

## О РАЗВИТИИ ТРЕЩИН В СЖАТЫХ ТЕЛАХ

Г. П. Черепанов

(Москва)

Рассматривается распространение хрупких трещин в сжатом теле. В § 1 на идеализированном случае трещины со свободными берегами рассмотрены основные черты теории прочности хрупких тел на сжатие. В § 2 получено эффективное замкнутое решение плоской задачи теории упругости для «налегающих» трещин, расположенных вдоль одной прямой. Под «налегающей» трещиной понимается математический разрез, на котором задан скачок нормального смещения, нормального напряжения и касательного напряжения (в частности, нулевой), а силовое взаимодействие противоположных берегов разреза может быть совершенно произвольным и нелинейным (в линейном случае сухое кулоново трение со сцеплением). Полученное решение используется в § 3 для более точного рассмотрения вопроса о прочности хрупких тел на сжатие. Оказывается, прочность хрупких тел на сжатие полностью определяется наличием чисто сдвиговых трещин и некоторыми константами материала, характеризующими сопротивление материала на сдвиг (в основном, так называемым [1] сдвиговым модулем сцепления). В § 4 устанавливается закон автономности, согласно которому направление распространения произвольной «налегающей» трещины и характер разрушения полностью определяются свойствами материала в конце трещины; при этом угол, составляемый отходящей трещиной с продолжением «налегающей» трещины, принимает «квантованные» значения:  $0^\circ$  или  $75^\circ$ . В § 5 в качестве приложения рассмотрена теоретическая схема горного удара и сделаны некоторые выводы о наиболее безопасных формах выработок. Изложение современного состояния проблемы горного удара и степени качественной изученности этого явления можно найти в монографии С. Г. Авершина [2] и частично в книге В. В. Ходота [3]. В работе используются [основные представления и гипотезы теории трещин, развитые Г. И. Баренблаттом (см. обзор [4]). Следует отметить, что литература по трещинам в сжатом теле почти полностью отсутствует; можно указать лишь недавнюю работу [5], недостаточную по ряду соображений.

**§ 1. Упрощенная теория прочности хрупких тел на сжатие.** Согласно представлениям Гриффитса реальное хрупкое тело имеет множество дефектов — микротрещин, на которых аккумулируется поверхностная энергия, а разрушение тела при растяжении объясняется более выгодной энергетической возможностью перехода упругой энергии в поверхностную. По современным представлениям [4] трещина начинает развиваться, как только коэффициент концентрации напряжений достигнет некоторой постоянной величины, характеризующей прочность материала.

Рассмотрим вопрос о прочности хрупких тел на сжатие. Пусть прямолинейная трещина находится в поле сжимающих напряжений (главные напряжения на бесконечности равны  $N_1$  и  $N_2$ ). Берега трещины считаем пока свободными от напряжений; этот несколько искусственный случай можно представить себе так, что в начале трещина была некоторой полостью, и при сжатии ее берега не пришли в соприкосновение. Ограничиваемся для простоты случаем плоской деформации.

Используя решение Н. И. Мусхелишвили [6], вычислим напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ . Считаем, что трещина длины  $2l$  расположена вдоль оси  $x$  с центром в начале декартовых координат  $xy$ . Имеем

$$\begin{aligned}\sigma_y + \sigma_x &= \operatorname{Re} \frac{Az}{\sqrt{z^2 - l^2}} + (N_1 - N_2) \cos 2\alpha \quad (1.1) \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= \frac{\bar{A}l^2(z - \bar{z})}{4(z^2 - l^2)^{3/2}} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{Az}{\sqrt{z^2 - l^2}}, \quad z = x + iy \\ A &= N_1 + N_2 - (N_1 - N_2) e^{2i\alpha} \quad (N_1 < 0, N_2 < 0)\end{aligned}$$

Здесь  $\alpha$  — угол между осью  $x$  и направлением главного напряжения  $N_1$ .

В окрестности конца трещины на ее продолжении при  $z = l + \varepsilon$ , где  $\varepsilon \ll l$  напряжения (согласно (1.1)) ведут себя следующим образом

$$\begin{aligned}\sigma_y = \sigma_x &= \frac{1}{2} [N_1 + N_2 - (N_1 - N_2) \cos 2\alpha] \sqrt{\frac{l}{2\varepsilon}} \\ \tau_{xy} &= -\frac{1}{2} (N_2 - N_1) \sin 2\alpha \sqrt{\frac{l}{2\varepsilon}} \quad (1.2)\end{aligned}$$

Введем следующую основную гипотезу А. Трещина в условиях сжатия всегда будет трещиной поперечного сдвига (простоты ради будем называть ее трещиной сдвига или сдвиговой трещиной). При этом начало распространения трещины, когда она становится подвижно-равновесной, будет определяться коэффициентом концентрации одних касательных напряжений  $\tau_{xy}$ , тем более что напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  являются сжимающими.

В случае трещины поперечного сдвига критическая нагрузка, вызывающая распространение трещины вдоль прямой согласно (1.2), определяется условием [1]

$$\pi \sqrt{l} (N_2 - N_1) \sin 2\alpha = 2\sqrt{2L} \quad (1.3)$$

Здесь  $L$  — сдвиговой модуль сцепления [1], аналогичный модулю сцепления  $K$  для трещин нормального разрыва [4];  $L$  является константой и характеризует сопротивление материала поперечному сдвигу.

Для сравнения рассмотрим также случай поля растягивающих напряжений  $N_1$  и  $N_2$ . Если предположить, что трещина при этом будет отрывной или, — в нашей терминологии, — трещиной нормального разрыва, распространяющейся вдоль прямой линии, то критическая нагрузка согласно (1.2) и условию Беренблатта может быть найдена из уравнения

$$\pi \sqrt{l} [N_1 + N_2 - (N_1 - N_2) \cos 2\alpha] = 2\sqrt{2K} \quad (N_1 > 0, N_2 > 0) \quad (1.4)$$

Из рассмотрения формул (1.3) и (1.4) можно сделать следующие простые выводы, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными [7]. Из формулы (1.3), в частности, следует, что в реальном хрупком теле с большим числом начальных хаотично ориентированных микротрещин наиболее опасными трещинами поперечного сдвига будут те микротрещины, которые расположены под углом  $45^\circ$  к площадкам главных напряжений  $N_1$  и  $N_2$ . Наиболее опасными трещинами нормального разрыва согласно (1.4) будут микротрещины, расположенные параллельно площадке, на которой действует наибольшее растягивающее напряжение. Отсюда следует, что, по крайней мере, в начале разрушения, если разрушение будет происходить из-за трещин поперечного сдвига, площадка разрушения будет составлять угол  $45^\circ$  с направлениями главных напряжений; если же разрушение будет происходить вслед-

ствие трещин нормального разрыва, то площадка разрушения будет совпадать с площадкой наибольшего главного растягивающего напряжения. Далее из рассмотрения формулы (1.3) следует, что разрушение при сжатии аналогично отрывному носит неустойчивый, внезапный характер, так как трещина вначале не развивается, а затем, по достижении критического значения концентрации касательных напряжений, становится неустойчивой.

Введем понятие изотропного хрупкого тела. Будем считать, что в содержание этого понятия входит также независимость величины прочности тела от направления растяжения или сжатия. Очевидно, это равносильно предположению о том, что наиболее опасные микротрещины сдвига и отрыва всегда имеются в макротеле при сжатии или растяжении его в любом направлении. Соответствующие обобщения на случай анизотропии не вызывают существенных затруднений.

В случае одноосного сжатия или растяжения тел с наиболее опасными трещинами формулы (1.3) и (1.4), соответственно, примут вид

$$\sigma_+ = \frac{2\sqrt{2}L}{\pi\sqrt{l}}, \quad \sigma_- = \frac{\sqrt{2}K}{\pi\sqrt{l}} \quad (1.5)$$

Здесь  $\sigma_+$  и  $\sigma_-$  — абсолютное значение прочности изотропного хрупкого тела на сжатие и растяжение, соответственно. Из формулы (1.5) получаем соотношение

$$2\frac{\sigma_-}{\sigma_+} = \frac{K}{L} \quad (1.6)$$

Отсюда следует, что для материалов, у которых прочность на сжатие гораздо больше прочности на растяжение, трещина в условиях растяжения, как правило, является трещиной нормального разрыва.

Тип трещины определяет характер разрушения: отрывной или сдвиговой. Нетрудно переформулировать указанный вывод для произвольного неоднородного сложно-напряженного состояния; в частности, при этом может оказаться одна часть трещины — нормального разрыва, другая часть — поперечного сдвига.

Для материалов, у которых прочность на сжатие сравнима с прочностью на растяжение  $\sigma_+ \sim \sigma_-$ , трещина даже в условиях растяжения может быть трещиной поперечного сдвига; при этом сдвиговое разрушение будет происходить под углом  $45^\circ$  к направлению растяжения, что и наблюдается у пластичных материалов [7]. Согласно (1.3) прочность на растяжение таких материалов будет выражаться формулой

$$\sigma_- = \frac{2\sqrt{2}L}{\pi\sqrt{l}}$$

Гипотеза А определяет класс материалов, для которого имеет место описанный выше механизм разрушения при сжатии. Судя по опытным данным [7,3], он наиболее применим к прочным монолитным хрупким материалам, которые при сжатии разваливаются на сравнительно большие куски. Возможен другой механизм разрушения при сжатии, описанный в работе автора [8], который связан с локальной потерей устойчивости и локальными разрушениями материала; этот механизм, по-видимому, наиболее характерен для материалов, локально неоднородных по своей структуре; при этом виде разрушения опытный образец разваливается на большое число мелких кусков [8,2]. В последнем случае локальные разрушения могут происходить как по сдвиговому, так и по отрывному механизму.

§ 2. Упругая задача для плоскости с прямолинейными разрезами (плоская задача). Пусть область, занятая телом, представляет собой всю плоскость с прямолинейными щелями  $L_k = a_k b_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), расположенными вдоль одной и той же прямой, которую мы примем за действительную ось  $Ox$ ; совокупность отрезков  $L_k$  обозначим через  $L$ .

Напряжения и смещения в плоской задаче теории упругости можно представить [6] через потенциалы Мусхелишвили  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$ , где  $z = x + iy$ . Имеют место основные соотношения

$$\begin{aligned}\sigma_x + i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - \overline{\Omega(z)} - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \overline{\Omega(z)} + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} \\ 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= \kappa \Phi - \overline{\Phi(z)} - \overline{\Omega(z)} - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}\end{aligned}\quad (2.1)$$

Здесь  $u, v$  — координаты вектора смещения по осям декартовых координат  $x$  и  $y$ ;  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  — компоненты тензора напряжений;  $\mu$  и  $\nu$  — модуль сдвига и коэффициент Пуассона, соответственно;  $\kappa = 3 - 4\nu$  для плоской деформации и  $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$  для плоского напряженного состояния

$$\Omega(z) = z\Phi'(z) + \Psi(z)$$

Считаем, что при стремлении к бесконечности напряжения становятся линейными функциями координат. Этот случай представляется, например, в задачах изгиба или при учете силы тяжести. Тогда функции  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$  в окрестности бесконечно удаленной точки можно записать в виде

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= a_0 z + a_1 + a_2 z^{-1} + O(z^{-2}), \\ \Omega(z) &= b_0 z + b_1 + b_2 z^{-1} + O(z^{-2})\end{aligned}\quad (2.2)$$

Коэффициенты  $a_0, a_1, b_0, b_1, b_2$  согласно (2.1) выражаются через механические величины следующим образом

$$\begin{aligned}a_2 &= -\frac{X + iY}{2\pi(1 + \kappa)}, \quad b_2 = \frac{(\kappa + 1)X - (\kappa - 1)iY}{2\pi(1 + \kappa)}, \quad a_1 = 1/4(N_1 + N_2) \\ b_1 &= -1/2(N_1 - N_2)e^{-2i\alpha}, \quad a_0 = 1/4[c_1 + c_3 - i(c_2 + c_4)], \\ b_0 &= 1/2(c_3 - c_1) + ic_5\end{aligned}\quad (2.3)$$

Здесь  $(X, Y)$  обозначает главный вектор внешних усилий, приложенных к краям совокупности разрезов  $L$ ;  $N_1$  и  $N_2$  — значения главных напряжений на бесконечности,  $\alpha$  — угол, образованный осью, соответствующей  $N_1$ , с осью  $x$ ; постоянные  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  определяют линейное поведение напряжений на бесконечности

$$\sigma_x = c_1 x + c_2 y, \quad \sigma_y = c_3 x + c_4 y, \quad \tau_{xy} = c_5 x + c_6 y \quad (2.4)$$

При наличии вектора постоянных объемных сил  $(g_x, g_y)$  между величинами  $c_1, c_4, c_5, c_6$ , очевидно, существует связь

$$c_1 + c_6 + g_x = 0, \quad c_4 + c_5 + g_y = 0 \quad (2.5)$$

Пусть между противоположными берегами разрезов имеет место взаимодействие типа сухого кулонова трения со сцеплением, а граничные

условия на разрезах  $L$  могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} [v] &= \alpha(x), & [\sigma_y] &= \beta(x), & [\tau_{xy}] &= \gamma(x) \\ \tau_{xy}^{\pm} &= -k^{\pm}(x) + \rho^{\pm}(x) \sigma_y^{\pm} & \text{на } L \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$ ,  $\gamma(x)$ ,  $k^{\pm}(x)$ ,  $\rho^{\pm}(x)$  — заданные функции. Скобка  $[a] = a^+ - a^-$  означает скачок величины  $a$  при переходе через линию  $L$ , значками  $(+)$  и  $(-)$  обозначаются значения, соответственно, на верхнем и нижнем берегах разрезов  $L$ . Значок  $(\pm)$  применяется для одновременной записи условий на верхнем и нижнем берегах.

Граничными условиями (2.6) описывается большое число частных случаев. Например, при плотном прилегании со скольжением противоположных берегов щелей один по другому с постоянным коэффициентом сухого трения  $\rho$  и постоянным сцеплением  $k$ , имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \beta(x) = \gamma(x) = 0 & (k > 0, \rho > 0) \\ k^+(x) &= k^-(x) = k = \text{const}, & \rho^+(x) &= \rho^-(x) = \rho = \text{const} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Используя основные представления (2.1), граничные условия (2.6) можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} [\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + \overline{\Omega(t)}] &= \beta(t) - i\gamma(t) & \text{на } L \\ [(\kappa + 1)(\Phi(t) - \overline{\Phi(t)}) + \Omega(t) - \overline{\Omega(t)}] &= 4\mu i \alpha'(t) & \text{на } L \\ \Omega^{\pm}(t) - \overline{\Omega^{\pm}(t)} &= -2ik^{\pm}(t) + i\rho^{\pm}(t) (2\Phi^{\pm}(t) + 2\overline{\Phi^{\pm}(t)} + \Omega^{\pm}(t) + \overline{\Omega^{\pm}(t)}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из первых двух граничных условий (2.8) видно, что

$$\begin{aligned} [\text{Im } \Omega(t)] &= \gamma(t), & [\text{Im } \Phi(t)] &= \frac{1}{\kappa + 1} (2\mu \alpha'(t) - \gamma(t)) \\ [\text{Re } (2\Phi(t) + \Omega(t))] &= \beta(t) & \text{на } L \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из (2.9) следует, что аналитическая функция  $2\Phi(z) + \Omega(z)$  на разрезах  $L$  терпит скачок  $f(t)$

$$[2\Phi(t) + \Omega(t)] = f(t), \quad f(t) = \beta(t) + \frac{i}{\kappa + 1} (4\mu \alpha'(t) + (\kappa - 1)\gamma(t))$$

Отсюда, используя условия на бесконечности (2.2), по формуле Сохоцкого-Племели получаем

$$2\Phi(z) + \Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t - z} + (2a_0 + b_0)z + 2a_1 + b_1 \quad (2.11)$$

На основании (2.9) и (2.11) последнее граничное условие (2.8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Omega^{\pm}(t) - \overline{\Omega^{\pm}(t)} &= g^{\pm}(t) & \text{на } L \\ g^{\pm}(t) &= -2ik^{\pm}(t) + i\rho^{\pm}(t) \left\{ \pm \beta(t) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\pi} \int_L \left[ \gamma(\tau) \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} + \frac{4\mu \alpha'(\tau)}{\kappa + 1} \right] \frac{d\tau}{\tau - t} + 4a_1 + 2\text{Re } b_1 + 2t(2\text{Re } a_0 + \text{Re } b_0) \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Решение задачи Дирихле (2.12) для внешности разрезов вдоль одной и той же прямой изложено в монографиях Н. И. Мусхелишвили [9] и

Ф. Д. Гахова [10]. Окончательно, с учетом условий на бесконечности (2.2) решение краевой задачи (2.12) в классе функций неограниченных (но интегрируемых) в концах разрезов  $L_k$  примет вид

$$\Omega(z) = \frac{1}{4\pi i X(z)} \int_L \frac{[g^+(t) + g^-(t)] X(t)}{t-z} dt + \\ + \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{g^+(t) - g^-(t)}{t-z} dt + \frac{P_{n+1}(z)}{X(z)} + \frac{1}{2} (b_0 + \bar{b}_0) z + \frac{1}{2} (b_1 + \bar{b}_1) \quad (2.13)$$

Здесь  $P_{n+1}(z)$  обозначает полином степени  $(n+1)$  с чисто мнимыми коэффициентами

$$P_{n+1}(z) = C_0 z^{n+1} + C_1 z^n + \dots + C_{n+1}, \quad X(z) = \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{1/2} (z - b_k)^{1/2}$$

Относительно функции  $X(z)$  считаем, что при больших  $z$  она имеет вид

$$X(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + O(z^{n-2}) \quad (2.15)$$

Под  $X(t)$  подразумевается значение, принимаемое функцией  $X(z)$  на верхнем берегу разрезов  $L$ .

Осталось определить коэффициенты полинома  $P_{n+1}(z)$ . Коэффициенты  $c_0$  и  $c_1$  определяются сразу из условий на бесконечности (2.2), которые после разложения  $\Omega(z)$  в окрестности бесконечно удаленной точки и приравнивания коэффициентов при первой и нулевой степенях  $z$  дают

$$C_0 = i \operatorname{Im} b_0, \quad C_1 = i \operatorname{Im} b_1 + i a_{n-1} \operatorname{Im} b_0 \quad (2.16)$$

Остальные  $n$  коэффициентов определяются из  $n$  условий, выражающих то, что на щелях задан скачок смещения  $v$ , а не только лишь скачок производной смещения  $dv/dx$ . Эти условия можно записать в виде системы  $n$  линейных уравнений относительно неизвестных  $C_2, C_3, \dots, C_{n+1}$  и показать ее однозначную разрешимость (совершенно аналогично тому как это сделано в книге Н. И. Muskhelishvili [6]). Если главный вектор внешних усилий  $(X, Y)$  задан, два из этих условий можно получить особенно просто из разложения на бесконечности.

*Замечание.* Указанный метод решения упругой задачи (2.6) приводит также к эффективному замкнутому решению, казалось бы, гораздо более трудной нелинейной задачи, когда силовое взаимодействие противоположных берегов щелей имеет совершенно произвольный характер

$$\tau_{xy} = F(\sigma_y) \quad (2.17)$$

где  $F(x)$  — произвольная функция. При этом граничные условия упругой задачи могут быть представлены в виде

$$[v] = \alpha(x), \quad [\sigma_y] = \beta(x), \quad [\tau_{xy}] = \gamma(x), \quad \tau_{xy} = F(\sigma_y) \quad \text{на } L \quad (2.18)$$

Нетрудно заметить, что решение последней задачи (2.18) будет выражаться формулой (2.11) и формулой (2.13), в которой под  $g^\pm(t)$  следует понимать функцию

$$g^\pm(t) = F\{V^\pm(t)\} \quad (2.19)$$

$$V^\pm(t) = \operatorname{Re} \left\{ \pm \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - t} + (2a_0 + b_0)t + 2a_1 + b_1 \right\}$$

Здесь, как и ранее, интеграл понимается в смысле главного значения. Подчеркнем, что выражение (2.11) есть следствие лишь условий, задающих на  $L$  скачок нормального смещения, а также скачок нормального и касательного напряжения.

§ 3. Прочность хрупких тел на сжатие. Реальное хрупкое тело представим себе имеющим множество совершенно хаотично расположенных микротрещин — щелей. Точно учесть взаимодействие всех микротрещин невозможно (да и не нужно), поэтому применим следующий приближенный прием.

Выделим одну произвольно взятую микротрещину, а все остальные микротрещины равномерно «размажем» по всему телу, заменив их влияние на выделенную микротрещину влиянием теперь уже однородного упругого тела с усредненными упругими характеристиками без трещин (кроме выделенной). Рассмотрим задачу о напряженном состоянии в окрестности выделенной трещины.

Итак, пусть прямолинейная трещина в условиях плоской деформации находится в поле сжимающих главных напряжений  $N_1$  и  $N_2$ . Трещина длины  $2l$  расположена вдоль оси  $x$  с центром в начале декартовых координат  $xy$ . Противоположные берега трещины под действием сжатия везде плотно налегают один на другой, так что трещина в данном случае представляет собой линию разрыва лишь касательного смещения  $u$ , смещение же по нормали к поверхности трещины  $v$  не терпит разрыва. Из условий равновесия, непрерывными являются также напряжения  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ . Следует задать еще одно условие, характеризующее взаимодействие противоположных прилегающих один к другому берегов трещины. В качестве такого условия примем условие сухого кулонова трения со сцеплением; постоянную сцепления  $k$  и коэффициент трения  $\rho$  считаем не изменяющимися вдоль всей трещины ( $k > 0$ ,  $\rho > 0$ ).

Следует иметь в виду, что условие сухого кулонова трения со сцеплением более или менее хорошо описывает физические условия реальной задачи лишь тогда, когда противоположные берега трещины скользят один по другому. Когда такого взаимного проскальзывания нет (например, когда трещина расположена на площадке главного сжимающего напряжения), это условие становится совершенно неприемлемым. Окончательно, граничные условия задачи запишутся в виде

$$|x| < l \quad \text{при } y = 0 \quad (3.1)$$

$$[v] = 0, \quad [\sigma_y] = 0, \quad [\tau_{xy}] = 0, \quad \tau_{xy} = -k + \rho\sigma_y$$

В записи последнего граничного условия (3.1) учтен знак напряжения  $\sigma_y$  (и задано направление сдвига).

Упругая задача (3.1) является частным случаем общей задачи (2.6). При этом, очевидно, будут иметь место следующие равенства:

$$\alpha(x) = \beta(x) = \gamma(x) = 0, \quad k(x) = k, \quad \rho(x) = \rho, \quad f(x) = 0, \quad a_0 = b_0 = 0 \\ a_2 = b_2 = 0 \quad (3.2)$$

$$g^\pm(t) = g = -2ik + i\rho [N_1 + N_2 - (N_1 - N_2) \cos 2\alpha] \\ C_0 = C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{1}{2}i(N_1 - N_2) \sin 2\alpha \quad (N_1 < 0, \quad N_2 < 0)$$

Формулы (2.11) и (2.13) в рассматриваемом частном случае (3.2) примут вид

$$2\Phi(z) + \Omega(z) = 2a_1 + b_1, \quad \Omega(z) = \frac{(2C_1 - g)z}{2\sqrt{z^2 - l^2}} + \frac{1}{2}g + \operatorname{Re} b_1 \quad (3.3)$$

Изучим напряженное состояние в окрестности конца трещины при  $z = l + \varepsilon$ , где  $\varepsilon = re^{i\theta}$  ( $r \ll l$ ). При  $z \rightarrow l$  функции  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$  имеют вид

$$\Omega(z) = -2\Phi(z) = \frac{(2C_1 - g)\sqrt{l}}{2\sqrt{2r}} e^{-1/2i\theta} + O(1) \quad (3.4)$$

( $r, \theta$  — полярные координаты с центром в точке  $z = l$ ). Отсюда по формулам (2.1) напряжения в окрестности конца трещины можно представить в виде

$$\sigma_x + i\tau_{yx} = Bi\sqrt{1/2 l/r} (3 - e^{-i\theta} - i \sin \theta \cdot e^{i\theta}) e^{1/2i\theta} \\ \sigma_y - i\tau_{yx} = Bi\sqrt{1/2 l/r} (-1 - e^{-i\theta} + i \sin \theta \cdot e^{i\theta}) e^{1/2i\theta} \\ B = \frac{1}{4} [2k - \rho(N_1 + N_2) + (N_1 - N_2)(\rho \cos 2\alpha + \sin 2\alpha)] \quad (3.5)$$

Компоненты напряжения в полярных координатах  $r, \theta$  согласно соотношениям (3.5) выражаются формулами

$$\begin{aligned}\sigma_\theta + \sigma_r &= \sigma_x + \sigma_y = -4B \sqrt{1/2l/r} \sin 1/2\theta \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} &= 2B \sqrt{1/2l/r} i e^{3/2i\theta} (2 - i \sin \theta e^{-i\theta})\end{aligned}\quad (3.6)$$

Особо отметим формулы для напряжений вдоль действительной оси при  $y = 0$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \sigma = 1/2 [N_1 + N_2 - (N_1 - N_2) \cos 2\alpha] \\ \tau_{xy} &= \begin{cases} -k + \rho\sigma & \text{при } |x| < l \\ -k + \rho\sigma + 2B|x|/\sqrt{x^2 - l^2} & \text{при } |x| > l \end{cases} \\ \sigma_x = \tau &= 1/2 [N_1 + N_2 + (N_1 - N_2) \cos 2\alpha] \quad \text{при } |x| > l \\ \sigma_x = \tau - 4Bx/\sqrt{l^2 - x^2} & \quad \text{на верхнем берегу при } |x| < l \\ \sigma_x = \tau + 4Bx/\sqrt{l^2 - x^2} & \quad \text{на нижнем берегу при } |x| < l\end{aligned}\quad (3.7)$$

Любопытно, что напряжение  $\sigma_y$  вдоль трещины и на ее продолжении постоянно и равно тому напряжению  $\sigma_y$ , которое было бы в теле везде, если бы трещины не существовало. Этот факт, как нетрудно заметить, имеет место при любом числе трещин, расположенных вдоль одной и той же прямой; он не зависит также от характера взаимодействия противоположных берегов трещин и является следствием одних лишь условий непрерывности нормального смещения, касательного напряжения и нормального напряжения.

Напряжение  $\sigma_x$  постоянно на продолжении трещины; при  $|x| < l$  вблизи концов трещины напряжение  $\sigma_x$  обращается в бесконечность, причем знак бесконечности различен для двух концов вдоль одного и того же берега и также различен вдоль двух берегов трещины вблизи одного и того же конца. Наконец, приведем формулу, характеризующую концентрацию касательных напряжений вблизи конца трещины на ее продолжении

$$\tau_{xy} = 2B \sqrt{1/2l/r} + O(1) \quad \text{при } y = 0, \quad x = l + r \quad (3.8)$$

Введем гипотезу А: трещина в условиях сжатия всегда будет трещиной поперечного сдвига.

На введение этой гипотезы наталкивает то обстоятельство, что в окрестности конца трещины на ее продолжении напряжения  $\sigma_y$  и  $\sigma_x$  не имеют особенностей и лишь касательное напряжение  $\tau_{xy}$  стремится в бесконечность согласно формуле (3.8). Поэтому естественно предположить, что начало распространения трещины определяется коэффициентом концентрации одного касательного напряжения  $\tau_{xy}$ . Кроме того, простые вычисления по формулам (3.6) показывают, что напряжение  $\tau_{xy}$  одновременно является максимальным касательным напряжением в точках тела вблизи конца трещины на ее продолжении. Критическая нагрузка определяется из условия [1]

$$2\pi B \sqrt{l} = -L \sqrt{2} \quad (L > 0) \quad (3.9)$$

Определим расположение наиболее опасных трещин поперечного сдвига. Очевидно, это те трещины, на которых при прочих равных условиях раньше всего достигается критическое значение коэффициента концентрации касательного напряжения, т. е. расположение наиболее опасных трещин определяется условием минимума функции  $B(\alpha)$  по модулю. Анализ функции  $B(\alpha)$ , задаваемой (3.5), показывает, что в зависимости от направления относительного сдвига противоположных берегов трещины и соотношения главных напряжений  $N_1$  и  $N_2$  наиболее опасные трещины могут быть расположены под углом  $1/2 \arcsin \operatorname{ctg} \rho$  или под углом  $1/2 \pi + 1/2 \arcsin \operatorname{ctg} \rho$  к направлению  $N_1$ . Например, при  $\rho = 0.3$  значение  $1/2 \arcsin \operatorname{ctg} \rho$  равно  $37^\circ$ . В том случае, когда коэффициент трения  $\rho$  равен нулю, что соответствует наличию лишь трения сцепления между противоположными поверхностями трещин, наиболее опасные трещины сдвига расположены под углом  $45^\circ$  к площадкам главных напряжений. Последний результат совпадает с соответствующим результатом полученным по упрощенной теории.

В случае одноосного сжатия тела с наиболее опасной трещиной условие (3.9) примет вид

$$\sigma_+ = \frac{2}{\sqrt{1+\rho^2}-\rho} \left( k + \frac{\sqrt{2L}}{\pi \sqrt{l}} \right) \quad (3.10)$$

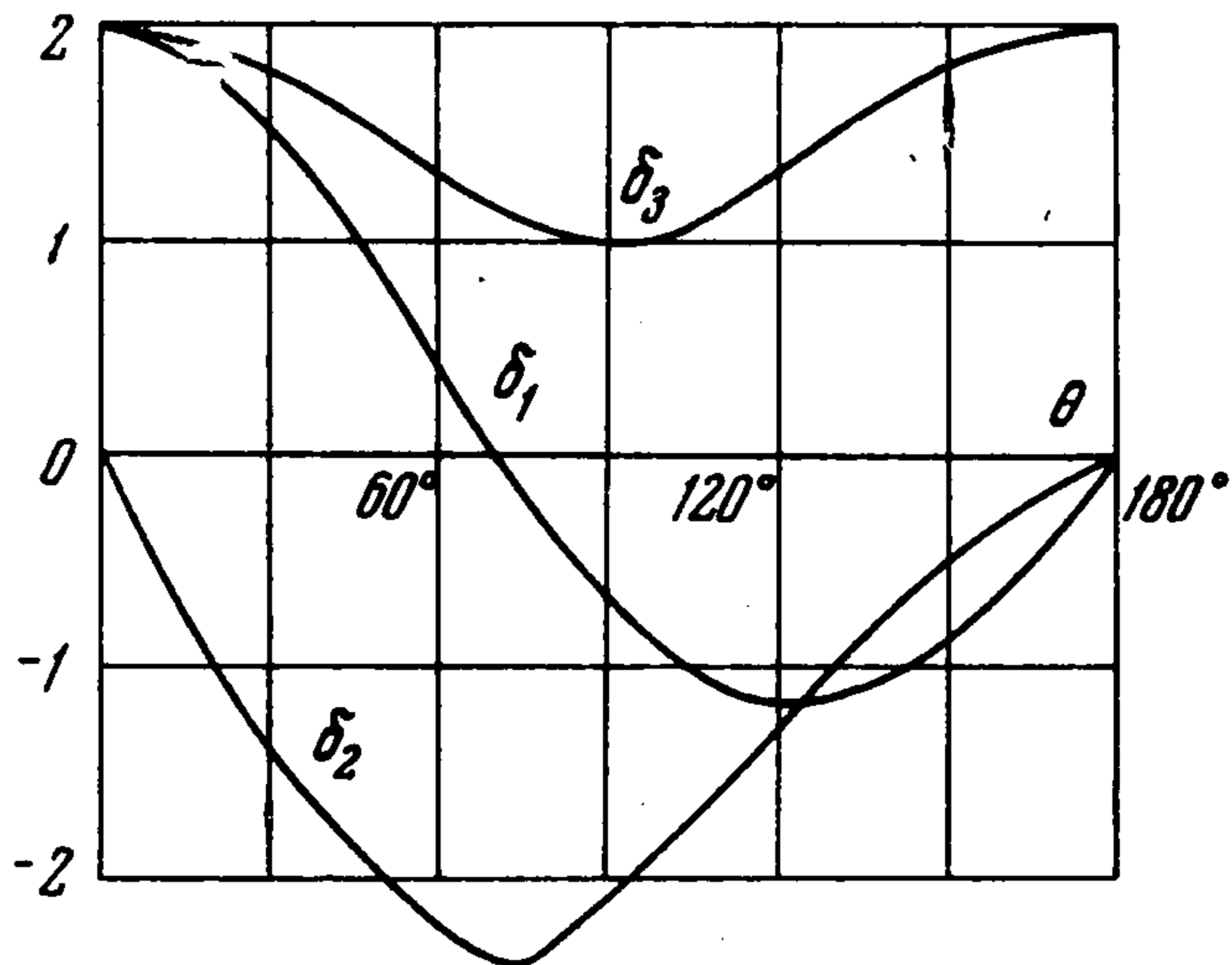
Формула (3.10) определяет прочность изотропного хрупкого тела на сжатие в зависимости от сдвигового модуля сцепления  $L$ , постоянной сцепления  $k$ , коэффициента трения  $\rho$  и длины начальной трещины  $l$ . При этом, чем больше величины  $k$ ,  $L$  и  $\rho$ , тем больше прочность тела на сжатие  $\sigma_+$ . Чем меньше длина начальной трещины  $l$ , тем больше прочность  $\sigma_+$ . Соотношение (3.10) показывает также, что, как только

нагрузка достигла предельной величины  $\sigma_+$ , равновесие тела с трещиной длины  $2l$  становится неустойчивым и дальнейшее увеличение нагрузки приводит к динамическому росту трещины.

В случае идеально гладких поверхностей трещины ( $k=0$ ,  $\rho=0$ ) прочность тела на сжатие совпадает со значением прочности, полученным по упрощенной теории (первая формула (1.5)).

Интересно сравнить модули сцепления  $L$  и  $K$ . Используя вторую формулу (1.5) и соотношение (3.10), получаем

$$\frac{L}{K} = \frac{\sigma_+}{\sigma_-} \left( \frac{\sqrt{1+\rho^2}-\rho}{2} - \frac{k}{\sigma_+} \right) \quad (3.11)$$



Фиг. 1

§ 4. Произвольная «налегающая» трещина. Пусть в хрупком теле любой формы и как угодно нагруженном имеется произвольная криволинейная трещина, такая, что противоположные берега ее в окрестности конца налегают один на другой (под действием хотя бы местного сжатия). Выберем начало полярных координат  $r\theta$  в рассматриваемом конце трещины ( $\theta=0$  соответствует продолжению трещины). Можно показать, применяя принцип «микроскопа» и формулы (3.6), что напряжения  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{r\theta}$  и  $\tau_{\max}$  вблизи этого конца трещины ведут себя следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= B(p, l) \delta_2(\theta) r^{-1/2}, & \tau_{r\theta} &= B(p, l) \delta_1(\theta) r^{-1/2} \\ \tau_{\max} &= B(p, l) \delta_3(\theta) r^{-1/2}, & \sigma_\theta + \sigma_r &= -4B(p, l) r^{-1/2} \sin^2 \frac{1}{2} \theta \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \delta_1(\theta) &= 2 \cos^3 \frac{1}{2} \theta + \sin \theta \sin^2 \frac{1}{2} \theta \\ \delta_2(\theta) &= -2 [\sin^3 \frac{1}{2} \theta + (\sin^2 \frac{1}{2} \theta)^3], & \delta_3(\theta) &= \sqrt{\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cos 2\theta} \end{aligned}$$

Функция  $B(p, l)$  зависит лишь от внешней нагрузки и конфигурации тела. Функции  $\delta_1(\theta)$ ,  $\delta_2(\theta)$ ,  $\delta_3(\theta)$  представлены на фиг. 1.

Любопытно, что все напряжения (и всякая однородная комбинация напряжений) вблизи конца трещины могут быть представлены в виде произведения одной и той же для всех напряжений функции  $B(p, l) r^{-1/2}$  на некоторую функцию  $\theta$ , характерную для данного напряжения (или комбинации напряжений). Это замечательное обстоятельство является следствием лишь условий налегания противоположных берегов трещины в окрестности конца один на другой (т. е. условий непрерывности нормального смещения, нормального напряжения и касательного напряже-

ния). Оставшееся же граничное условие при этом может быть весьма произвольным и более общим, чем (2.17)).

Указанное свойство, характерное для «налегающей» трещины, является весьма своеобразным по сравнению со случаем трещины со свободными берегами в окрестности конца. Оно позволяет сформулировать следующий вывод.

Поведение «налегающей» трещины совершенно автономно, т. е. направление распространения трещины и характер разрушения (так же, как и предельный коэффициент концентрации) не зависят от конфигурации тела и внешней нагрузки и полностью определяются свойствами материала вблизи конца трещины.

Это предложение будем называть законом автономности. Ранее рассматривались трещины, прямолинейность распространения которых предполагалась или же обеспечивалась априори (например, посредством склейки). Закон автономности позволяет проанализировать это допущение. Согласно закону автономности направление распространения трещины и характер разрушения полностью определяются функциями  $\delta_1(\theta)$ ,  $\delta_2(\theta)$ ,  $\delta_3(\theta)$  (и, может быть, даже какими-то другими, но вполне определенными).

Рассмотрим кривые фигуры 1. Как видно, касательное напряжение  $\tau_{r\theta}$  является четной функцией  $\theta$  и имеет три экстремума: при  $\theta = 0^\circ$  ( $\delta_1 = 2$ ) и при  $\theta = \pm 124^\circ$  ( $\delta_1 = -1.27$ ). Нормальное напряжение  $\sigma_\theta$  является нечетной функцией  $\theta$  и имеет, соответственно, два экстремума разного знака: при  $\theta = \pm 75^\circ$  ( $\delta_2 = \mp 2.32$ ).

Анализ этих кривых позволяет на основе закона автономности выявить основные тенденции развития трещины и самого механизма разрушения. Разрушение может происходить по сдвиговому механизму; при этом трещина развивается всегда по направлению наибольшего касательного напряжения  $\tau_{r\theta}$ , т. е. по направлению продолжения трещины  $\theta = 0^\circ$ , как только величина  $B(p, l)$  по абсолютной величине достигнет предельного значения

$$|B(p, l)| = \frac{1}{2\pi} L \quad (4.2)$$

Такие трещины согласно закону автономности всегда прямолинейны. Именно к прямолинейным трещинам относится развитая выше теория.

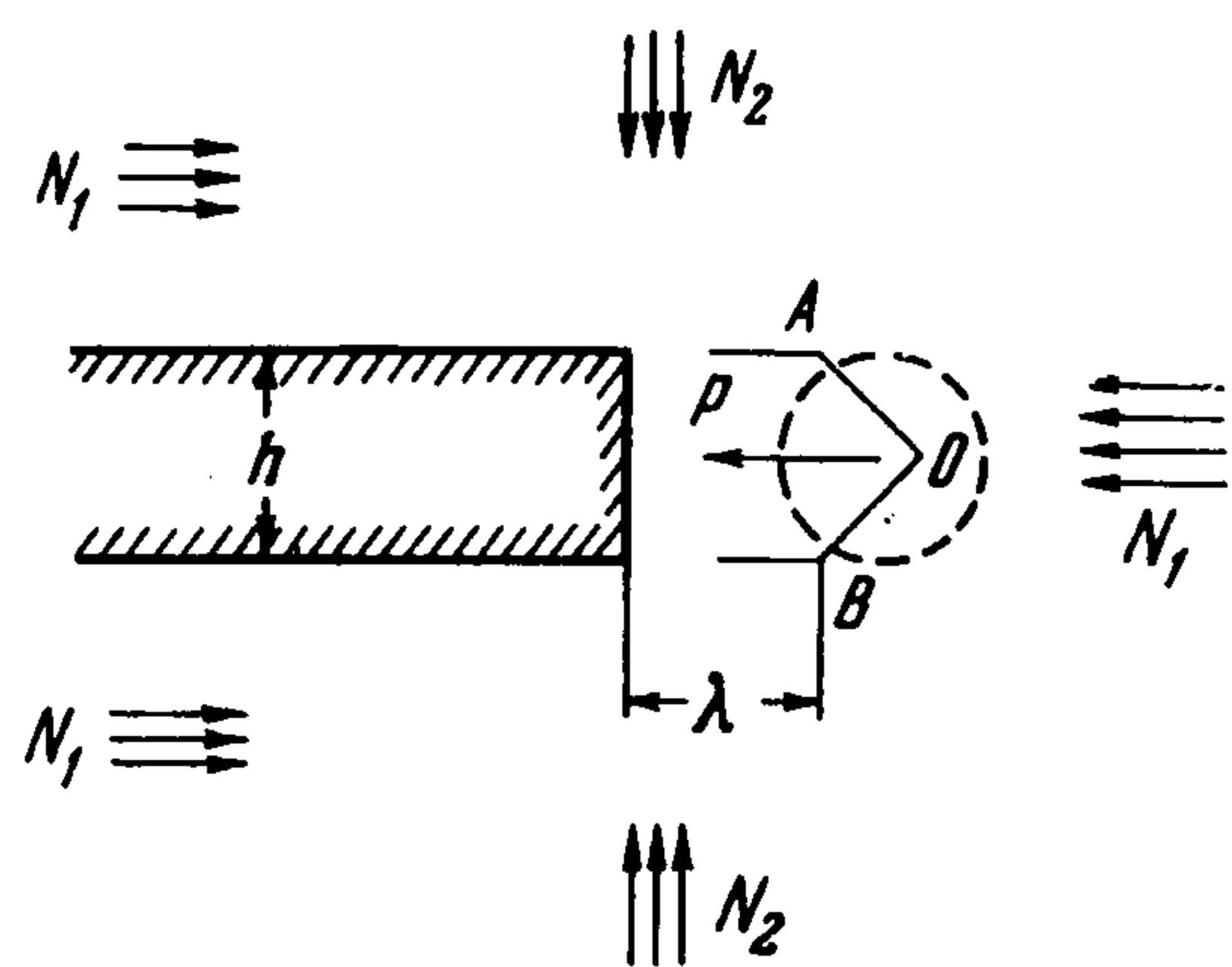
Разрушение может происходить также по отрывному механизму, так как или в области  $0 < \theta < \pi$ , или при  $-\pi < \theta < 0$  всегда действует растягивающее напряжение  $\sigma_\theta$ ; при этом трещина нормального разрыва отойдет от конца  $r = 0$  в направлении максимума  $\sigma_\theta$ , т. е. при  $\theta = +75^\circ$  или  $\theta = -75^\circ$ , как только величина  $B(p, l)$  по модулю достигнет предельного значения

$$|B(p, l)| = 0.14K \quad (4.3)$$

Трещина нормального разрыва вначале имеет свободные берега, так как находится в области растягивающих напряжений. При дальнейшем развитии она неизбежно входит в область сжимающих напряжений и становится «налегающей», т. е. попадает в сферу действия закона автономности. Перед трещиной опять-таки возникает альтернатива: развиваться

прямолинейно (сдвиг) или снова отойти под углом  $+75^\circ$  (или  $-75^\circ$ ) к новому направлению распространения (отрыв). В зависимости от последовательного выбора материалом этих двух направлений трещина может в конце концов иметь весьма произвольный вид, начиная от прямой линии и кончая ступенькообразной кривой типа «лесенки» или «елочки».

Из соображений симметрии и закона автономности ясно, что в идеально однородном материале в однородном поле напряжений любая трещина будет иметь или строго периодическую структуру, или будет строго прямолинейной (если отвлечься от влияния формы начального дефекта).



Фиг. 2

Рассмотренная «квантованность» направления распространения представляет замечательное свойство хрупких трещин в сжатых средах.

Таким образом, трещины в сжатых телах представляют собой, вообще говоря, ступенчатую структуру с только что изученным направлением отдельных звеньев; длина каждого звена зависит от поля упругих напряжений в теле.

Математическая задача теории упругости о ступенчатых трещинах представляет большие трудности для эффективного решения. Однако в том случае, когда характерная длина одной ступеньки мала по сравнению с длиной всей трещины, так что ступенчатая структура будет «мел-

кой» структурой некоторой средней гладкой трещины, гладкую трещину такого более крупного масштаба можно снова исследовать рассмотренным выше методом и получить совершенно аналогичные результаты. При этом элементарный объем должен быть большим сравнительно с характерным размером мелкоструктурной ступеньки. В частности, для крупномасштабной трещины справедлив обобщенный закон автономности, согласно которому крупная структура трещины также представляет собой, вообще говоря, ступенчатую структуру с избранным направлением отдельных звеньев ( $0^\circ$  и  $75^\circ$ ). При достаточных размерах тела принципиально можно наблюдать любое число масштабов ступенчатых структур.

**§ 5. Горный удар.** Одним из наиболее интригующих приложений теории развития трещин в сжатых телах является горный удар. Горным ударом называется внезапный выброс породы внутрь выработки, происходящий без выделения газа; горный удар тем опаснее, чем больше величина горного давления и прочность пород [2,3].

Явление горного удара можно уяснить себе на следующей простейшей теоретической схеме. Пусть в горном теле, которое представим себе для простоты однородным и изотропным хрупким телом, проводится горизонтальная выработка высоты  $h$  (фиг. 2). Выработка, имеющая обычно форму, близкую к прямоугольной, находится в поле горного давления ( $N_1$  — боковое,  $N_2$  — вертикальное).

Анализ поля упругих напряжений показывает, что впереди выработки на расстоянии, примерно равном  $(1 \div 2) h$ , имеется внутренний очаг концентрации удельной упругой энергии и сжимающих напряжений  $\sigma_x$  (фиг. 2 обозначен пунктиром). Под действием горного давления в этом очаге распространяются сдвиговые трещины  $AO$  и  $OB$ , развивающиеся из наиболее опасных естественных трещин.

Этот период, предшествующий горному удару, сопровождается треском и углом, происходящими от неустойчивого распространения сдвиговых трещин до некоторого устойчивого размера, имеющего порядок размеров очага концентрации, т. е. порядок  $h$ . Трещины  $AO$  и  $OB$  образуют клин, который выжимается горным давлением. Величина силы  $P$ , приложенной к клину со стороны тела, приблизительно равна

$$P = 1/2 (\beta_1 N_1 + \beta_2 N_2) h \quad (5.1)$$

Здесь  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — коэффициенты концентрации напряжений. Итак, на первом этапе определяющую роль играет прочность материала на сжатие  $\sigma_+$ . Второй этап характеризуется катастрофическим выходом трещин из точек  $A$  и  $B$  к углам выработки, где также имеются очаги концентрации напряжений, и последующим выбросом породы.

В момент, предшествующий выбросу, сила  $P$  уравновешивается сопротивлением породы, которое равно  $2\sigma_s\lambda$  ( $\sigma_s$  — прочность породы на сдвиг или скалывание). Отсюда получаем соотношение

$$\beta_1 N_1 + \beta_2 N_2 = 4 \frac{\lambda}{h} \sigma_s \quad (5.2)$$

Непосредственно перед вторым этапом происходит перераспределение напряжений, приводящее к увеличению  $P$ , и уменьшению  $\lambda$  (выработка продвигается вперед).

Таким образом, причиной горного удара является внутренний очаг концентрации удельной упругой энергии и сжимающих напряжений впереди перед выработкой. Изменение формы выработки, состоящее в постепенном сведении ее на конус, устранило бы опасность сильного горного удара, так как тогда очаг концентрации напряжений вышел бы на острие конуса и всякое разрушение сопровождалось бы немедленным отвалом породы, а накопления упругой энергии в теле не происходило бы. Например, формы горных выработок, изображенные на фиг. 3, более безопасны, чем обычная прямолинейная форма. (Идеально безопасной формой выработки была бы форма естественного смыкания.)

В заключение рассмотрим вопрос о моделировании горного удара. На основе сказанного выше определяющими параметрами являются:  $L$ ,  $K$ ,  $\sigma_+$ ,  $\sigma_s$ . Характерный линейный размер обозначим через  $d$ . Параметр, определяющий величину горного давления, обозначим через  $p$  (например,  $N_2 = p$ ,  $N_1 = \gamma p$ ,  $\gamma \leq 1$ ). Согласно л — теореме

$$\frac{p}{\sigma_s} = \Gamma \left\{ \frac{L}{\sigma_s \sqrt{d}}, \frac{\sigma_+}{\sigma_s}, \frac{K}{\sigma_s \sqrt{d}}, \nu \right\} \quad (5.3)$$

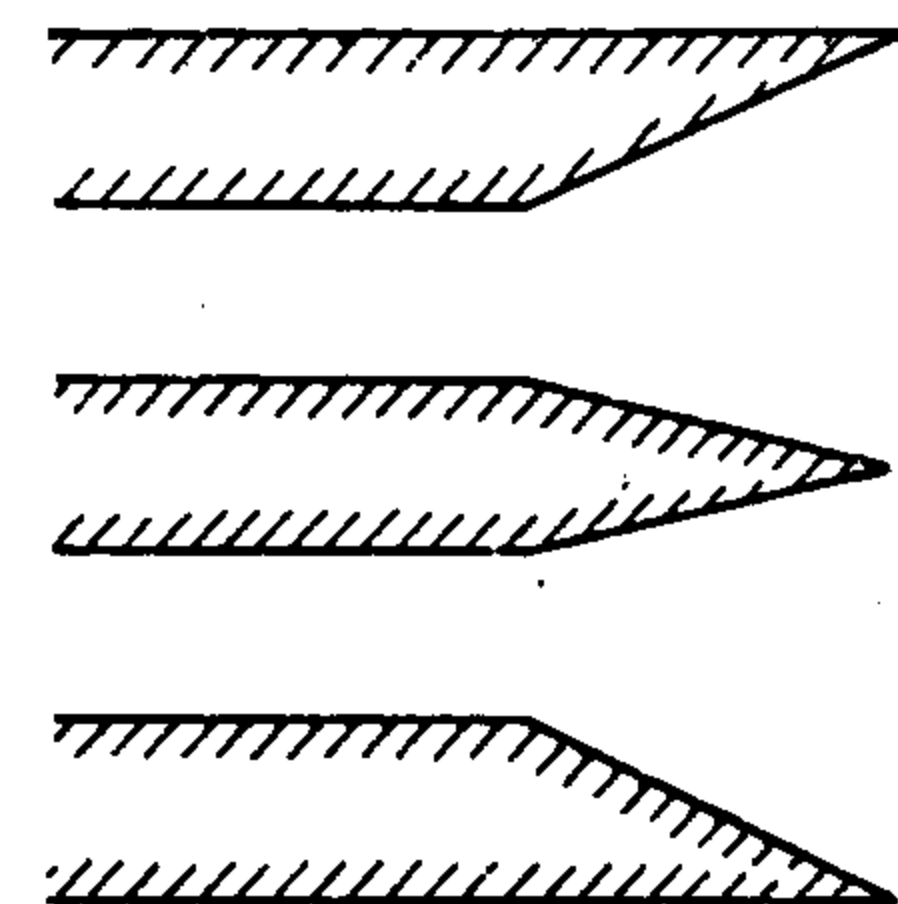
Функция  $\Gamma$  подлежит определению из модельных экспериментов.

Автор благодарен С. Г. Авершину, В. Н. Мосинцу и Н. Г. Ялымову за обсуждение некоторых вопросов горного дела. Автор признателен Г. И. Баренблатту за внимание к работе.

Поступила 30 X 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О конечности напряжений на краю произвольной трещины. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
2. Авершин С. Г. Горные удары. М., Углетехиздат, 1955.
3. Ходот В. В. Внезапные выбросы угля и газа. Госгортехиздат, 1961.
4. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.
5. Моссаковский В. И., Рыбка М. Т. Попытка построения теории прочности для хрупких материалов, основанной на энергетических соображениях Гриффитса. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
6. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. 4-е. М., Изд-во АН СССР, 1954.
7. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. М., Изд. иностр. лит., 1954.
8. Черепанов Г. П. О природе «пинч-эффекта» и некоторых других вопросах теории разрушения. ПМТФ, 1965, № 1.
9. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Изд. 2-е. М., Физматгиз, 1962.
10. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Изд. 2-е. М., Физматгиз, 1963.



Фиг. 3