

## ОБ ИДЕАЛИЗАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ СОПРИКОСНОВЕНИЯ В ВИДЕ ТОЧЕЧНОГО КОНТАКТА В ЗАДАЧАХ КАЧЕНИЯ

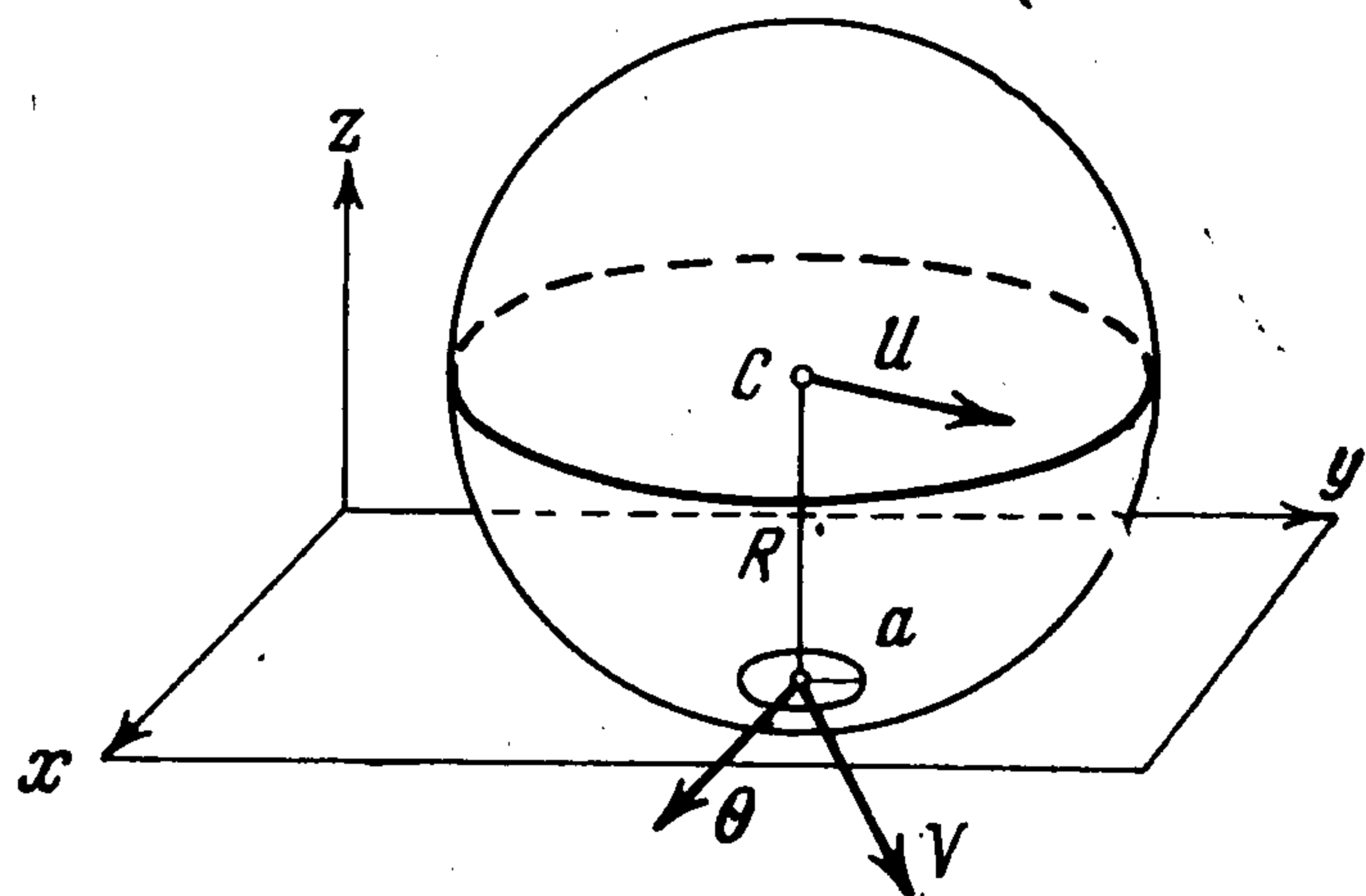
Н. А. Фуфаев

(Горький)

Во многих задачах о качении твердого тела по поверхности обычно используется предположение о точечном контакте [1-5]. Однако обычно площадь соприкосновения поверхностей имеет хотя и малое, но отличное от нуля значение, поэтому введение в механику понятия точечного контакта является определенной идеализацией, которая служит для упрощения математической модели реальной системы. Во многих случаях, особенно в задачах статики, такая идеализация вполне себя оправдывает. В динамике ситуация может оказаться иной, а именно: величина площади контакта, которую устремляем к нулю, войдет в дифференциальные уравнения движения в виде малого параметра, и тогда заранее неясно, будет ли предельное движение тела совпадать с движением предельной системы (т. е. тела с точечным контактом).

В настоящей работе этот вопрос изучается на примере движения однородного шара по шероховатой плоскости. Исследование динамики системы показывает, что движение шара с поверхностным контактом обладает качественной особенностью, которая сохраняется и при стремлении площади поверхности контакта к нулю. Вместе с тем, выясняется, что траектория центра шара с поверхностным контактом при стремлении площади контакта к нулю приближается к траектории центра шара с точечным контактом.

**§ 1. Постановка задачи и уравнения движения.** Рассмотрим движение по инерции однородного тяжелого шара на горизонтальной шероховатой плоскости. Пусть радиус  $a$  площадки контакта шара с плоскостью много меньше радиуса  $R$  шара. В этом случае кривизной поверхности контакта можно пренебречь и считать, что давление на площадь контакта распределено равномерно. Введем неподвижную систему координат  $Oxyz$  (фиг. 1) и следующие обозначения:  $U(u, v, 0)$  — скорость центра шара,  $\omega$  ( $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ) — угловая скорость вращения шара,  $m$  — масса,  $\rho$  — радиус инерции шара,  $F$  ( $F_x, F_y, 0$ ) — результирующая сила трения,  $M$  — момент сил трения относительно вертикальной оси, проходящей через центр площадки контакта,  $V$  ( $V \cos \theta, V \sin \theta, 0$ ) — скорость точки шара, совпадающей с центром площадки контакта. В этих обозначениях уравнения движения имеют вид



Фиг. 1

$$m \frac{du}{dt} = F_x, \quad m \frac{dv}{dt} = F_y \quad (1.1)$$

$$m\rho^2 \frac{d\omega_x}{dt} = RF_y, \quad m\rho^2 \frac{d\omega_y}{dt} = -RF_x, \quad m\rho^2 \frac{d\omega_z}{dt} = M$$

К этим уравнениям добавляются кинематические соотношения

$$V \cos \theta = u - R\omega_y, \quad V \sin \theta = v + R\omega_x \quad (1.2)$$

которые в случае качения шара без проскальзывания ( $V=0$ ) превращаются в уравнения неголономной связи. Из уравнений (1.1), (1.2) непосредственно следует, что при движении без проскальзывания центр шара перемещается по прямой с постоянной скоростью, как и в случае точечного контакта. Будем предполагать, что силы взаимодействия шара с плоскостью являются силами Кулонова (сухого) трения. Обозначим через  $\kappa$  коэффициент сухого трения. После вычислений, аналогичных приведенным в книге А. И. Лурье [6], получим

$$F = -\frac{4}{3\pi} mg\kappa k f_1(k), \quad M = -\frac{4}{9\pi} mg\kappa a f_3(k) \quad \text{при } V \leq a\omega_z \quad (1.3)$$

$$F = -\frac{4}{3\pi} mg\kappa f_1(k_1), \quad M = -\frac{4}{9\pi} mg\kappa a f_2(k_1) \quad \text{при } V \geq a\omega_z$$

Здесь функции

$$f_1(k) = (k^{-2} + 1)E(k) - (k^{-2} - 1)K(k) \quad (k = 1/k_1 = V/a\omega_z)$$

$$f_2(k) = k^{-1} [(4 - 2k^{-2})E(k) - (k^{-2} - 1)(3k^2 - 2)K(k)] \quad (1.4)$$

$$f_3(k) = (4 - 2k^2)E(k) - (1 - k^2)K(k)$$

выражены через полные эллиптические интегралы  $K(k)$  и  $E(k)$  от модуля  $k$ .

Продифференцируем по времени соотношения (1.2) и заменим производные в правых частях их выражениями (1.1). Подставляя затем  $F_x = F \cos \theta$ ,  $F_y = F \sin \theta$  и разрешая полученные уравнения относительно производных, имеем

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{m} \left(1 + \frac{R^2}{\rho^2}\right) F, \quad V \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (1.5)$$

Из второго уравнения (1.5) следует, что  $\theta = \theta_0 = \text{const}$ , т. е. направление скорости скольжения центра площадки контакта сохраняется неизменным. Первое уравнение (1.5) и последнее уравнение (1.1) вместе с (1.3) и (1.4) образуют замкнутую систему уравнений, к исследованию которой и сводится изучение движений шара с проскальзыванием. Для упрощения записи введем обозначения

$$\Omega = a\omega_z, \quad \mu = \frac{a^2}{3(R^2 + \rho^2)}, \quad \tau = \frac{4g\kappa}{3\pi} \left(1 + \frac{R^2}{\rho^2}\right) t \quad (1.6)$$

Здесь  $\tau$  — новое время.

В этих обозначениях полученные уравнения примут вид

$$V' = -k f_1(k), \quad \Omega' = -\mu f_3(k) \quad \text{при } V \leq \Omega \quad (1.7)$$

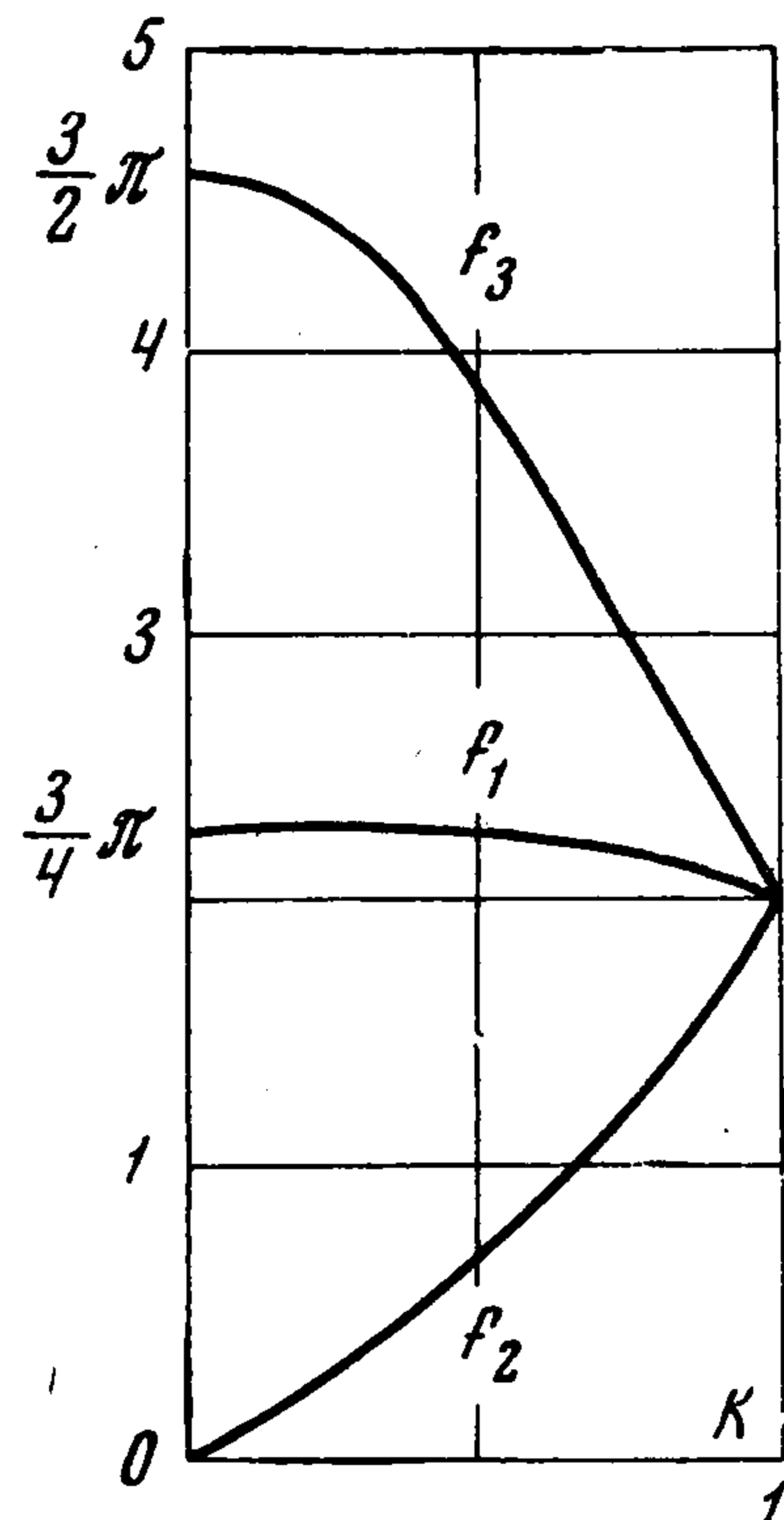
$$V' = -f_1(k_1), \quad \Omega' = -\mu f_2(k_1) \quad \text{при } V \geq \Omega \quad (1.8)$$

$\left(k = \frac{1}{k_1} = \frac{V}{\Omega}\right)$

Здесь точки обозначают дифференцирование по новому времени  $\tau$ ; функции  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  определяются выражениями (1.4). Из уравнений (1.7), (1.8) следует, что динамику рассматриваемой системы определяет единственный параметр  $\mu$ , пропорциональный площади поверхности контакта.

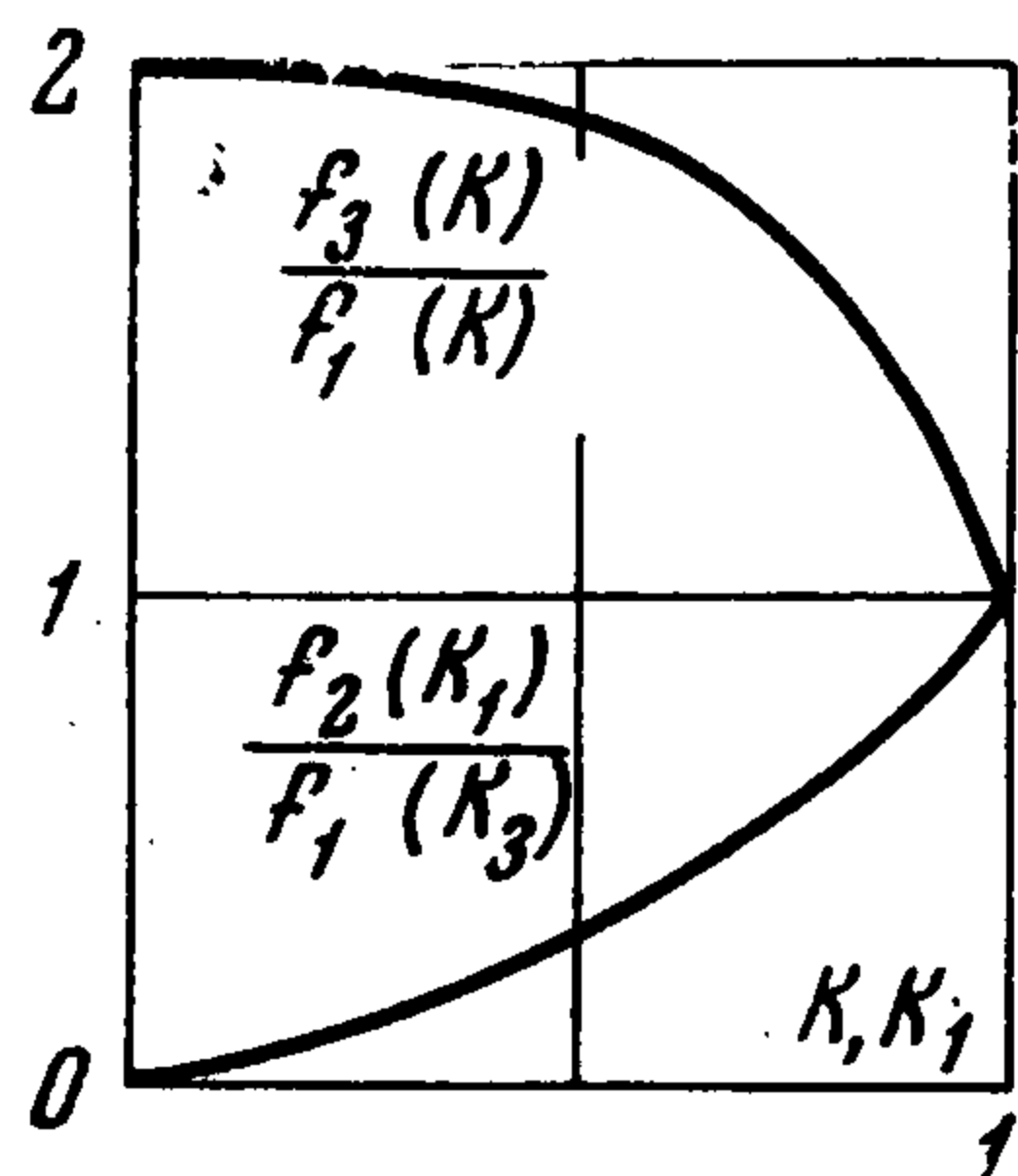
§ 2. Движение шара с проскальзыванием. В соответствии с системой (1.7), (1.8), движению шара с проскальзыванием можно сопоставить движение изображающей точки в первом квадранте плоскости  $V\Omega$ . Этот квадрант разбивается биссектрисой  $\Omega = V$  на области  $S$  и  $S_1$ ; в области  $S$  движение изображающей точки описывается уравнениями (1.7), а в области  $S_1$  — уравнениями (1.8). На границе  $\Omega = V$  решения уравнений (1.7) и (1.8) «сшиваются» по условию непрерывности. Исследование (см. § 4. Приложение) поведения функций  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$  дает кривые, показанные на фиг. 2. Отсюда и из уравнений (1.7), (1.8) следует, что с течением времени величины  $V$  и  $\Omega$  монотонно убывают. Рассмотрим качественное поведение интегральных кривых на плоскости  $V, \Omega$ , уравнения которых имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dV} &= \mu \frac{f_3(k)}{kf_1(k)} \quad \left(k = \frac{V}{\Omega}\right) \quad (V \leq \Omega) \\ \frac{d\Omega}{dV} &= \mu \frac{f_2(k_1)}{f_1(k_1)} \quad \left(k_1 = \frac{\Omega}{V}\right) \quad (V \geq \Omega) \end{aligned} \quad (2.1)$$



Фиг. 2

Семейством изоклин является пучок прямых, проходящих через начало координат. В соответствии с фиг. 2, функции, входящие в правые части уравнений (2.1) и (2.2), изображаются кривыми, показанными на фиг. 3. Эти кривые позволяют сопоставить угол наклона касательной к интегральной кривой с углом наклона соответствующей изоклины и, тем самым, построить векторное поле касательных на плоскости  $V\Omega$  при различных значениях параметра  $\mu$  ( $0 \leq \mu < \infty$ ).



Фиг. 3

При значениях  $\mu$  в интервале ( $1/2 < \mu < 8/3$ ) одна из интегральных кривых является прямой, проходящей через начало координат. Разбиение плоскости  $V\Omega$  на траектории для малых значений  $\mu$  ( $\mu \leq 1$ ) показано на фиг. 4, откуда видно, что все траектории приходят в начало координат. Оси координат  $\Omega = 0$  и  $V = 0$  также будут траекториями движения изображающей точки.

Проведенное рассмотрение позволяет сделать следующий вывод: при любых начальных условиях, при которых скорость  $V$  проскальзывания и угловая скорость  $\omega_z$  вращения шара отличны от нуля, шар с поверхностным контактом движется так, что верчение и скольжение, уменьшаясь со временем, всегда прекращаются одновременно.

§ 3. Предельное движение шара при стремлении площади поверхности контакта к нулю. Движение шара с точечным контактом (предельная система) описывается уравнениями (1.8), в которых нужно сделать предельный переход  $a \rightarrow 0$ . Тогда из второго уравнения (1.8) получаем  $\omega_z = \text{const}$ , а из первого уравнения находим  $V = V_0 - 3/4 \pi t$ . На

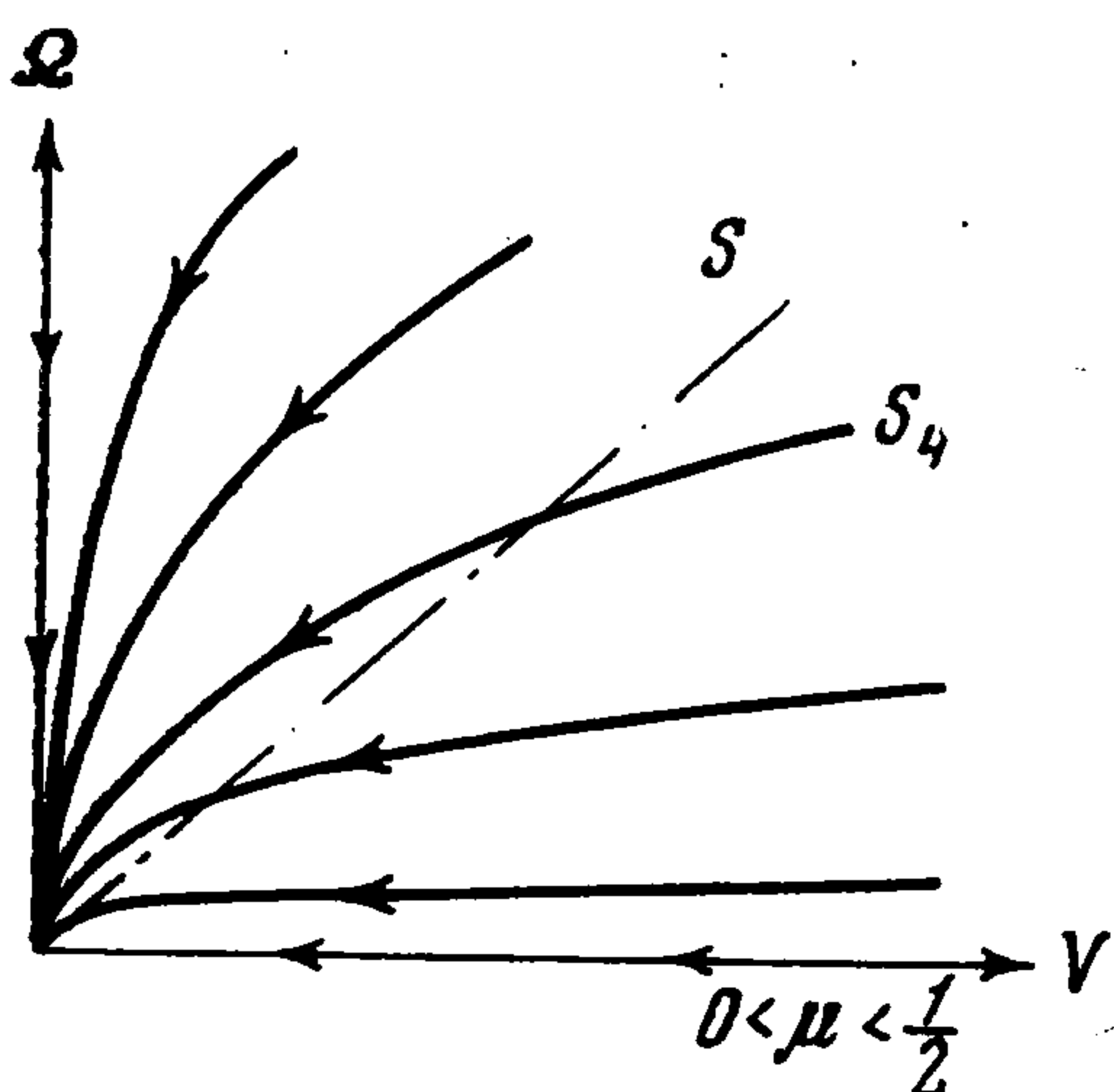
плоскости  $(V, \Omega)$  изображающая точка перемещается по оси  $\Omega = 0$ , достигая начала координат за конечный интервал времени  $T^0 = \frac{4}{3} V_0 / \pi$ . При этом центр шара описывает параболу, а по истечении времени  $T^0$  движется по прямой.

Рассмотрим движение шара с поверхностным контактом при стремлении площади контакта к нулю. Движение шара в этом случае описывается системой уравнений (1.7), (1.8), в которых  $0 < \mu \ll 1$ . Запишем эту систему в виде одного уравнения

$$d\Omega / dV = \mu \Phi(k) \quad (k = V / \Omega) \quad (3.1)$$

Функция  $\Phi(k)$ , как следует из фиг. 3 и правых частей уравнений (2.1), (2.2), изображается кривой, которая заключена между гиперболами  $3/8k$  и  $2/k$ . Поэтому [7] решение уравнения (3.1) заключено между решениями

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \Omega_0 (V / V_0)^{3/8\mu} \\ \Omega_2 &= \Omega_0 (V / V_0)^{2\mu} \end{aligned} \quad (3.2)$$



Фиг. 4

Здесь  $\Omega_0, V_0$  — начальные значения. Из фиг. 4 следует, что при любых начальных условиях, при которых  $\Omega_0 \neq 0$ , изображающая точка всегда приходит в область  $S$ . Оценим время  $T_1$  движения изображающей точки в области  $S$ , если в начальный момент точка находится на границе областей  $S_1$  и  $S_4$ . В этом случае  $V_0 = \Omega_0$ , и решения (3.2) записываются в виде

$$\Omega_1 = \Omega_0^{(1-3/8\mu)} V^{3/8\mu}, \quad \Omega_2 = \Omega_0^{(1-2\mu)} V^{2\mu} \quad (3.3)$$

Первое уравнение (1.7) мажорируется уравнениями  $V' = -3/4\pi k$  и  $V' = -2k$ . Подставляя сюда решения (3.3), получаем

$$V' = -ACV^{(1-B)} \quad (3.4)$$

Здесь постоянные  $A, B, C$  равны соответственно одному из двух чисел

$$A = 2, \quad 3/4\pi; \quad B = 3/8\mu, \quad 2\mu; \quad C = \Omega_0^{(3/8\mu-1)}, \quad \Omega_0^{(2\mu-1)} \quad (3.5)$$

Решение уравнения (3.4) имеет вид

$$V^B = \Omega_0^B - ABC\tau \quad (3.6)$$

Полагая здесь  $V = 0$ , находим время  $\tau = T_1$  перехода изображающей точки от границы  $\Omega_0 = V_0$  до начала координат. В соответствии с (3.5), время  $T_1$  заключено в интервале

$$\frac{2\Omega_0^{(1-3/8\mu)}}{3\pi\mu} < T_1 < \frac{4\Omega_0^{(1+3/8\mu)}}{3\pi\mu} \quad (3.7)$$

Согласно (1.6), отсюда следует, что  $\lim T_1 = \infty$  при  $a \rightarrow 0$ . Таким образом, при сколь угодно малой, но отличной от нуля площади контакта время движения шара с проскальзыванием становится сколь угодно большим.

В этом можно видеть качественное отличие движения шара с поверхностным контактом исчезающе малой площади от движения шара с точечным контактом.

Для длины пути  $s$  при движении изображающей точки в области  $S'$  имеем

$$s = \int_0^{T_1} V d\tau = - \int_{V_0}^0 \frac{V dV}{ACV^{(1-B)}} = \frac{1}{AC} \int_0^{\Omega} V^B dB = \frac{\Omega_0^{(1-B)}}{AC(1+B)} \quad (3.8)$$

Здесь для  $d\tau$  использовалось выражение (3.4). Из равенства (3.8) следует, что  $\lim s = 0$  при  $a \rightarrow 0$ , т. е. при  $a \rightarrow 0$  траектория центра шара с поверхностным контактом приближается к траектории шара с точечным контактом.

§ 4. Приложение. Сначала заметим, что на интервале  $0 \leq x \leq 1$  функция  $K(x)$  представляет кривую, монотонно возрастающую от значения  $K(0) = 1/2 \pi$  до бесконечности. Производная

$$\frac{dK}{dx} = \frac{1}{x} \left[ \frac{1}{1-x^2} E - K \right] > 0$$

монотонно возрастает от нуля до бесконечности. Функция  $E(x)$  представляет кривую, монотонно убывающую от значения  $E(0) = 1/2 \pi$  до  $E(1) = 1$ . Производная

$$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{x} (E - K) < 0$$

монотонно убывает от нуля до  $-\infty$ .

Из (1.4) следует, что  $f_1(1) = f_2(1) = f_3(1) = 2$ . Далее,

$$f_1(0) = \frac{3}{4} \pi, \quad f_1'(x) = - \frac{2}{x^2} \left[ \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) E - (1 - x^2) K \right] > 0$$

потому что функция

$$\varphi(x) \equiv (1 - 1/2 x^2) E - (1 - x^2) K > 0$$

В самом деле

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(x) = 3/2 x (K - E) > 0$$

Вычисляя вторую производную, находим

$$f_1''(x) = - \frac{6}{x^4} \left[ \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) K - E \right] < 0$$

Действительно, функция  $\varphi_1(x) \equiv (1 - 1/2 x^2) K - E$  [всюду на интервале  $0 \leq x \leq 1$  положительна, так как

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_1'(x) = \frac{x}{2} \left( \frac{1}{1-x^2} E - K \right) > 0$$

Таким образом, функция  $f_1(x)$  будет монотонно убывающей, первая производная которой от значения  $f_1'(0) = 0$  монотонно уменьшается до значения  $f_1'(1) = -1$ .

Исследуем поведение функции  $f_2(x)$ . Находим

$$f_2(0) = 0, \quad f_2'(x) = \frac{6}{x^4} \left[ \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) E - (1 - x^2) K \right] > 0$$

потому что функция  $\varphi_2(x) \equiv (1 - 1/2 x^2) E - (1 - x^2) K$  положительна. Действительно,

$$\varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_2'(x) = 3/2 x (K - E) > 0$$

Вторая производная также положительна

$$f_2''(x) = \frac{3}{x^5} [(8 - 3x^2)K - (8 - x^2)E] > 0$$

так как функция  $\varphi_3(x) \equiv (8 - 3x^2)K - (8 - x^2)E$  положительна. Действительно,

$$\varphi_3(0) = 0, \quad \varphi_3'(x) = x \left( \frac{8 - 3x^2}{1 - x^2} E - 4K \right) > 0$$

потому что выражение в скобках является суммой двух положительных слагаемых

$$\frac{8 - 3x^2}{1 - x^2} E - 4K = 4 \left( \frac{1}{1 - x^2} E - K \right) + \frac{4 - 3x^2}{1 - x^2} E$$

Таким образом, функция  $f_2(x)$  будет монотонно возрастающей от значения  $f_2(0) = 0$  до значения  $f_2(1) = 2$ . Первая производная также возрастает монотонно от значения  $f_2'(0) = \frac{9}{32}\pi$  до значения  $f_2'(1) = 3$ .

Наконец, исследуем поведение функции  $f_3(x)$ . Находим

$$f_3(0) = \frac{3\pi}{2}, \quad f_3'(x) = -\frac{3}{x} [(1 - x^2)K - (1 - 2x^2)E] < 0$$

так как функция  $(1 - x^2)K - (1 - 2x^2)E = (1 - x^2)(K - E) + x^2E$  положительна. Далее,

$$f_3''(x) = \frac{3}{x} [(1 + 2x^2)K - (1 + 4x^2)E], \quad f_3''(0) = -\frac{9\pi}{4} < 0, \quad f_3''(1) = +\infty$$

Функция  $f_3''(x)$  обращается в нуль только один раз, потому что

$$f_3'''(x) = \frac{3}{x^4} \left( \frac{1}{1 - x^2} E - K \right) > 0$$

Таким образом, кривая  $f_3 = f_3(x)$  выходит из точки  $(0, \frac{3}{2}\pi)$  с нулевым углом наклона касательной. Угол наклона затем убывает и после точки  $x = x^0$ , где  $x^0$  — корень уравнения  $(1 + 2x^2)K = (1 + 4x^2)E$  возрастает до значения, при котором производная равна  $f_3'(1) = -3$ .

Поступила 12 VII 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R o u t h E. J. The advanced part of a Treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. London, 1884.
2. Ч а п л ы г и н С. А. Исследования по динамике неголономных систем. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
3. C o r i o l i s G. Theorie mathématique des effets du Jeu de Billard, Paris, 1835.
4. Н е м м и н г G. H. Billiards Mathematically treated. London, 1899.
5. S i n g e E. J. Principles of Mechanics. Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New-York—London, 1942.
6. Л у р ь е А. И. Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
7. Ч а п л ы г и н С. А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Собр. соч., т. I. М.—Л., Гостехиздат, 1948.