

## ОБ ЭФФЕКТАХ МАЛЫХ ВИБРАЦИЙ ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ ПОЛИМЕРОВ

Г. И. Баренблатт

(Москва)

Проведенное в последнее время исследование [1] обнаружило неожиданно, на первый взгляд, сильное действие малых вибрационных догрузок на скорость ползучести жестких кристаллических полимерных материалов. В предлагаемой работе показано, что это явление открывает широкий класс задач деформирования полимеров, для которых влияние малых вибраций существенно и может стать определяющим.

Главная причина сильного действия малых вибраций на процесс деформирования полимеров состоит в том, что полимерные материалы — вязко-упругие и обладают низкой теплопроводностью. Поэтому даже под действием малых вибраций полимеры могут быстро разогреваться. Разогрев ведет к изменению деформационных характеристик материала, в частности — к уменьшению его жесткости. Это приводит к увеличению деформаций, что в свою очередь влияет на дальнейший разогрев.

В предлагаемой работе намечается общий подход к исследованию влияния малых вибраций на деформирование жестких полимеров. Основная гипотеза состоит в том, что это влияние осуществляется за счет изменения температуры под действием вибраций и соответствующего изменения характеристик деформирования. На основе этой гипотезы и некоторых дополнительных предположений получаются две замкнутые системы уравнений: одна для характеристик среднего напряженно-деформированного состояния в переменном, но известном температурном поле, другая — для характеристик «вибрационного» поля и температуры. На основе опытных данных об упругом модуле и вязкости рассматриваемых материалов и некоторых оценок в динамических уравнениях второй системы пренебрегается вязкими и инерционными членами, но учитывается зависимость упругого модуля от температуры. Вязкость учитывается только в уравнении энергии, где именно она определяет приток тепла за счет диссипации энергии малых вибраций.

Предлагаемый подход, в частности, дает известную основу для исследования действия вибраций на прочность полимеров, а также для исследования динамической устойчивости упругого равновесия полимерных конструкций.

§ 1. Рассматриваются жесткие, но достаточно вязкие полимерные материалы такие, как капрон или капролит.

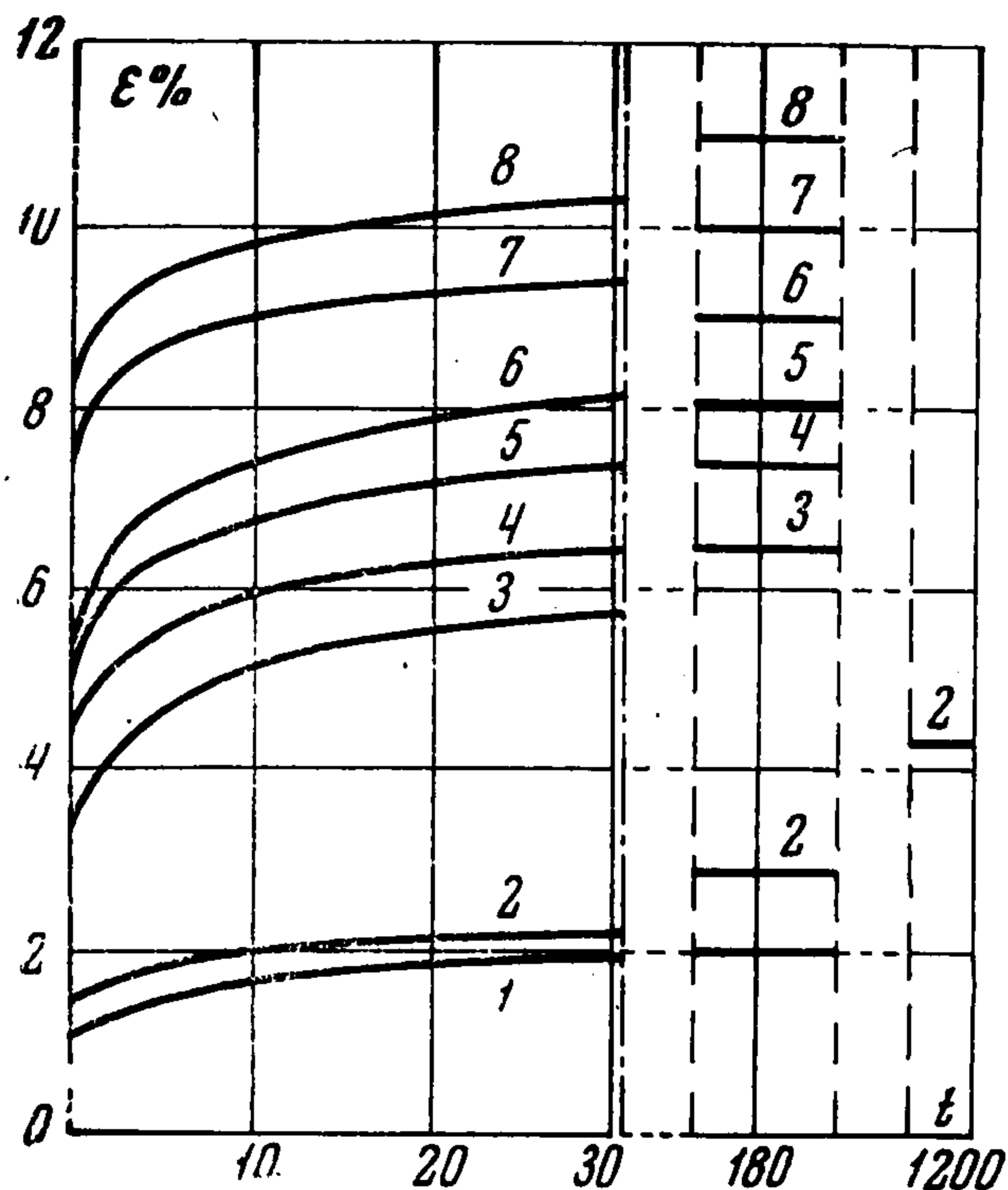
При длительном действии медленно меняющейся (или постоянной) нагрузки эти материалы обнаруживают выраженные релаксационные свойства, причем характеристики этих свойств существенно зависят от температуры. На фиг. 1 изображены типичные для подобных материалов кривые ползучести капролита при различных температурах, подтверждающие это заключение.

При воздействии синусоидальной вибрационной нагрузки исследуемые материалы ведут себя как вязко-упругие тела, характеризующиеся упругим модулем  $E'$ , вязкостью  $\eta$  (или связанным с вязкостью и частотой  $\omega$  «модулем потерь»  $E'' = \eta\omega$ ), зависящими от частоты и температуры  $T$ , а также коэффициентом Пуассона  $\nu$ , который примем не зависящим от

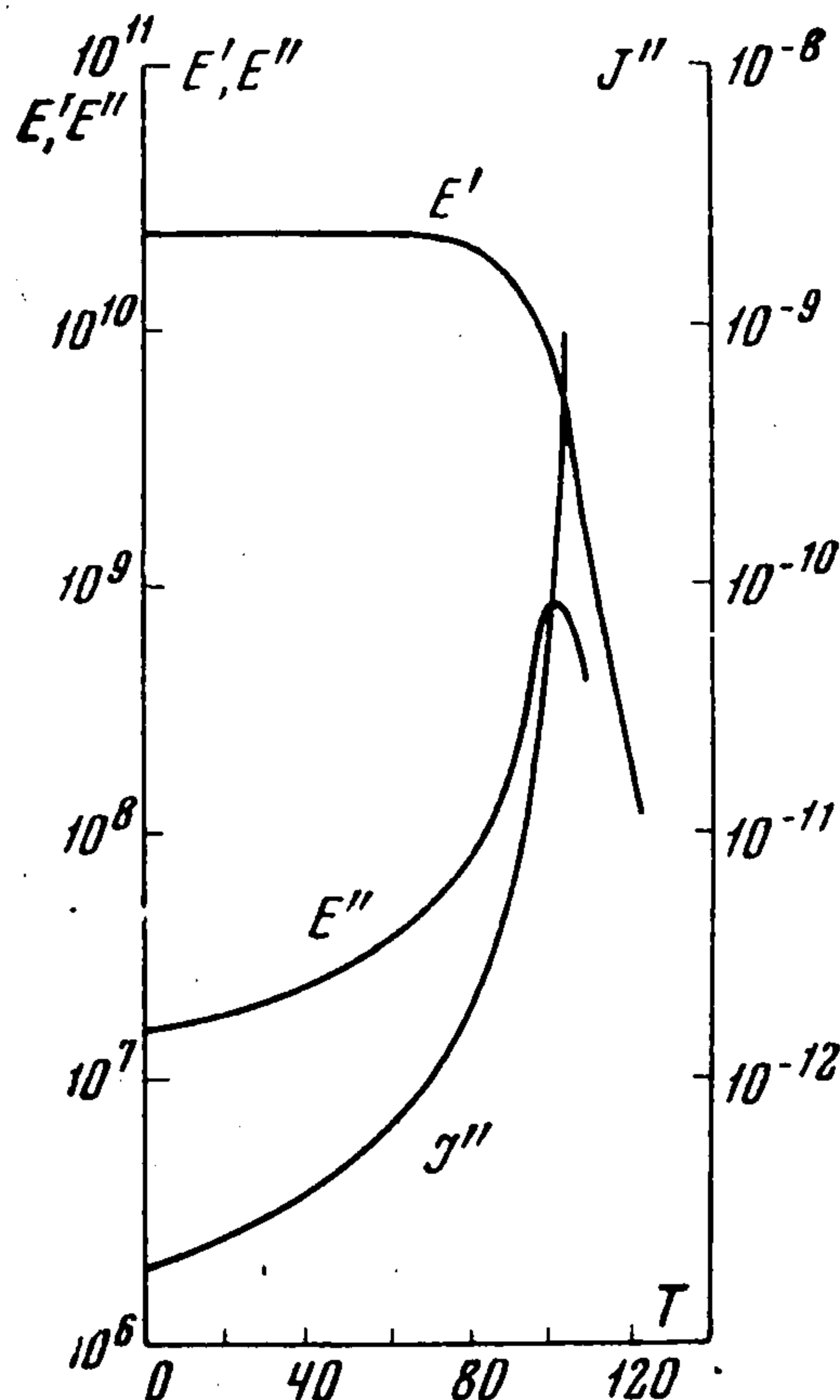
частоты и температуры. На фиг. 2 представлены заимствованные из [2] зависимости от температуры величин  $E'$  и  $E''$  для характерного материала рассматриваемого типа — полистирола.

Анализ опытных данных позволяет сделать следующие выводы.

1°. Характеристики деформирования материалов рассматриваемого типа под действием медленно меняющихся нагрузок существенно зависят от температуры.



Фиг. 1



Фиг. 2

2°. При фиксированной частоте вибраций упругий модуль  $E'$  зависит от температуры, убывая сравнительно медленно вплоть до достижения некоторой критической температуры  $T_c$ , после чего начинает уменьшаться быстро, и его изменение достигает нескольких порядков на небольшом температурном интервале. Фактически при достижении критической температуры материал утрачивает прежние несущие свойства.

3°. Модуль потерь  $E''$  при фиксированной частоте вибраций в практически интересном интервале температур растет с увеличением температуры — сперва медленно, потом быстро и достигает максимума примерно при той же критической температуре, после чего начинает быстро убывать.

4°. При  $T < T_c$  величина  $E''$  минимум на порядок меньше величины  $E'$ , которая не уменьшается более чем до  $10^9 \text{ дин/см}^2 \sim 10^3 \text{ кг/см}^2$ . В этой области температур рассматриваемые материалы обладают высокой скоростью звука (порядка  $10^5 \text{ см/сек}$ ), так что рассматривая колебания не слишком высокой частоты (порядка сотен циклов в сек и менее), можно исключить из рассмотрения волновые явления для изделий размером порядка метров и менее и считать упругие поля квазистатическими.

Сделанные выводы позволяют сильно упростить исследование действия малых вибраций на деформирование полимерных материалов.

§ 2. Для иллюстрации общего подхода рассмотрим простейший пример: деформацию призматического стержня с площадью поперечного сечения  $S$  под действием сжимающей или растягивающей продольной силы  $P_0 = \sigma_0 S$ . Предполагаем, что под действием медленно меняющейся или постоянной нагрузки материал ведет себя как идеально упругое тело с зависящим от температуры модулем упругости  $E(T)$ . Материалы рассмотренного в § 1 типа соответствуют этой модели на небольших промежутках времени (здесь и далее модуль упругости рассматривается как некоторая эффективная величина). Помимо основной нагрузки  $P_0$ , на стержень действует дополнительная вибрационная нагрузка  $P^* = \sigma^* S \cos \omega t$ , причем амплитуда колебания напряжений  $\sigma^*$  много меньше  $\sigma_0$ . Ввиду малости амплитуды колебания напряжений сравнительно с основным напряжением для напряжений и деформаций, осредненных за промежуток времени, большой — сравнительно с периодом [колебания, но малый — сравнительно с характерным временем изменения температуры, получаются обычные уравнения упругости с модулем упругости, зависящим от температуры, решение которых имеет тривиальный вид

$$\langle \sigma \rangle = \sigma_0, \quad \langle \varepsilon \rangle = \sigma_0 / E(T) \quad (2.1)$$

Здесь  $\sigma$  — напряжение,  $\varepsilon$  — деформация, знаком  $\langle \rangle$  обозначается осреднение в упомянутом выше смысле. Продольные колебания стержня под действием дополнительной вибрационной нагрузки в силу их квазистатичности описываются уравнением

$$m \frac{d^2 \varepsilon'}{dt^2} + \eta \frac{d\varepsilon'}{dt} + E' \varepsilon' = \sigma^* \cos \omega t \quad (2.2)$$

Здесь  $\varepsilon'$  — вибрационная деформация,  $m = \rho l^2 / 2$ ,  $l$  — длина стержня,  $\rho$  — плотность материала (напомним, что, по предположению, материал под действием вибрационных нагрузок ведет себя как вязко-упругое тело). Учитывая, что характерное время изменения температуры, а значит, и модулей  $E'$  и  $E''$  много больше периода колебаний, можно записать решение уравнения (2.2), так, как, если бы эти модули были постоянными, в виде

$$\varepsilon' = \frac{\sigma^* \cos(\omega t - \delta)}{\{[E' - m\omega^2]^2 + E''^2\}^{1/2}}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{E''}{E' - m\omega^2} \quad (2.3)$$

При этом осредненная диссипация энергии в единице объема материала за единицу времени равна

$$Q = \frac{\sin \delta \omega \sigma^{*2}}{2\{[E' - m\omega^2]^2 + E''^2\}^{1/2}} \quad (2.4)$$

При длине стержня порядка десятков см величина  $m$  имеет порядок  $10^2$  г/см, величина  $\omega$  имеет порядок не более  $10^3$  сек<sup>-1</sup>, так что, в силу сказанного в предыдущем параграфе,  $E' \gg m\omega^2$ . Как отмечено в § 1,  $E'' \ll E'$  в практически интересном диапазоне температур. Поэтому  $\operatorname{tg} \delta \sim \sin \delta \sim E'' / E' \ll 1$ . Пренебрегая малыми величинами в (2.3) и (2.4), получаем

$$\varepsilon' = \frac{\sigma^* \cos \omega t}{E'(T)}, \quad Q = \frac{\sigma^{*2} \omega}{2} I''(T, \omega), \quad I'' = \frac{\sin \delta}{E'} = \frac{E''}{E'^2} = \frac{1}{2\pi} J'' \quad (2.5)$$

где  $I''$  — так называемая «податливость потерь» — величина, зависящая только от температуры и частоты, но не зависящая от напряжений. Пример позволяет сделать следующий вывод: инерционными и вязкими членами в динамическом уравнении для вибрационных деформаций можно пренебречь. Вибрационные деформации можно вычислять для материалов рассматриваемого типа в указанных выше диапазонах температур и частот по статическим соотношениям для упругого тела в соответствии с мгновенным значением упругого модуля  $E'(T)$ .

Существенно, что к этому выводу можно прийти путем оценки членов динамического уравнения (2.2), не выписывая его решения. В самом деле, порядок отношения первого (инерционного) члена левой части к третьему равен  $\rho \omega^2 l^2 / E' \ll 1$ , порядок отношения второго члена к третьему равен  $E'' / E' \ll 1$ , отсюда непосредственно вытекает (2.5).

§ 3. Опираясь на приведенные в предыдущем параграфе предварительные оценки, рассмотрим общий пространственный случай. Пусть тело, выполненное из полимерного материала рассматриваемого типа, находится под действием постоянных (или медленно меняющихся) объемных сил  $g^m$  и распределенных по некоторой части поверхности тела  $S_1$  поверхностных сил  $p^m$ ; на остальной части поверхности тела  $S_2$  заданы смещения  $u_0$ . Помимо указанных нагрузок, на тело действуют вибрационные нагрузки: объемная  $g^a \cos \omega t$  и поверхностная  $p^a \cos \omega t$ . Относительно вибрационных нагрузок сделаем следующие предположения.

1°. Амплитуды вибрационных нагрузок  $g^a$  и  $p^a$  малы сравнительно с основными нагрузками  $g^m$  и  $p^m$ .

2°. Периоды вибрационных нагрузок достаточно велики, чтобы можно было пренебречь динамическими эффектами, и достаточно малы сравнительно с характерным временем изменения основных нагрузок и температуры.

Переходя к выводу основных соотношений, сделаем две основные гипотезы.

*Первая гипотеза.* Влияние малых вибраций на процесс деформирования полимеров рассматриваемого типа обусловлено изменением характеристик медленного деформирования рассматриваемого материала под влиянием изменения температуры.

Разумеется, эта гипотеза сужает класс материалов и, быть может, частот, к которым применима развиваемая ниже теория. Как показывают эксперименты С. А. Шестерикова и А. М. Локощенко [3], выполненные на дюралюминии, и эксперименты Г. Л. Слонимского и П. И. Алексеева, выполненные на эластомерах [4] в условиях, исключая роль тепловых процессов, вибрационные нагрузки могут оказывать ускоряющее действие на процесс деформирования, не связанное с изменением температуры. Однако результаты, опубликованные в работе [1], и другие подобные опыты и расчеты показывают, что разогрев является основным фактором для материалов рассматриваемого типа.

*Вторая гипотеза.* Рассматриваемые материалы реагируют на вибрационные нагрузки как вязко-упругие тела, причем характеристики вязко-упругости: упругий модуль  $E'$  и модуль потерь  $E''$  зависят от температуры и не зависят от основного напряженного состояния.

Характеристики напряженно-деформированного состояния тела можно представить в виде

$$u_i = \langle u_i \rangle + u_i', \quad \sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle + \sigma_{ij}', \dots \quad (3.1)$$

Здесь знаком  $\langle \rangle$  по-прежнему обозначено значение величины, осредненное за промежуток времени, большой — сравнительно с периодом колебания, но малый — сравнительно с характерным временем изменения соответствующей величины; штрихом обозначена вибрационная составляющая. Подставляя (3.1) в основные динамические уравнения

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} + g_i^m + g_i^a \cos \omega t \quad (3.2)$$

$(g_i^m, g_i^a$  — компоненты векторов  $g^m, g^a$ ) и осредняя, получаем

$$\frac{\partial \langle \sigma_{i\alpha} \rangle}{\partial x_\alpha} + g_i^m = 0 \quad (3.3)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_i'}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{i\alpha}'}{\partial x_\alpha} + g_i^a \cos \omega t \quad (3.4)$$

При действии медленно меняющихся квазистатических нагрузок напряжения и деформации в теле связаны теми или иными реологическими соотношениями, в которые существенно входит температура. Примером может служить некоторая нелинейная модель, обобщающая модель терморологически простого тела, принятую в работе [5], для которой справедливы следующие зависимости между компонентами тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  и компонентами тензора малой деформации  $\varepsilon_{ij}$ :

$$s_{ij} = \frac{E(T)}{1+\nu} e_{ij} - \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{E[T(\tau)] e_{ij}(\tau)}{1+\nu} \right\} \Phi_1 [q(t) - q(\tau)] d\tau \quad (3.5)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{E(T)}{1-2\nu} [\varepsilon_{\alpha\alpha} - \beta(T - T_0)] - \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{E[T(\tau)] \varepsilon_{\alpha\alpha}(\tau)}{1-2\nu} \right\} \Phi_2 [q(t) - q(\tau)] d\tau$$

или

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E(T)} \left[ s_{ij} + \int_0^t \frac{ds_{ij}(\tau)}{d\tau} \Psi_1 [q(t) - q(\tau)] d\tau \right] \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \beta(T - T_0) + \frac{1-2\nu}{E(T)} \left[ \sigma_{\alpha\alpha} + \int_0^t \frac{d\sigma_{\alpha\alpha}(\tau)}{d\tau} \Psi_2 [q(t) - q(\tau)] d\tau \right]$$

Здесь

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3 \delta_{ij} \sigma_{\alpha\alpha}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - 1/3 \delta_{ij} \varepsilon_{\alpha\alpha}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad q(t) = \int_0^t F[T(\tau)] d\tau \quad (3.7)$$

Здесь  $F$  — некоторая функция температуры,  $T_0$  — температура окружающего пространства,  $\Phi_1, \Phi_2, \Psi_1, \Psi_2$  — соответственно сдвиговая и объемная релаксационные функции и функции ползучести, которые могут, вообще говоря, зависеть соответственно от инвариантов тензора деформаций и тензора напряжений. В частности, при  $\Phi_1 \equiv \Phi_2 \equiv \Psi_1 \equiv \Psi_2 \equiv 0$  получаются соотношения для обычного упругого тела с учетом термических напряжений

$$s_{ij} = \frac{E(T)}{1+\nu} e_{ij}, \quad \sigma_{\alpha\alpha} = \frac{E(T)}{1-2\nu} [\varepsilon_{\alpha\alpha} - \beta(T - T_0)] \quad (3.8)$$

В силу первой гипотезы, малые вибрации влияют на релаксационные функции и функции ползучести только через изменение температуры, и можно считать, что соотношения (3.5), (3.6) применимы для осредненных величин

$$\langle s_{ij} \rangle = \frac{E(T)}{1+\nu} \langle e_{ij} \rangle - \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{E[T(\tau)] \langle e_{ij}(\tau) \rangle}{1+\nu} \right\} \Phi_1 [q(t) - q(\tau)] d\tau$$

$$\langle \sigma_{\alpha\alpha} \rangle = \frac{E(T)}{1-2\nu} [\langle \varepsilon_{\alpha\alpha} \rangle - \beta(T - T_0)] - \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{E(T(\tau)) \langle \varepsilon_{\alpha\alpha}(\tau) \rangle}{1-2\nu} \right\} \Phi_2 [q(t) - q(\tau)] d\tau \quad (3.9)$$

$$\langle e_{ij} \rangle = \frac{1+\nu}{E(T)} \left[ \langle s_{ij} \rangle + \int_0^t \frac{d \langle s_{ij}(\tau) \rangle}{d\tau} \Psi_1 [q(t) - q(\tau)] d\tau \right]$$

$$\langle \varepsilon_{\alpha\alpha} \rangle = \beta(T - T_0) + \frac{1-2\nu}{E(T)} \left[ \langle \sigma_{\alpha\alpha} \rangle + \int_0^t \frac{d \langle \sigma_{\alpha\alpha}(\tau) \rangle}{d\tau} \Psi_2 [q(t) - q(\tau)] d\tau \right]$$

Далее, в уравнениях (3.4) инерционные члены имеют порядок  $\rho\omega^2 U$  ( $U$  — порядок амплитуды вибрационных смещений). В силу второй гипотезы, вибрационные напряжения  $\sigma_{ij}'$  связаны с вибрационными смещениями определяющими уравнениями вязко-упругого тела. Поэтому вполне аналогично § 2 можно показать, что первый член правой части уравнений (3.4) распадается на сумму членов, обусловливаемых упругостью и имеющих порядок  $E'(T)U/l^2$  ( $l$  — характерный размер тела), и членов, обусловливаемых вязкостью и имеющих порядок  $E''(T)U/l^2$ . Имея в виду указанные в § 1 порядки величин модулей  $E'$  и  $E''$  и интересующую нас область частот  $\omega$  до  $10^3 \text{ сек}^{-1}$ , можно пренебречь в уравнениях (3.4) вязким и инерционными членами. Полагаем теперь  $\sigma_{i\alpha}' = \sigma_{i\alpha}^a \cos \omega t$ ,  $u_i' = u_i^a \cos \omega t$ , где величины с индексом  $a$  (амплитуды) считаются медленно зависящими от времени, получаем для амплитуд обычную систему уравнений теории упругости

$$\frac{\partial \sigma_{i\alpha}^a}{\partial x_\alpha} + g_i^a = 0$$

$$\sigma_{i\alpha}^a = \frac{E'(T)}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_i^a}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha^a}{\partial x_i} \right) + \frac{E'(T)}{3(1+\nu)} \delta_{i\alpha} \frac{\partial u_\beta^a}{\partial x_\beta} + \frac{1}{3} \delta_{i\alpha} \frac{E'(T)}{1-2\nu} \frac{\partial u_\beta^a}{\partial x_\beta} \quad (3.10)$$

В силу второй гипотезы, величина  $E'$  не зависит от средних напряжений. Для замыкания системы (3.10) к ней необходимо добавить уравнение энергии. Уравнение энергии возьмем в форме [ср. [6]]

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\beta T}{3(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial t} E(T) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = \lambda \Delta T + Q \quad (3.11)$$

где  $\rho$ ,  $c$ ,  $\lambda$  — плотность, теплоемкость и теплопроводность материала соответственно,  $Q$  — мгновенная диссипация энергии в единице объема за единицу времени. Поскольку характерное время изменения температуры много больше периода колебаний, удобно использовать это уравнение в осредненном виде. Осредняя диссипацию, получим  $\langle Q \rangle = Q_1 + Q_2$ , где  $Q_1$  — средняя вязкая диссипация энергии от осредненного процесса деформирования,  $Q_2$  — средняя вязкая диссипация энергии от вибрационного поля, равная, как показано в [7],

$$Q_2 = \frac{\omega}{2} I'' [(\sigma_{\alpha\beta}^a - 1/3 \delta_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\gamma}^a)(\sigma_{\alpha\beta}^a - 1/3 \delta_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\gamma}^a) + 1/3 (\sigma_{\gamma\gamma}^a)^2] \quad (3.12)$$

где  $I''(T, \omega)$  — та же податливость потерь, что и в § 2, не зависящая, в

силу второй гипотезы, от средних напряжений. Оценки показывают, что сравнительно с  $Q_2$  можно пренебречь величиной  $Q_1$  и осредненным вторым членом левой части. Сохраняя для осредненной температуры обозначение  $T$ , запишем уравнение энергии в виде

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + \frac{\omega}{2} I'' \left[ \left( \sigma_{\alpha\beta}^a - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\gamma}^a \right) \left( \sigma_{\alpha\beta}^a - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\gamma}^a \right) + \frac{1}{3} (\sigma_{\gamma\gamma}^a)^2 \right] \quad (3.13)$$

Таким образом, получается, что в принятых предположениях система основных соотношений благодаря выпадению из уравнения энергии слагаемых, соответствующих осредненному процессу деформирования, распадается на две системы: систему (3.10), (3.13) для амплитуд напряжений и деформаций и температуры и систему (3.3), (3.9) для средних напряжений и деформаций, в которой температуру следует уже считать известной функцией координат и времени. Еще раз подчеркиваем, что модель (3.9) взята в качестве примера и может быть заменена другой.

Для системы (3.3), (3.9) имеют место граничные условия

$$\langle \sigma_{i\alpha} \rangle n_\alpha = p_i^m \quad \text{на } S_1, \quad \langle u_i \rangle = u_{0i} \quad \text{на } S_2 \quad (3.14)$$

где  $n_\alpha$  — компоненты единичного вектора нормали к поверхности тела;  $p_i^m$ ,  $u_{0i}$  — компоненты векторов  $p$ ,  $u_0$ . Для системы (3.10), (3.13) примем граничные условия в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{i\alpha}^a n_\alpha &= p_i^a \quad \text{на } S_1, \quad u_i^a = 0 \quad \text{на } S_2 \\ \partial T / \partial n + \theta (T - T_0) &= h \end{aligned} \quad (3.15)$$

Здесь  $\theta$  и  $h$  — некоторые функции точек поверхности тела,  $\partial / \partial n$  — производная по нормали к поверхности тела, а также начальное условие

$$T = T_0 \quad \text{при } t = 0 \quad (3.16)$$

§ 4. Остановимся на некоторых задачах, естественно возникающих в связи с изложенным выше общим исследованием.

1°. В качестве первого примера рассмотрим одномерную задачу деформирования круглого цилиндрического стержня постоянной средней нагрузкой под действием малой вибрационной догрузки, предполагая все характеристики процесса деформирования равномерно распределенными по сечению стержня. Соотношение (3.9) принимает в этом случае вид

$$\langle \epsilon \rangle = \beta (T - T_0) + \frac{1}{E(T)} \{ \sigma_0 + \sigma_0 \Psi_1 [q(t), \sigma_0] \} \quad (4.1)$$

$$q(t) = \int_0^t F [T(\tau)] d\tau \quad (4.2)$$

Здесь  $\sigma_0$  — действующее постоянное среднее напряжение; функция  $F$  предполагается известной. Уравнение энергии следует взять в упрощенной форме, — поскольку температура  $T$  также считается осредненной по сечению стержня, все тепловое сопротивление нужно считать сосредоточенным на боковой поверхности стержня. Подобный осредненный подход при исследовании вибрационного разогрева полимеров был применен С. Б. Ратнером и В. И. Коробовым [8], впервые рассмотревшими задачу о вибрационном разогреве полимеров при отсутствии среднего поля напряжений. Получаем

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\sigma_0^2 \omega}{2\rho c} I''(T, \omega) - \frac{2\alpha}{\rho c r_0} (T - T_0) \quad (4.3)$$

Здесь  $\alpha$  — коэффициент теплообмена на поверхности стержня,  $\sigma^*$  — амплитуда напряжений,  $\omega$  — частота,  $r_0$  — радиус стержня.

Решение уравнения (4.3) при начальном условии (3.16) определяет функцию  $T(t)$ , подстановка которой в (4.1) дает зависимость средней деформации от времени. Функции  $\Psi$  и  $F$  определяются аналогично [1] по данным испытаний при отсутствии вибрационных догрузок при различных постоянных температурах и том же постоянном напряжении  $\sigma_0$ . Излагаемая здесь трактовка несколько отличается от данной в работе [1].

2°. При исследовании динамической устойчивости (детальное изложение вопроса можно найти в монографии В. В. Болотина [9]), к телу, находящемуся в исследуемом состоянии упругого равновесия, прикладывают малые вибрационные догрузки и рассматривают получающееся движение; если движение не выводит тело из близкой окрестности невозмущенного состояния] равновесия, то это состояние равновесия устойчиво, если выводит — неустойчиво. Однако для полимерных материалов вибрации, даже весьма малые по амплитуде сравнительно с основными действующими нагрузками, могут привести к существенному разогреву и изменению упругих констант. Поэтому корректное рассмотрение динамической устойчивости для таких материалов должно, вообще говоря, проводиться на основе нелинейной постановки, развитой в предыдущем параграфе.

Рассмотрим, оставляя пока в стороне явления типа параметрического резонанса, показательный пример круглого цилиндрического стержня, жестко заделанного на краях и сжатого продольной силой —  $P_0$ .

Приложим к стержню дополнительную продольную вибрационную нагрузку  $P^* = \sigma^* S \cos \omega t$ , амплитуду колебаний напряжения  $\sigma^*$  по-прежнему считаем малой сравнительно с основным напряжением  $\sigma_0$ . Тривиальное решение (2.1), описывающее прямолинейную форму равновесия стержня, становится неустойчивым, если

$$P_0 > P_c = \frac{4\pi^2 E(T) I}{l^2} \quad (4.4)$$

где  $I$  — момент инерции поперечного сечения стержня,  $l$  — его длина.

Уравнение для температуры снова возьмем в форме (4.3). Решение  $T(t)$  уравнения (4.3) при начальном условии (3.16) представляет собой монотонно возрастающую функцию, изменяющуюся от  $T = T_0$  до некоторого  $T = T_1$ , где величина  $T$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\sigma^{*2} \omega}{2} I''(T_1, \omega) - \frac{2\alpha}{r_0} (T_1 - T_0) = 0 \quad (4.5)$$

При возрастании температуры модуль Юнга  $E(T)$  уменьшается, так что если при некотором  $T \leq T_1$  значение модуля  $E(T)$  оказывается меньше  $P_0 l^2 / 4\pi^2 I$ , то сила  $P_0$  становится сверхкритической и происходит выпучивание — потеря устойчивости стержня. Численные оценки показывают, что это может иметь место при амплитудах колебания [напряжений, малых сравнительно с основным напряжением. Например, возьмем стержень длиной  $l = 200$  см и площадью поперечного сечения  $S = 100$  см<sup>2</sup>. Момент инерции поперечного сечения стержня  $I$  примерно равен 800 см<sup>4</sup>, так что, взяв <sup>1</sup> модуль упругости  $E$  при  $T = 20^\circ$  С равным  $2.5 \cdot 10^{10}$  дин/см<sup>2</sup>, получаем критическую силу  $P_c = 20$  т при  $T = 20^\circ$  С. Возьмем продольную силу  $P_0 = 10$  т — половине критической. Примем значение коэффициента теплоотдачи  $\alpha = 20$  эрг/см<sup>2</sup> сек<sup>°</sup>С, тогда расчет показывает, что уже при  $\sigma^* = 4 \cdot 10^6$  дин/см<sup>2</sup>  $\sim \sim 4$  кг/см<sup>2</sup> и циклической частоте  $\omega = 10^3$  сек<sup>-1</sup> (что соответствует частоте  $\sim 150$  циклов в сек) температура стержня, увеличиваясь, достигает через некоторое время  $100^\circ$  С, модуль упругости уменьшается вдвое, действующая сила становится сверхкритической и происходит выпучивание стержня. Подчеркнем, что действие вибраций сильно возрастает с увеличением исходной температуры.

<sup>1</sup> Здесь и далее для иллюстрации пользуемся данными для полистирола.

3°. В заключение выскажем некоторые качественные соображения по поводу применения развитых выше общих соображений к исследованию влияния вибраций на прочность полимеров.

В полимерных материалах, как и вообще в большинстве твердых тел, имеются многочисленные трещины (или, быть может, другие концентраторы напряжений). Малые вибрации нагрузок создают вблизи краев трещин вибрационные напряжения с большими амплитудами и, следовательно, высокие интенсивности тепловыделения, а ввиду низкой теплопроводности — и существенное локальное повышение температуры вблизи краев трещин. Как известно<sup>[10, 11]</sup> в полимерных материалах противоположные берега трещин вблизи их концов связаны между собой тонкими нитями, напряжения в которых в основном и определяют силы сцепления, препятствующие распространению трещин (фиг. 3). Деформирование этих нитей согласно кинетическим представлениям С. Н. Журкова, происходит со скоростью, пропорциональной

$$\exp \left[ - \frac{U - \gamma \sigma}{RT} \right] \quad (4.6)$$

где  $U$  — энергия активации,  $\gamma$  — константа материала,  $\sigma$  — напряжение в нити,  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $T$  — температура. Как видно из (4.6), повышение вследствие вибрации температуры вблизи концов трещин сильно меняет скорость деформирования нитей, а значит, и силы сцепления и их интегральную характеристику — модуль сцепления. Повышение температуры, будучи локальным, может даже не сказаться на ускорении деформирования во всем объеме тела, однако это локальное повышение температуры меняет, в соответствии с достигаемой вблизи концов трещин температурой, модуль сцепления и, тем самым, оказывает влияние на прочность. Влияние на прочность локального разогрева вблизи краев трещины при вибрационных нагрузках было впервые отмечено Г. М. Бартевым<sup>[12]</sup>.

Автор весьма признателен Н. И. Малинину за ценные обсуждения.

Поступила 19 X 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Козырев Ю. И., Малинин Н. И., Павлов Д. Я., Шестериков С. А. О виброползучести полимерных материалов. ПМТФ, 1965, № 5.
2. Такауагаги М. Viscoelastic properties of crystalline polymers. Mem. Fac. Engng, Kyushu Univ. 1963, t. 23, No 1.
3. Локощенко А. М., Шестериков С. А. О виброползучести. ПМТФ, 1965, № 6.
4. Слонимский Г. Л., Алексеев П. И. Исследование эффекта вибраций на релаксационные процессы в резине. Докл. АН СССР, 1956, т. 106, № 6.
5. Hunter S. C. Tentative equations for the propagation of stress, strain and temperature field in viscoelastic solids. J. Mech. Phys. Solids, 1961, vol. 9, No 1.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1953.
7. Vland D. R. The theory of linear viscoelasticity. Pergamon press, 1960.
8. Ратнер С. Б., Коробов В. И. Саморазогрев полимеров при многократной деформации. Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 4.
9. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, 1956.
10. Бессонов М. И., Кувшинский Е. В. Трещины в прозрачных пластмассах, их рост и строение. Физ. твердого тела, 1959, т. I, № 9.
11. Frank F. C. The strength of polymers. Proc. Roy. Soc., 1964 г., vol. 282, No. 1388.
12. Бартев Г. М., Паншин Б. И., Разумовская И. В., Финюгов Г. Н. О долговечности органического стекла при циклических нагрузениях. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 6.