла квазипоперечных колебаний, удовлетворяющего тангенциальным граничным условиям (и дающего, вообще говоря, невязку в нетангенциальных граничных условиях), и дополнительного интеграла квазипоперечных колебаний, снимающего эту невязку.

В таком приближенном решении будет иметь место «вторичная» невязка в тангенциальных граничных условиях. Ее можно устранить при построении следующего приближения основного интеграла квазипоперечных колебаний и т. д. Таким образом, итерационные процессы п. 9 можно строить так, чтобы в них были учтены и граничные условия.

Условия применимости метода расчленения сформулируем так:

10.1 приближенные уравнения (4.2) основных интегралов квазипоперечных колебаний должны иметь при определенных значениях λ не тривиальные решения, удовлетворяющие заданным тангенциальным граничным условиям;

10.2. должны существовать те интегралы динамических уравнений теории оболочек (1.1) — (1.6), приближенное значение которых определяется краевой задачей условия 10.1;

10.3 должны существовать дополнительные интегралы квазипоперечных колебаний, соответствующие решению краевой задачи 10.1;

10.4 должен сходиться итерационный процесс наложения граничных условий, описанный в начале этого раздела.

Вопрос о выполнении условия 10.1 будет обсуждаться в п. п. 11 и 12. Из условия 10.2 вытекает, что p, q должны удовлетворять неравенствам таблицы и, что, быть может, должны выполняться дополнительные условия (см. конец п. 9).

Неравенства таблицы необходимы и для выполнения условия 10.3. Кроме того, для этого необходимо, чтобы ни в одной точке краев не выполнялось равенство $\lambda = 1 / R_2''$.

Исследование условия 10.4 в строгой постановке столь же трудно, как и исследование существования основных и дополнительных интегралов. Оставаясь логически последовательным, естественно заменить это условие формальным требованием, чтобы «вторичные» невязки в тангенциальных граничных условиях безгранично уменьшались вместе с h_*. Тогда вопрос становится принципиально несложным. Здесь может быть использован метод, предложенный в [2], для аналогичной статической задачи. Вообще говоря условие 10.4 будет формально выполняться всегда, когда выполняются условия 10.1 — 10.3, однако возможны и исключения, связанные с особенностями теорем существования решения динамических краевых задач.

11. Обратимся к условию 10.1, т. е. рассмотрим краевую задачу, заключающуюся в интегрировании уравнений (4.2) с учетом тангенциальных граничных условий. Как и раньше, будут обсуждаться колебания с положительным показателем изменяемости. Поэтому в (4.2) можно сохранить только старшие производные от искомых величин, т. е. рассматривать A, B, R_1', R_2', R_{12} как константы. Это позволяет, прибегнув, например, к символическому методу, свести систему (4.2) к уравнению:

$$LL(\Phi) - \lambda NN(\Phi) = 0 \tag{11.1}$$

$$L = \frac{1}{A^2 R_2'}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{2}{AB}\frac{1}{R_{12}}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{1}{B^2}\frac{1}{R_1'}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}, \qquad N = \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$$

Здесь Φ — некоторая потенциальная функция, через производные которой выражаются все искомые величины.

Обсуждению подлежит вопрос о существовании нетривиальных решений краевой задачи для уравнения (11.1) при однородных линейных граничных условиях. Ее особенность заключается в том, что определению подлежат собственные значения множителя λ, который стоит перед NN-оператором такого же порядка, как и оператор LL, не содержащий λ. Такие задачи почти не освещены в литературе, а соответствующий им спектр обладает своеобразными свойствами, которые будут продемонстрированы на примерах.

Пример 11.1 Пусть (11.1) имеет вид

$$\left(\frac{1}{R^2} - \lambda\right)\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4} - 2\lambda\,\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2} - \lambda\,\frac{\partial^4\Phi}{\partial\beta^4} = 0 \qquad (R = \mathrm{const}) \tag{11.2}$$

(Задача о колебаниях круговой цилиндрической оболочки радиуса R.)

Если в левой части равенства (11.2) коэффициент при первом слагаемом будет отрицательным, то (11.2) можно рассматривать как однородное уравнение изгиба некоторой анизотропной пластинки. Отсюда вытекает, что при обычно применяемых граничных условиях оно не имеет нетривиальных решений. Следовательно, все собственные значения λ, если они существуют, должны размещаться на конечном отрезке $(0, R^{-2})$. Легко указать случай, когда спектр λ для уравнения (11.2) будет состоять из бесчисленного множества значений, для которых предельной точкой будет $\lambda = 1 / R^2$. Такой спектр получается при интегрировании (11.2) в прямоугольнике с граничными условиями, соответствующими шарнирному опиранию.

Для уравнения типа (11.1) возможен и всюду плотный спектр. Чтобы показать это, рассмотрим следующий пример

Пример 11.2. Пусть дано уравнение (a_1, a_2, b_1, b_2 — положительные константы)

$$a_1 \frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} + b_1 \frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2} - \lambda \left(a_2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} + b_2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2}\right) = 0 \tag{11.3}$$

которое надо интегрировать в прямоугольнике $(0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0;\ 0 \leqslant \beta \leqslant \beta_0)$ при граничном условии $\Phi = 0$.

Уравнение 11.3 можно привести к виду

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0 \qquad \left(\rho = \frac{b_1 - \lambda b_2}{a_1 - \lambda a_2},\ x = \alpha,\ y = \frac{\beta}{\sqrt{\rho}}\right)$$

При этом областью интегрирования будет прямоугольник

$$\left(0 \leqslant x \leqslant \alpha_0,\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\beta^0}{\sqrt{\rho}}\right)$$

Получилась однородная задача Дирихле для волнового уравнения, изучавшаяся в работах [3-6]. В прямоугольнике она имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда отношение его сторон выражается рациональным числом. Следовательно,

$$\rho = \frac{b_1 - \lambda b_2}{a_1 - \lambda a_2} = \frac{n^2\beta_0^2}{m^2\alpha_0^2} \qquad (n,\ m \text{ — целые числа})$$

Отсюда легко выводится формула для собственных значений λ, из которой следует, что они располагаются всюду плотно в интервале $(a_1 / a_2,\ b_1 / b_2)$.

Замечание. Из этого примера следует, что уравнение типа (11.1) может иметь и всюду плотный спектр. Однако это — чисто формальный результат, обозначающий лишь, что происходит некоторое сгущение частот, так как из всех собственных значений λ уравнений (11.1) надо сохранять только те, которые соответствуют показателям изменяемости, ограниченным неравенствами таблицы.

При $a_1 / a_2 = b_1 / b_2$ спектр задачи 11.2 стягивается в точку, а собственная функция Φ становится неопределенной. В задачах теории оболочек такой случай будет иметь место, когда в равенствах (11.1)

$$LL = \frac{1}{R^2} N \qquad (R = \text{константа})$$

т. е., когда срединная поверхность оболочки есть сфера. Обсуждая этот результат (единственность частоты и произвольность формы колебаний), надо учитывать, что уравнением (11.1) определяется только первое приближение решения. Предполагается существование некоторого итерационного процесса, и полученный формальный результат обозначает, что некоторое число частот сферической оболочки мало отличается друг от друга и что соответствующие им формы колебаний определяются не на исходном, а на последующих этапах.

12. Если исследованию подлежит колебание, для которого всюду в заданной области преобладает изменяемость по одной из координат, например, по β, то естественно поставить вопрос о возможности отбрасывать в уравнении (11.1) в первом приближении производные по α по сравнению с производными по β. Конечно, для этого необходимо, чтобы получающиеся уравнения первого приближения с тангенциальными граничными условиями имели нетривиальные решения с изменяемостью требуемого типа. Рассмотрим примеры.

Пример 12.1. Колебания круговой цилиндрической оболочки радиуса R (β) с преобладанием изменяемости по поперечной координате β. В этом случае уравнение (11.1) можно брать в виде

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4}-\lambda\frac{\partial^4\Phi}{\partial\beta^4}=0 \qquad (12.1)$$

Считая, что область интегрирования — прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, уравнение (12.1) можно решать методом разделения переменных. Положив

$$\Phi = X(\alpha)\,Y(\beta)$$

будем иметь

$$X^{IV}-kX=0, \qquad Y^{IV}-\frac{r}{R^2}Y=0, \qquad \lambda=\frac{k}{r} \qquad (12.2)$$

Отсюда следует, что существуют две последовательности собственных значений $k_1, k_2, \ldots, k_s, \ldots$ и $r_1, r_2, \ldots, r_t, \ldots$ для параметров k и r. Первая из них возрастает с возрастанием p — показателя изменяемости в направлении α-линий; вторая возрастает с возрастанием q — показателя изменяемости в направлении β-линий.

Из последнего равенства (12.2) видно, что λ неограниченно растет с ростом p и неограниченно убывает с ростом q. (Формально получается неограниченный спектр, но в действительности λ ограничено сверху и в рассматриваемом случае, так как должно быть соблюдено неравенство $p<q$.)

Пример 12.2. Колебания оболочки вращения с преобладанием изменяемости по продольной координате α; в этом случае упрощенное уравнение (11.1) имеет вид

$$\left(\frac{1}{R_2^2}-\lambda\right)\frac{1}{A^4}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4}=0 \qquad (12.3)$$

При $R_2=\mathrm{const}$, т. е. для круговой цилиндрической оболочки и для сферы, это уравнение имеет единственное собственное значение $\lambda=1/R_2^2$, а функция Φ остается неопределенной. Этот результат был уже получен для задачи о произвольных колебаниях сферической оболочки (п. 11). Теперь можно добавить, что такими же свойствами обладают колебания круговой цилиндрической оболочки, если в них преобладает изменяемость в продольном направлении.

Если $R_2=R_2(\alpha)$, то уравнение (12.3) имеет только тривиальные решения. Обсуждая этот результат, надо учитывать, что член с четвертой производной по α был сохранен при переходе от (11.1) к (12.3) как главное слагаемое левой части равенства (11.1). Это законно, только в случае, когда выражение $\lambda-1/R_2^2$ всюду в рассматриваемой области не слишком мало, что будет заведомо не так для значений λ, ограниченных неравенствами

$$\min\frac{1}{R_2^2}<\lambda<\max\frac{1}{R_2^2} \qquad (12.4)$$

Таким образом, полученный результат обозначает только, что колебания искомого типа (изменяемость по α всюду достаточно велика и всюду превосходит изменяемость по β) не могут происходить при частотах, выходящих за пределы интервала (12.4). Но если эти неравенства выполняются, то становится незаконным не только переход от (11.1) к (12.3), но и использование безмоментного уравнения (11.1).

К задачам рассмотренного типа принадлежит задача об осесимметричных колебаниях круговой конической оболочки, изученная в работе [7]. В ней применен метод асимптотического интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и обнаружено, что в интервал интегрирования попадает так называемая переходная точка, т. е. точка, в которой обращается в нуль коэффициент при старшей производной вырожденного (безмоментного) уравнения.

В более общих задачах о собственных значениях уравнений (11.1) могут появляться переходные линии. Это обозначает нарушение условия 10.1 применимости первого варианта метода расчленения (п. 10).

Пример 12.3. Колебания оболочки вращения с преобладанием изменяемости по поперечной координате β; в этом случае упрощенное уравнение (11.1) имеет вид

$$\left(\frac{1}{R_1^2}-\lambda\right)\frac{1}{B^4}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\beta^4}=0 \qquad (12.5)$$

Снова при $R_1 = \text{const}$ (для сферы) получается единственное собственное значение для λ, а при $R_1 = R_1(\alpha)$ собственные значения λ отсутствуют. В данном случае это происходит потому, что колебаний с требуемыми свойствами не существует.

13. В динамических задачах существует и второй вариант метода расчленения, не имеющий статического аналога. Он заключается в том, что решение в первом приближении составляется из основного интеграла квазитангенциальных колебаний, удовлетворяющего тангенциальным граничным условиям, и из соответствующего дополнительного интеграла квазитангенциальных колебаний, устраняющего невязки в нетангенциальных граничных условиях.

Условия реализации для второго варианта расчленения формулируются так же, как и для первого (п. 10), только основной и дополнительный интегралы квазипоперечных колебаний надо заменить основным и дополнительным интегралом квазитангенциальных колебаний. Вместе с тем, вопрос о том, когда будут выполняться эти условия, решается в случае квазитангенциальных колебаний значительно проще.

Краевая задача условия 10.1 идентична краевой задаче динамики плоской теории упругости. При обычно применяемых граничных условиях она при определенных значениях λ, имеет нетривиальное решение.

Область формального существования основных и дополнительных интегралов квазитангенциальных колебаний определяется неравенствами (3.2). Ее верхняя граница совпадает с границей применимости классической теории оболочек.

Из (3.2) и (8.1) вытекает, что

$$\lambda \gg \frac{1}{R_2'^2} \tag{13.1}$$

Поэтому не существует особых для дополнительных интегралов точек, где точно или приближенно выполняется равенство $\lambda = 1 / R_2'^2$.

Просто решается и вопрос о формальном выполнении условия 10.4. В основных интегралах квазитангенциальных колебаний тангенциальные факторы значительно больше соответствующих нетангенциальных факторов. Так, например, $\xi, \eta \gg \zeta$. Отсюда вытекает, что «первичная» невязка в нетангенциальных граничных условиях будет уже мала. В дополнительном интеграле квазитангенциальных колебаний, наоборот, доминируют нетангенциальные факторы. В частности ($\zeta \gg \xi, \eta$). Поэтому «вторичная» невязка в тангенциальных граничных условиях будет тем более мала. Однако, если говорить о выполнении условия 10.4 в более строгой постановке, то могут иметь место особые случаи, связанные с тем, что дополнительные интегралы квазитангенциальных колебаний заведомо имеют чисто осциллирующую часть, как это следует из (13.1) и (7.4).

14. Основные интегралы квазипоперечных колебаний с большой изменяемостью содержат достаточно произволов для того, чтобы можно было выполнить все четыре граничных условия краевых задач теории оболочек. В частности, если эти условия расчленяются на тангенциальные и нетангенциальные, то нетангенциальные граничные условия надо учитывать при интегрировании уравнений (6.1), а тангенциальные граничные условия — при интегрировании уравнений (6.3). Обе краевые задачи заведомо имеют решения. Первая из них представляет собой краевую задачу изгибных колебаний пластинки, вторая — неоднородную статическую краевую задачу плоской теории упругости.

15. Сформулируем выводы, вытекающие из изложенных результатов, всегда считая, что выполняются неравенства (3.2).

Свободные колебания можно подразделить на квазипоперечные и квазитангенциальные. Квазипоперечные колебания характеризуются тем, что для них выполняется соотношение $\zeta \gg \max(\xi, \eta)$. При их построении можно в первом приближении пренебрегать тангенциальными силами инерции. Для квазитангенциальных колебаний $\max(\xi, \eta) \gg \zeta$ и тангенциальными силами инерции пренебрегать нельзя.

Квазипоперечные колебания в свою очередь удобно классифицировать в зависимости от их изменяемости. Если p, q удовлетворяют обоим неравенствам, указанным для соответствующего случая в таблице, то будем называть изменяемость квазипоперечного колебания средней. Если хотя бы одно из этих неравенств нарушится, то назовем изменяемость квазипоперечного колебания большой.

При выполнении некоторых дополнительных условий (пп. 9—12) квазипоперечные колебания со средней изменяемостью можно исследовать с помощью первого варианта метода расчленения напряженного состояния (п.10). Собственные значения λ будут в этом случае определяться в первом приближении из краевой задачи, заключающейся в интегрировании динамических безмоментных уравнений (без учета тангенциальных сил инерции) с выполнением тангенциальных граничных условий.

Квазипоперечные колебания с большой изменяемостью строятся с помощью интегралов такого же названия. Собственные значения λ при этом находятся в первом приближении из краевой задачи, заключающейся в интегрировании уравнений изгибных колебаний пластинки, с учетом нетангенциальных граничных условий.

Возможны и промежуточные квазипоперечные колебания, для которых одно из неравенств таблицы обращается в равенство.

Такие колебания можно в первом приближении исследовать с помощью уравнений, являющихся динамическим аналогом уравнений для напряженных состояний с большой изменяемостью (они использованы в работе [8]).

Квазитангенциальные колебания при любых показателях изменяемости, не выходящих за рамки (3.2), могут быть построены с помощью второго варианта метода расчленения напряженного состояния (п. 13). При этом собственные значения λ определятся в первом приближении ценой интегрирования динамических уравнений плоской упругости с учетом тангенциальных граничных условий.

Замечание. В обоих вариантах метода расчленения дополнительные интегралы нужны только для уточнения напряженного и деформированного состояния и не влияют на значения первого приближения λ.

Асимптотические оценки собственных значений λ построены для всех видов колебаний. Для квазипоперечных колебаний со средней изменяемостью они приведены в таблице. Для квазипоперечных колебаний с большой изменяемостью и для квазитангенциальных колебаний они определяются формулами (6.2) и (5.4) соответственно.

Для всех этих видов колебаний, за исключением квазипоперечных колебаний со средней изменяемостью, имеет место обычная закономерность: возрастание частот с возрастанием изменяемости.

Квазипоперечные колебания со средней изменяемостью занимают особое место. Во-первых, для них с возрастанием значений показателя изменяемости напряженного состояния λ либо существенно не изменяется, либо даже уменьшается. Во-вторых для этих колебаний (и только для них) уравнения, определяющие первое приближение λ, зависят от кривизны поверхности. Вследствие этого оказывается важной не только густота узловых линий, но и их конфигурация (расположение относительно асимптотических линий).

Из оценок λ, приведенных в таблице, можно сделать вывод, относящийся к наименьшей частоте колебаний оболочки не положительной кривизны. В такой оболочке возможны колебания с преобладанием асимптотических узловых линий, т. е. с преобладанием изменяемости в направлении, перпендикулярном к асимптотическим линиям. В этом случае λ с возрастанием изменяемости будет сначала (пока выполняются неравенства таблицы) убывать, а затем (когда нарушится одно из этих неравенств) возрастать. Минимум λ будет достигнут в момент перехода от убывания к возрастанию, когда будут иметь место промежуточные квазипоперечные колебания. Этот результат был получен другим методом в работе [8].

При $p = q = 0$ колебания оболочки не разделяются на квазипоперечные и квазитангенциальные. При таких p, q к исследованию колебаний также можно применить метод расчленения, т. е. составлять решение из основного интеграла, определяемого в первом приближении динамическими безмоментными уравнениями, и дополнительного интеграла (п. 7). Однако в этом случае в безмоментных уравнениях надо учитывать все инерционные члены, что коренным образом меняет сущность соответствующей краевой задачи: она будет относительно λ уже не первой, а третьей степени. Вопрос о свойствах решения такой задачи требует особого рассмотрения.

Поступила 23 IX 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М. Гостехиздат, 1953.
2. Гольденвейзер А. Л. Некоторые математические проблемы линейной теории тонких оболочек. Успехи матем. наук, 1960, т. 15, вып. 5(95).
3. Соболев С. Л. Пример корректной краевой задачи для уравнения колебаний струны с данными на всей границе. Докл. АН СССР, 1956, т. 109, № 4.
4. John G. The Dirichlet problem for a hiperbolic equation. Amer. J. Math., 1941, vol. 63, No. 1.
5. Bourgin D. C., Duffin R. The Dirichlet problem for the vibrating string equation. Bull. Amer. Math. Soc., 1939, vol. 45, No. 12.
6. Соколов А. М. К вопросу об области применимости безмоментной теории к расчету оболочек отрицательной кривизны. Изв. АН СССР, отд. техн. н., 1955, № 5.
7. Алумяэ Н. А. О фундаментальной системе интегралов уравнения малых осесимметрических установившихся колебаний упругой конической оболочки вращения. Изв. АН Эст. ССР. Сер. техн. и физ.-матем. наук, 1960, т. 9, № 1.
8. Гольденвейзер А. Л. Асимптотические свойства собственных значений в задачах теории упругих тонких оболочек. ПММ, 1961, т. 25, № 4.