Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

К ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С ПОЛОСТЯМИ, НАПОЛНЕННЫМИ ЖИДКОСТЬЮ

В. В. Румянцев

(Москва)

В статье из принципа наименьшего действия в форме Гамильтона — Остроградского выводятся уравнения Лагранжа движения твердого тела, имеющего полости, целиком или частично наполненные идеальной жидкостью, обладающей поверхностным натяжением. Рассматриваются первые интегралы этих уравнений.

Далее из уравнений движения выводятся условия, при которых имеют место равновесие или стационарное движение твердого тела с жидкостью, сводящиеся к условиям экстремальности (стационарности) потенциальной энергии П или измененной потенциальной энергии системы W. Ранее [1] были даны постановка задачи об устойчивости твердого тела с жидкостью, обладающей поверхностным натяжением, и теоремы, сводящие решение вопроса об устойчивости к задаче минимума П (или W). В практически интересных случаях задача минимума W решается исследованием второй вариации $\delta^2 W$, вывод выражения которой приводится ниже.

В нелинейной постановке доказывается теорема о неустойчивости положения равновесия тела с жидкостью в случае, когда потенциальная энергия системы не имеет минимума в положении равновесия.

1. Представим себе абсолютно твердое тело, имеющее полость, частично или целиком заполненную идеальной однородной несжимаемой жидкостью. Тело и жидкость в его полости будем рассматривать как одну механическую систему и изучать ее движение по отношению к неподвижной (инерциальной) системе осей координат $O'x_1'x_2'x_3'$. Кроме того, введем в рассмотрение подвижную систему осей координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с твердым телом, с началом в некоторой точке O тела. Вектор-радиус какой-либо точки P_ν системы относительно точки O' обозначим через $\mathbf{r}_\nu'$, а относительно точки O — через $\mathbf{r}_\nu$. Абсолютную скорость точки P_ν можно представить в виде

$$\mathbf{v}_\nu = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\nu + \mathbf{u}_\nu$$

где $\mathbf{v}_0$ — вектор скорости точки O тела, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор его мгновенной угловой скорости, $\mathbf{u}_\nu = d\mathbf{r}_\nu / dt$ — вектор относительной скорости точки P_ν в ее движении относительно тела. Очевидно, для точек твердого тела $\mathbf{u}_\nu = 0$. Кинетическая энергия системы T слагается из кинетических энергий тела T_1 и жидкости T_2, причем

$$T_1 = {}^1/_2 M_1 \mathbf{v}_0^2 + M_1 \mathbf{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) + {}^1/_2 \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\omega}, \qquad T_2 = \rho \int_\tau T^\circ \, d\tau \qquad (1.1)$$

Поясним обозначения: M_1 и $\mathbf{r}_1$ — масса и вектор-радиус центра масс твердого тела, $\Theta^{(1)}$ — тензор инерции тела для точки O, $T^0 = {}^1/_2 v^2$ —

плотность кинетической энергии жидкости, τ — объем пространства $x_1x_2x_3$, занятый жидкостью в данный момент времени, ρ — плотность жидкости. Объем τ ограничен стенками σ_1 полости, с которыми жидкость соприкасается в данный момент времени, и свободной поверхностью S (если жидкость частично заполняет полость), уравнение которой можно представить в виде

$$f(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \tag{1.2}$$

Поверхность σ стенок полости делится при этом, вообще говоря, на поверхность σ_1, с которой в данный момент соприкасается жидкость, и на поверхность σ_2, с которой соприкасается воздух. Границей этих двух частей поверхности σ является линия l пересечения поверхности S с поверхностью σ. Если свободная поверхность жидкости S не пересекается со стенками полости σ, то очевидно линии l не существует. В дальнейшем будем предполагать, что поверхность S является гладкой или состоит из конечного числа кусков гладких поверхностей.

Массой и движением воздуха в полости, частично заполненной жидкостью, будем пренебрегать, считая давление воздуха p_0 постоянным.

Далее будем предполагать, что рассматриваемое твердое тело с жидкостью стеснено некоторыми идеальными геометрическими связями или является свободным. Число степеней свободы тела обозначим через $n (n \leqslant 6)$.

Положение системы будем определять лагранжевыми координатами тела q_j $(j = 1, \ldots, n)$ и декартовыми координатами частиц жидкости x_i $(i = 1, 2, 3)$. При этом векторы $\mathbf{v}_0$ и $\boldsymbol{\omega}$ можно представить в виде некоторых линейных функций обобщенных скоростей $q_j^{\cdot}$ с коэффициентами, зависящими от обобщенных координат q_j. Используя эти выражения и подставляя их в формулы (1.1), кинетическую энергию тела и плотность кинетической энергии жидкости представим в виде функций второй степени от $q_j^{\cdot}$ и u_i

$$T_1 = T_1(q_j^{\cdot}, q_j, t), \qquad T^\circ = T^\circ(q_j^{\cdot}, q_j, u_i, x_i, t)$$

Вектор заданной активной силы, приложенной к некоторой точке системы, обозначим через $\mathbf{F}_\nu$. Среди этих сил будем различать силы, действующие на точки твердого тела, массовые силы, действующие на жидкость, и силы поверхностного натяжения.

Следуя концепции Гаусса, будем считать, что вследствие соприкосновения вдоль некоторой поверхности двух разнородных сред r и s возникают силы натяжения, имеющие потенциал, равный произведению площади поверхности соприкосновения на коэффициент поверхностного натяжения α_{rs}, зависящий от природы обеих сред, причем, очевидно, $\alpha_{rs} = \alpha_{sr}$. В рассматриваемом случае твердого тела с жидкостью таких разнородных сред, вообще говоря, три: твердое тело, жидкость и воздух, которым будем приписывать индексы 1, 2, 3 соответственно. Для краткости будем обозначать $\alpha = \alpha_{23}$, $\alpha_1 = \alpha_{12}$, $\alpha_2 = \alpha_{13}$. Эти коэффициенты в дальнейшем считаются постоянными.

Для вывода уравнений движения твердого тела с жидкостью воспользуемся принципом наименьшего действия в форме Гамильтона — Остроградского. Учитывая условие несжимаемости жидкости, запишем принцип в виде [2]

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\Bigl(\delta T+\sum_{\nu}\mathbf{F}_\nu\cdot\delta\mathbf{r}_\nu'+\int\limits_{\tau}p\operatorname{div}\delta\mathbf{r}_\nu'\,d\tau\Bigr)dt=0 \tag{1.3}$$

Здесь символ δ обозначает вариацию или изменение соответствующей величины на возможном перемещении (при $\delta t=0$), причем на постоянных пределах интегрирования

$$\delta\mathbf{r}_\nu'=0 \qquad \text{при } t=t_0,\ t=t_1 \tag{1.4}$$

$p\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$ — множитель Лагранжа, который в данном случае представляет гидродинамическое давление.

Варьируя выражение кинетической энергии системы

$$T=T_1+\rho\int\limits_{\tau}T^\circ\,d\tau$$

имеем

$$\delta T=\sum_{j=1}^{n}\Bigl(\frac{\partial T}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\delta\dot q_j\Bigr)+\sum_{i=1}^{3}\rho\int\limits_{\tau}\Bigl(\frac{\partial T^\circ}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial T^\circ}{\partial u_i}\delta u_i\Bigr)d\tau \tag{1.5}$$

Подсчитаем теперь сумму элементарных работ приложенных к системе активных сил на возможном перемещении системы. Так как для точек твердого тела и частиц жидкости $\mathbf{r}'=\mathbf{r}'\,(q_j,\ x_i,\ t)$, то

$$\begin{gathered}\sum_{\nu}\mathbf{F}_\nu\cdot\delta\mathbf{r}_\nu'=\sum_{j=1}^{n}Q_j\delta q_j+\rho\int\limits_{\tau}\sum_{i=1}^{3}F_i\delta x_i\,d\tau-\alpha\delta S-\\ -\alpha_1\delta\sigma_1-\alpha_2\delta\sigma_2-p_0\int\limits_{S}\mathbf{n}\cdot\delta_1\mathbf{r}\,dS,\qquad Q_j=\sum_{\nu}\mathbf{F}_\nu\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_\nu'}{\partial q_j}\end{gathered} \tag{1.6}$$

где $Q_j\ (j=1,\ldots,n)$ — обобщенные силы, $\delta_1\mathbf{r}$ — вариация вектор-радиуса $\mathbf{r}=x_1\mathbf{i}_1+x_2\mathbf{i}_2+x_3\mathbf{i}_3$ при фиксированных ортах подвижных осей $\mathbf{i}_s$, $\mathbf{n}$ — орт внешней нормали к поверхности S.

Вектор возможного перемещения жидкости относительно твердого тела $\delta_1\mathbf{r}$ будем считать непрерывной дифференцируемой функцией вектор-радиуса $\mathbf{r}$, удовлетворяющей условиям несжимаемости в области τ, непроницаемости стенок σ и сохранения объема жидкости

$$\operatorname{div}\delta_1\mathbf{r}=0,\qquad \mathbf{n}_\sigma\cdot\delta_1\mathbf{r}=0,\qquad \int\limits_{S}\mathbf{n}\cdot\delta_1\mathbf{r}\,dS=0$$

Здесь $\mathbf{n}_\sigma$ — нормаль к поверхности σ. Вариации площади свободной поверхности S и площадей смоченной σ_1 и несмоченной σ_2 частей поверхности σ стенок полости на возможном перемещении $\delta_1\mathbf{r}$ равны

$$\begin{gathered}\delta S=\int\limits_{S}2H\delta\zeta\,dS+\int\limits_{l}\delta\zeta_1\,dl,\qquad \delta\sigma_1=-\delta\sigma_2=\int\limits_{l}\delta\zeta_2\,dl\\ \delta\zeta=\mathbf{n}\cdot\delta_1\mathbf{r},\qquad \delta\zeta_i=\mathbf{n}_i\cdot\delta_1\mathbf{r}\qquad (i=1,2)\qquad H=\frac{1}{2}\Bigl(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\Bigr)\end{gathered} \tag{1.7}$$

Здесь H — средняя кривизна поверхности, R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности S в данной точке, принятые положительными, если центр кривизны лежит с той же стороны от этой поверхности, что и жидкость, и отрицательными — в противном случае; $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ — орты внешних нормалей к контуру l поверхностей S и σ_1, расположенные соответственно в касательных плоскостях к этим поверхностям. Угол между нормалями $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ обозначим через θ. Предполагая, что в окрестности контура l поверхность стенок полости σ является достаточно гладкой и не имеет острых ребер, найдем, что

$$\delta\zeta_1 = \delta\zeta_2 \cos\theta \tag{1.8}$$

Рассмотрим также интеграл

$$\int_\tau p \operatorname{div} \delta\mathbf{r}' \, d\tau = \int_\tau p \operatorname{div} \delta_1\mathbf{r} \, d\tau$$

Так как

$$p \operatorname{div} \delta_1\mathbf{r} = \operatorname{div} (p\delta_1\mathbf{r}) - \operatorname{grad} p \cdot \delta_1\mathbf{r}$$

то, используя теорему Гаусса — Остроградского, получим

$$\int_\tau p \operatorname{div} \delta_1\mathbf{r} \, d\tau = \int_S p\mathbf{n} \cdot \delta_1\mathbf{r} \, dS - \int_\tau \operatorname{grad} p \cdot \delta_1\mathbf{r} \, d\tau \tag{1.9}$$

Подставляя выражения (1.5) — (1.9) в принцип (1.3), имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big\{ \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial T}{\partial q_j^{\cdot}} \delta q_j^{\cdot} + \frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j \Big) + \sum_{i=1}^{3} \rho \int_\tau \Big(\frac{\partial T^\circ}{\partial u_i} \delta u_i + \frac{\partial T^\circ}{\partial x_i} \delta x_i + F_i \delta x_i \Big) d\tau +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j - \int_S (2\alpha H + p_0 - p) \delta\zeta \, dS - \int_l (\alpha \cos\theta + \alpha_1 - \alpha_2) \delta\zeta_2 \, dl -$$

$$- \int_\tau \operatorname{grad} p \cdot \delta_1\mathbf{r} \, d\tau \Big\} dt = 0$$

Интегрируя по частям члены $(\partial T / \partial q_j^{\cdot}) \delta q_j^{\cdot}$ и $(\partial T^\circ / \partial u_i) \delta u_i$ и учитывая, что условия (1.4) на пределах интегрирования эквивалентны следующим:

$$\delta q_j = 0, \quad \delta x_i = 0 \quad \text{при } t = t_0, \ t = t_1$$

получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big\{ \sum_{j=1}^{n} \Big(- \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_j^{\cdot}} + \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_j \Big) \delta q_j + \sum_{i=1}^{3} \rho \int_\tau \Big(- \frac{d}{dt} \frac{\partial T^\circ}{\partial u_i} + \frac{\partial T^\circ}{\partial x_i} + F_i -$$

$$- \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \Big) \delta x_i d\tau - \int_S (2\alpha H + p_0 - p) \delta\zeta \, dS - \int_l (\alpha \cos\theta + \alpha_1 - \alpha_2) \delta\zeta_2 \, dl \Big\} dt = 0$$

В силу независимости δq_j и δx_i получаем уравнения в форме Лагранжа движения твердого тела с жидкостью

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_j^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.10}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^\circ}{\partial u_i} - \frac{\partial T^\circ}{\partial x_i} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.11}$$

а также граничные условия для давления p на свободной поверхности S

$$p = p_0 + 2\alpha H \tag{1.12}$$

и для краевого угла θ на контуре l

$$\cos\theta = (\alpha_2 - \alpha_1) / \alpha \tag{1.13}$$

К этим уравнениям и граничным условиям надлежит присоединить уравнение несжимаемости жидкости

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{1.14}$$

а также кинематические условия на твердых стенках σ_1

$$u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{1.15}$$

и на свободной поверхности S

$$\partial f / \partial t + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} f = 0 \tag{1.16}$$

Таким образом, изучение движения твердого тела с идеальной жидкостью в его полости приводится к исследованию совместной системы уравнений (1.10), (1.11), (1.14) с граничными условиями (1.12), (1.13), (1.15), (1.16). Отметим, что в случае, когда силами поверхностного натяжения можно пренебречь, условие (1.12) принимает вид: на S $p = p_0$, а условие (1.13) исчезает. Условие (1.13) будет, таким образом, следствием более высокого порядка уравнений (см. формулу (3.4)), которые надлежит интегрировать при учете сил поверхностного натяжения, чтобы получить уравнение вида (1.2). В случае, когда жидкость целиком заполняет полость, условия (1.12), (1.13) и (1.16), разумеется, выпадают.

Уравнения (1.10) имеют вид обычных уравнений Лагранжа. Если положить $\rho = 0$, что соответствует случаю отсутствия жидкости в полости тела, то уравнения (1.10) будут представлять собою уравнения Лагранжа для одного твердого тела.

Отметим, что в случае, когда приложенные к системе активные силы имеют силовую функцию $U(\mathbf{r}_\nu', t)$, т. е.

$$\mathbf{F}_\nu = \operatorname{grad}_{\mathbf{r}_\nu'} U$$

обобщенные силы

$$Q_j = \sum_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu'}{\partial q_j} \cdot \operatorname{grad}_{\mathbf{r}_\nu'} U = \frac{\partial U}{\partial q_j} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

и уравнения (1.10) принимают вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.17}$$

где $L = T + U$ — функционал Лагранжа. В общем случае силовая функция действующих на систему активных сил

$$U = U_1 + \rho \int_\tau U_2 \, d\tau + U_2^* \qquad (U_2^* = -(\alpha S + \alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2))$$

Здесь $U_1(q_j, t)$ — силовая функция активных сил, приложенных к твердому телу, $U_2(q_j, x_i, t)$ — силовая функция массовых сил, действующих на жидкость, U_2^* — силовая функция сил поверхностного натяжения. Функцию U далее будем считать непрерывной, обладающей непрерывными частными производными по всем координатам. Обозначая через $L^\circ = T^\circ + U_2$ функцию Лагранжа для единицы массы жидкости, уравнения (1.11) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^\circ}{\partial u_i} - \frac{\partial L^\circ}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.18}$$

так как в случае действия потенциальных сил

$$F_i = \frac{\partial U_2}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Уравнения (1.11) или (1.18) представляют собой гидродинамические уравнения Эйлера. В самом деле, легко видеть, что

$$\frac{\partial T^\circ}{\partial u_i} = v_i \quad (i=1,2,3), \qquad \frac{\partial T^\circ}{\partial x_1} = \omega_3 v_2 - \omega_2 v_3 \qquad (123)$$

так что уравнения (1.11) можно переписать в виде одного векторного уравнения

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \omega \times \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p \qquad (1.19)$$

представляющего собою уравнение Эйлера, отнесенное к подвижным осям координат.

Отметим, что изложенный вывод уравнений движения сохраняет силу и для случая движения жидкости в неподвижном сосуде. При этом надо только всюду положить $q_j = q_j^{\cdot} = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Уравнения движения идеальной жидкости будут иметь вид уравнений (1.11) или (1.18), (1.14) с граничными условиями (1.12), (1.13), (1.15), (1.16). При этом система координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанная с твердым телом, будет неподвижной системой, а вектор $\mathbf{u}$ — абсолютной скоростью жидкости, так как $\mathbf{v}_0 = \omega = 0$.

Отметим, что представление уравнений движения в форме уравнений Лагранжа открывает возможность применения в теории движения твердых тел с жидкостью хорошо разработанных методов аналитической механики и теории управления.

В виду того что тело и жидкость рассматриваются нами как одна механическая система, нам не понадобилось определять силы взаимодействия между твердым телом и жидкостью. В некоторых случаях, однако, необходимо вычислять силы воздействия жидкости и воздуха в полости на твердое тело.

Найдем выражение для обобщенной силы давления жидкости и воздуха на стенки полости

$$P_j = \int_\sigma p\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial q_j} d\sigma$$

Применяя формулу Гаусса — Остроградского и учитывая, что

$$\operatorname{div}\left(p\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial q_j}\right) = p\operatorname{div}\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial q_j}\cdot\operatorname{grad} p, \qquad \operatorname{div}\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial q_j} = 0$$

получим

$$P_j = \int_\tau \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial q_j}\cdot\operatorname{grad} p\, d\tau$$

так как для воздуха $p = p_0$. Заменяя $\operatorname{grad} p$ его выражением из уравнения Эйлера, имеем

$$P_j = \rho\int_\tau \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial q_j}\cdot\left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)d\tau$$

причем, в отличие от уравнения (1.19), здесь $d\mathbf{v} / dt$ — абсолютная производная вектора $\mathbf{v}$ по времени t.

Рассмотрим выражение

$$\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial q_j}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial q_j}\right) - \mathbf{v}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial q_j}$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_j^{\cdot}} = \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial q_j}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_j}$$

вследствие чего

$$\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial q_j}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_j^{\cdot}}\right) - \mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T^\circ}{\partial q_j^{\cdot}} - \frac{\partial T^\circ}{\partial q_j}$$

Подставляя это выражение в формулу для P_j, получим

$$P_j = -\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial q_j^{\cdot}} + \frac{\partial T_2}{\partial q_j} + \rho\int_\tau \mathbf{F}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial q_j}d\tau \qquad (1.20)$$

С учетом этого выражения уравнения (1.10) можно записать в виде уравнений движения твердого тела

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial q_j^{\cdot}} - \frac{\partial T_1}{\partial q_j} = Q_j^{(1)} + P_j \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.21}$$

находящегося под действием приложенных к нему заданных сил и сил давлений жидкости и воздуха в полости на стенки. Здесь

$$Q_j^{(1)} = \sum_{\nu}{}_{(1)} \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu'}{\partial q_j}$$

причем суммирование происходит лишь по точкам твердого тела.

Уравнения (1.21) надлежит рассматривать совместно с уравнениями (1.11), (1.14) при соответствующих граничных условиях.

2. Уравнения движения твердого тела с жидкостью при определенных условиях допускают первые интегралы [2].

Далее будем предполагать, что силы, приложенные к системе, и движение твердого тела являются непрерывными, а движение жидкости совершается сплошным образом, так что координаты частиц жидкости — непрерывные функции их начальных значений и времени.

Известно, что если связи, наложенные на механическую систему, не зависят явно от времени, а заданные активные силы обладают стационарной силовой функцией, то существует интеграл энергии.

В самом деле, пусть указанные условия выполнены. Рассмотрим функционал Лагранжа $L(q_j, q_j^{\cdot}, u_i, x_i) = T + U$; его производная в силу (1.17) и (1.18) равна

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j^{\cdot}} q_j^{\cdot} + \rho \int_{\tau} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L^\circ}{\partial u_i} u_i d\tau\right] + \sum_{i=1}^{3} \int_{\tau} \frac{\partial p}{\partial x_i} u_i d\tau + \frac{dU_2^*}{dt} \tag{2.1}$$

Используя уравнение несжимаемости (1.14) и применяя теорему Гаусса — Остроградского, найдем с учетом граничных условий (1.12) и (1.15)

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{\tau} \frac{\partial p}{\partial x_i} u_i d\tau = \int_{S} (p_0 + 2H\alpha)\, u_n dS$$

Но в силу формул

$$\frac{dS}{dt} = \int_{S} 2H u_n dS + \int_{l} u_1 dl, \qquad \frac{d\sigma_1}{dt} = -\frac{d\sigma_1}{dt} = \int_{l} u_2 dl, \qquad u_1 = u_2 \cos\theta \tag{2.2}$$

которые можно получить из формул (1.7), (1.8) заменой символа δ на d/dt, причем $u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_i$ $(i = 1, 2)$, получим с учетом условия (1.13)

$$\frac{dU_2^*}{dt} = -\alpha \int_{S} 2H u_n dS \tag{2.3}$$

Так как в силу сохранения объема жидкости

$$\int_{S} u_n dS = 0$$

то очевидно

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{\tau} \frac{\partial p}{\partial x_i} u_i d\tau + \frac{dU_2^*}{dt} = 0 \tag{2.4}$$

Из уравнения (2.1) при этом следует интеграл энергии

$$-L+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_j^{\cdot}}q_j^{\cdot}+\rho\int_{\tau}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L^{\circ}}{\partial u_i}u_i d\tau=\text{const} \qquad (2.5)$$

Нетрудно проверить непосредственным вычислением, что

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_j^{\cdot}}q_j^{\cdot}+\sum_{i=1}^{3}\rho\int_{\tau}\frac{\partial L^{\circ}}{\partial u_i}u_i d\tau=2T \qquad (2.6)$$

так что интеграл (2.5) имеет обычный вид интеграла сохранения энергии

$$T+\Pi=\text{const} \qquad \left(\Pi=\Pi_1+\rho\int_{\tau}\Pi_2 d\tau+\Pi_2^*=-U+\text{const}\right)$$

Здесь Π обозначает потенциальную энергию системы.

Пусть, далее, координаты q_α $(\alpha=k+1,\ldots,n)$ являются циклическими, т. е.

$$\partial L/\partial q_\alpha=0 \qquad (\alpha=k+1,\ldots,n) \qquad (2.7)$$

Из уравнений (1.17) следуют в этом случае циклические первые интегралы

$$\partial L/\partial q_\alpha^{\cdot}=\text{const} \qquad (\alpha=k+1,\ldots,n) \qquad (2.8)$$

Интегралы количества движения и момента количеств движения [2] относятся к интегралам вида (2.8).

Применяя метод Рауса игнорирования циклических координат, можно понизить порядок системы дифференциальных уравнений (1.17) движения твердого тела с жидкостью. Рассмотрим, например, случай, когда функционал L не зависит от угла поворота тела вокруг некоторой неподвижной прямой $O'x_3'$. Введем в рассмотрение систему осей координат $O'\xi_1\xi_2x_3'$, могущую вращаться вокруг оси x_3' с угловой скоростью ω твердого тела в его вращении вокруг этой оси; за угол поворота q_n тела вокруг x_3' можно принять угол между осями x_1' и ξ_1. Кинетическая энергия системы представится в виде [3]

$$T=T^{(1)}+q_n^{\cdot}G_{x_3'}^{(1)}+{}^1/_2 q_n^{\cdot 2}J \qquad (2.9)$$

где $T^{(1)}$ и $G_{x_3'}^{(1)}$ — кинетическая энергия и проекция на ось x_3' момента количеств движения системы в ее движении относительно системы координат $O'\xi_1\xi_2x_3'$; через J обозначен момент инерции относительно оси x_3^1. Циклической координате q_n отвечает первый интеграл вида (2.8)

$$\frac{\partial L}{\partial q_n^{\cdot}}=G_{x_3'}^{(1)}+q_n^{\cdot}J=k=\text{const}$$

Отсюда найдем

$$q_n^{\cdot}=(k-G_{x_3'}^{(1)})/J$$

и исключим эту величину из функционала Рауса $R=L-q_n^{\cdot}k$.

В результате обычным путем [4] получим уравнения движения твердого тела с жидкостью в форме уравнений Рауса

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial q_j^{\cdot}}-\frac{\partial R}{\partial q_j}=0 \qquad (j=1,\ldots,n-1) \qquad (2.10)$$

Если функционал R не зависит явно от времени, то эти уравнения вместе с уравнениями (1.18) допускают интеграл энергии

$$R_2-R_0=\text{const} \qquad (2.11)$$

где R_s — однородная степени s относительно скоростей $q_j^{\cdot}$ часть функционала $R=R_2+R_1+R_0$. Нетрудно проверить, что

$$R_2=T^{(2)}=T^{(1)}-G_{x_3'}^{(1)2}/2J, \qquad R_0=-\Pi-k^2/2J \qquad (2.12)$$

так что интеграл (2.11) примет вид

$$T^{(2)}+\Pi+k^2/2J=\text{const}$$

3. Уравнения движения твердого тела с жидкостью при определенных условиях допускают решения, описывающие равновесие или стационарное движение системы. Выясним эти условия, предполагая, что заданные активные силы, приложенные к системе, являются потенциальными. Полагая в уравнениях (1.17) $q_j^{\cdot}=0$, $u_i=0$ $(i=1,2,3,\ j=1,\ldots,n)$ получим

$$\partial L/\partial q_j = \partial U/\partial q_j = 0 \quad (j=1,\ldots,n) \tag{3.1}$$

Следовательно, в положении равновесия твердого тела с жидкостью силовая функция U или потенциальная энергия системы Π имеют экстремальные (стационарные) значения, т. е.

$$\delta U = \delta \Pi = 0 \tag{3.2}$$

Уравнения (3.1) определяют координаты твердого тела при равновесии. Без уменьшения общности можно считать, что корнями уравнений (3.1) будут $q_j=0$ $(j=1,\ldots,n)$. Жидкость при равновесии занимает область τ_0, ограниченную стенками полости и свободной поверхностью. Уравнение последней $U_2-p/\rho=\text{const}$ находится интегрированием уравнения (1.18) при $u_i=0$, $q_j=q_j^{\cdot}=0$; учитывая граничное условие (1.12), приведем его к виду

$$\rho U_2 - 2\alpha H = \text{const} \tag{3.3}$$

Постоянную в правой части уравнения (3.3) можно определить по известным значениям средней кривизны H и силовой функции U_2 для какой-либо точки свободной поверхности. Из дифференциальной геометрии [5] известно, что

$$2H = \frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2} \tag{3.4}$$

где E, F, G и L, M, N — коэффициенты первой и второй дифференциальных форм Гаусса для поверхности. Таким образом, уравнение (3.3) представляет собою нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных.

Форма свободной поверхности S жидкости при равновесии определяется интегрированием уравнения (3.3) при учете граничного условия (1.13). Задача интегрирования этого уравнения представляет, вообще говоря, большие трудности [6]. В случае, когда силами поверхностного натяжения можно пренебречь, уравнение (3.3) становится конечным уравнением свободной поверхности жидкости при равновесии.

Предположим теперь, что среди координат q_j твердого тела имеется циклическая координата q_n. Тогда уравнения движения твердого тела с жидкостью допускают частное решение, в котором все нециклические координаты q_j $(j=1,\ldots,n-1)$ остаются постоянными, как и скорость $q_n^{\cdot}$, соответствующая циклической координате q_n, а все нециклические скорости тела $q_j^{\cdot}$ и относительные скорости u_i частиц жидкости равны нулю. Такое решение описывает стационарное движение, представляющее собою равномерное вращение всей системы как одного твердого тела с угловой скоростью $q_n^{\cdot}$ вокруг оси x_3'. Из уравнений (2.10) при фиксированном значении постоянной $k=k_0$ при этом следуют уравнения

$$\partial R_0 / \partial q_j = 0 \quad (j=1,\ldots,n-1) \tag{3.5}$$

для координат q_j твердого тела в стационарном движении. Следовательно, для стационарного движения измененная потенциальная энергия системы

$W = -R_0 = k_0^2/2J + \Pi$ принимает экстремальное (стационарное) значение

$$\delta W = 0 \tag{3.6}$$

Допустим, что $q_j = 0$ $(j = 1, \ldots, n-1)$ удовлетворяют уравнениям (3.5). Жидкость при этом занимает область τ_0, ограниченную стенками полости и свободной поверхностью S_0. Уравнение последней найдем, интегрируя уравнения (1.18) при $q_j = q_j^{\cdot} = 0$ $(j = 1, \ldots, n-1)$, $q_n^{\cdot} = \omega$, $u_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ и учитывая граничное условие (1.12)

$$\rho\,[U_2 + \omega^2 (x_1'^2 + x_2'^2)/2] - 2\alpha H = \text{const} \tag{3.7}$$

Уравнение (3.7) отличается от уравнения (3.3) лишь видом силовой функции; все ранее сказанное об уравнении (3.3) справедливо и для (3.7).

В статье [1] дано определение устойчивости движения для твердого тела с жидкостью, обладающей поверхностным натяжением, и доказаны теоремы, сводящие вопрос об устойчивости стационарного движения (или равновесия) к задаче минимума измененной потенциальной энергии W (или потенциальной энергии Π) системы. В случаях, представляющих практический интерес, задача минимума W (или Π) может быть решена исследованием второй вариации $\delta^2 W$ (или $\delta^2\Pi$). При варьировании объем жидкости τ должен сохраняться; положим далее

$$W = \frac{k_0^2}{2J} + \Pi + \lambda \int_\tau d\tau \quad (\lambda = \text{const})$$

Первая вариация выражения W легко находится:

$$\delta W = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial W}{\partial q_j}\,\delta q_j - \int_S \left[\rho U_2 + \frac{1}{2}\frac{k^2_0}{J^2}\rho\,(x_1'^2 + x_2'^2) - 2\alpha H - \lambda\right] \delta\zeta\, dS +$$
$$+ \int_l (\alpha\cos\theta + \alpha_1 - \alpha_2)\,\delta\zeta_2\, dl \tag{3.8}$$

Предполагается, что величина $\delta\zeta$ является непрерывной дифференцируемой функцией криволинейных координат u, v точки свободной поверхности жидкости, обладающей непрерывными частными производными по u, v и удовлетворяющей условию сохранения объема жидкости

$$\int_{S_0} \delta\zeta\, dS = 0 \tag{3.9}$$

Из уравнения $\delta W = 0$ получаем, в силу независимости δq_j и $\delta\zeta$, уравнения (3.5) для координат твердого тела в стационарном движении и уравнение (3.7) свободной поверхности S_0 жидкости в этом движении, а также условие (1.13) для краевого угла.

Для простоты далее будем предполагать, что поверхность «равновесия» S_0 является односвязной и гладкой. Линию пересечения поверхности S_0 со стенками полости σ, если она существует, будем обозначать через l_0 и считать кусочно-гладкой. Единичный вектор касательной $\mathbf{e}$ к контуру l_0 ориентируем таким образом, чтобы при обходе l_0 область S_0 оставалась слева для наблюдателя, расположенного вдоль внешней нормали $\mathbf{n}$ к S_0. Подвижную систему осей координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с твердым телом, выберем таким образом, чтобы в невозмущенном положении ось Ox_3 совпадала с осью $O'x_3'$. Для краткости введем обозначение

$$\Phi\,(q_j, x_i) \equiv \rho\,[U_2\,(x_1', x_2', x_3') + {}^1/_2\,\omega^2\,(x_1'^2 + x_2'^2)]_{\,x_i' \to q_j,\, x_i} \tag{3.10}$$

с учетом которого уравнение (3.7) запишем в виде

$$\Phi\,(0, x_i) - 2\alpha H = \lambda = \text{const} \tag{3.11}$$

Варьируя уравнение (3.8), получим следующее выражение для второй вариации W в окрестности рассматриваемого стационарного движения системы

$$\delta^2 W = \sum_{i,\,j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \delta q_i \delta q_j - 2\int_{S_0} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_j}\right)_0 \delta q_j \delta\zeta\, dS +$$

$$+ \frac{\omega^2}{J_0}\left[2\Delta_1 J \Delta_2 J + (\Delta_2 J)^2\right] - \int_{S_0} \delta(\Phi - 2H\alpha - \lambda)\,\delta\zeta dS + \int_{l_0} \alpha\delta\cos\theta\delta\zeta_2\, dl \qquad (3.12)$$

Здесь

$$\Delta_1 J = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial J}{\partial q_j}\right)_0 \delta q_j, \qquad \Delta_2 J = \rho \int_{S_0} (x_1'^2 + x_2'^2)_{x_i' \to q_j,\, x_i} \delta\zeta\, dS \qquad (3.13)$$

причем индекс 0 обозначает значение соответствующей величины для невозмущенного движения.

Остановимся на получении явных выражений для величин, фигурирующих под знаками интегралов в двух последних слагаемых в правой части равенства (3.12). Начнем с первого из них. Между невозмущенной и возмущенной поверхностями жидкости можно, очевидно, установить соответствие по нормалям к невозмущенной поверхности. При этом вариация средней кривизны определяется формулой [5]

$$\delta H = -(2H^2 - K)\,\delta\zeta - {}^1/_2\, \Delta^\circ \delta\zeta \qquad (3.14)$$

Здесь

$$K = 1 / R_1 R_2, \qquad \Delta^\circ\delta\zeta = (E\delta\zeta_{22} - 2F\delta\zeta_{12} + G\delta\zeta_{11}) / (EG - F^2)$$

обозначают, соответственно, гауссову кривизну поверхности S_0 и второй дифференциальный параметр Бельтрами, $\delta\zeta_{ij}$ — ковариантные вторые производные функции $\delta\zeta$. Используя (3.14) и (3.9), получим

$$\int_{S_0} \delta(\Phi - 2H\alpha - \lambda)\,\delta\zeta\, dS = \int_{S_0} \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_0 \delta\zeta + 2\alpha(2H^2 - K)\,\delta\zeta + \alpha\Delta^\circ\delta\zeta\right]\delta\zeta dS \qquad (3.15)$$

Согласно формуле Грина [5]

$$\int_{S_0} \delta\zeta\Delta^\circ\delta\zeta dS = \int_{l_0} \delta\zeta \frac{d\delta\zeta}{ds_1}\, dl - \int_{S_0} \nabla^\circ\delta\zeta dS \qquad (3.16)$$

Здесь

$$\nabla^\circ\delta\zeta = [E(\delta\zeta)_v^2 - 2F(\delta\zeta)_u(\delta\zeta)_v + G(\delta\zeta)_u^2]/(EG - F^2)$$

обозначает первый дифференциальный параметр Бельтрами, $(\delta\zeta)_u$, $(\delta\zeta)_v$ — производные от функции $\delta\zeta$ по u, v; соответственно, $d\delta\zeta / ds_1$ — производную от функции $\delta\zeta$ по направлению внешней нормали $\mathbf{n}_1$ к контуру l_0 поверхности S_0. В силу (3.16) равенство (3.15) можно записать в виде (3.17)

$$\int_{S_0} \delta(\Phi - 2H\alpha - \lambda)\,\delta\zeta dS = \int_{S_0} \left\{\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_v + 2\alpha(2H^2 - K)\right](\delta\zeta)^2 - \alpha\nabla^\circ\delta\zeta\right\} dS + \alpha\int_{l_0} \delta\zeta \frac{d\delta\zeta}{ds_1}\, dl$$

Найдем теперь

$$\delta\cos\theta = \mathbf{n}_2\cdot\delta\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_1\cdot\delta\mathbf{n}_2.$$

На поверхности S_0 в окрестности контура l_0 за координатные линии u, v примем кривую l_0 и ортогональные ей кривые; единичные векторы касательных к этим кривым суть $\mathbf{e}$ и $\mathbf{n}_1$. При этом

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_v / \sqrt{G}, \qquad \delta\mathbf{n}_1 = \delta\mathbf{r}_v / \sqrt{G} - \mathbf{r}_v \delta\sqrt{G} / G$$

Полагая для точек контура l_0

$$\delta\mathbf{r} = \delta\xi\mathbf{r}_v + \delta\zeta\mathbf{n}$$

находим

$$\delta \mathbf{r}_v = (-G_u\delta\xi - 2M\delta\zeta)\,\mathbf{r}_u / 2E + [(\delta\xi)_v + (G_v\delta\xi - 2N\delta\zeta)/2G]/\mathbf{r}_v + [(\delta\zeta)_v + N\delta\xi]\,\mathbf{n}$$

$$\delta\sqrt{G} = \mathbf{r}_v \cdot \delta\mathbf{r}_v / \sqrt{G} = [(\delta\xi)_v + (G_v\delta\xi - 2N\delta\zeta)/2G]\sqrt{G}$$

так что

$$\delta\mathbf{n}_1 = (-G_u\delta\xi - 2M\delta\zeta)\,\mathbf{r}_u / 2E\sqrt{G} + [(\delta\zeta)_v + N\delta\xi]\,\mathbf{n}/\sqrt{G}$$

Учитывая, что вектор $\mathbf{n}_2$ ортогонален вектору $\mathbf{r}_u = \sqrt{E}\mathbf{e}$, найдем

$$\mathbf{n}_2\cdot\delta\mathbf{n}_1 = [(\delta\zeta)_v/\sqrt{G} + N\sqrt{G}\delta\xi/G]\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_2$$

Но по формуле Менье $N/G = 1/R_{n_1}$, где R_{n_1} — радиус кривизны нормального сечения поверхности S_0 в направлении $\mathbf{n}_1$, элемент дуги которого $ds_1 = \sqrt{G}dv$.

Так как $\sqrt{G}\delta\xi = \delta\zeta_1$, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_2 = \sin\theta$, то

$$\mathbf{n}_2\cdot\delta\mathbf{n}_1 = (d\delta\zeta / ds_1 + \delta\zeta_1 / R_{n_1})\sin\theta \tag{3.18}$$

Аналогичным образом находим

$$\mathbf{n}_1\cdot\delta\mathbf{n}_2 = -\sin\theta\delta\zeta_2 / R_{n_2} \tag{3.19}$$

где R_{n_2} обозначает радиус кривизны нормального сечения поверхности стенок полости σ в направлении вектора $\mathbf{n}_2$. Суммируя равенства (3.18) и (3.19), получим

$$\delta\cos\theta = (d\delta\zeta / ds_1 + \delta\zeta_1 / R_{n_1} - \delta\zeta_2 / R_{n_2})\sin\theta \tag{3.20}$$

Отметим, что формула (3.20) позволяет получить граничное условие для функции $\delta\zeta$ на контуре l_0 поверхности S_0 в случае линейной трактовки задачи. В самом деле, из условия (1.13) для краевого угла, образуемого свободной поверхностью жидкости со стенками полости, следует, что на контуре l_0 в первом приближении

$$d\delta\zeta / ds_1 = \delta\zeta_2 / R_{n_2} - \delta\zeta_1 / R_{n_1} \quad \text{при } \sin\theta \neq 0 \tag{3.21}$$

В случае, когда $\sin\theta = 0$, очевидно, что на l_0

$$\delta\zeta = \sin\theta\,\delta\zeta_2 = 0 \tag{3.22}$$

На основании равенств (3.12), (3.17), (3.20), а также (1.8) выражение для второй вариации измененной потенциальной энергии системы принимает вид

$$\delta^2 W = \sum_{i,j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \delta q_i \delta q_j + \frac{\omega^2}{J_0}[2\Delta_1 J\Delta_2 J + (\Delta_2 J)^2] -$$

$$-\int\limits_{S_0}\left\{2\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_j}\right)_0 \delta q_j \delta\zeta + \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_0 + 2\alpha(2H^2 - K)\right](\delta\zeta)^2 - \alpha\nabla^\circ\delta\zeta\right\} dS +$$

$$+\alpha\int\limits_{l_0}\left(\frac{\delta\zeta_1}{R_{n_1}} - \frac{\delta\zeta_2}{R_{n_2}}\right)\delta\zeta_2\sin\theta\, dl \tag{3.23}$$

причем функция $\Phi(q_j, x_i)$ и величины $\Delta_1 J$ и $\Delta_2 J$ определены равенствами (3.10) и (3.13).

Отметим, что из выражения (3.23) можно получить, в частности, формулу для второй вариации потенциальной энергии системы (при $\omega = 0$):

$$\delta^2\Pi = \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_i\partial q_j}\right)_0 \delta q_i\delta q_j - \int\limits_{S_0}\left\{2\rho\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial U_2}{\partial q_j}\right)_0 \delta q_j\delta\zeta + \left[\rho\left(\frac{\partial U_2}{\partial n}\right)_0 + \right.\right.$$

$$\left.\left.+ 2\alpha(2H^2 - K)\right](\delta\zeta)^2 - \alpha\nabla^\circ\delta\zeta\right\} dS + \alpha\int\limits_{l_0}(\delta\zeta_1/R_{n_1} - \delta\zeta_2/R_{n_2})\,\delta\zeta_2\sin\theta\, dl \tag{3.24}$$

Из вариационного исчисления известно, что для того чтобы измененная потенциальная энергия системы W имела минимум, необходимо, чтобы ее вторая вариация $\delta^2 W$ была неотрицательной, и достаточно, чтобы вторая вариация была сильно положительной для всех достаточно малых по абсолютной величине q_j и δx_i, удовлетворяющих условию несжимаемости и условию (3.9), не равных одновременно нулю.

Задача определения условий сильной положительности второй вариации $\delta^2 W$ известным образом [7] может быть сведена к задаче разыскания критерия положительности наименьшего собственного значения соответствующей краевой задачи.

4. Рассмотрим вопрос о характере равновесия твердого тела с жидкостью в случае, когда в положении равновесия потенциальная энергия системы не имеет минимума. Для систем с конечным числом степеней свободы существуют, как известно, доказательства обращения теоремы Лагранжа, данные Ляпуновым и Четаевым [4].

Аналогичную теорему можно доказать и для твердого тела с жидкостью. Ограничимся случаем, когда в окрестности положения равновесия потенциальная энергия системы имеет вид

$$\Pi = \Pi^{(2)} + \Pi^{(3)} + \ldots$$

где $\Pi^{(k)}$ — однородный степени k функционал отклонения системы от положения равновесия.

Теорема 4.1. Если в сколь угодно малой окрестности положения равновесия твердого тела с жидкостью потенциальная энергия системы Π может принимать отрицательные значения и если при этом знаки выражений $\Pi^{(2)} + \Pi^{(3)} + \ldots$ и $2\Pi^{(2)} + 3\Pi^{(3)} + \ldots$ определяются квадратичным функционалом $\Pi^{(2)}$, то положение равновесия неустойчиво.

Доказательство. Допустим, что в положении равновесия координаты твердого тела $q_j = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, координаты частиц жидкости $x_i = x_{i0}$ $(i = 1, 2, 3)$ и жидкость заполняет объем τ_0. Пусть в положении равновесия потенциальная энергия системы $\Pi = 0$ и не минимум; в окрестности положения равновесия существует область, где $\Pi < 0$. Выведем систему из положения равновесия и, предоставив ее самой себе, рассмотрим возмущенное движение; последнее описывается уравнениями (1.17), (1.18), (1.14) с соответствующими граничными условиями.

Радиус-вектор смещения частицы жидкости относительно твердого тела из равновесного положения обозначим через $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$. Очевидно,

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta_0 \mathbf{r} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{u}\, dt \tag{4.1}$$

где $\Delta_0 \mathbf{r}$ — радиус-вектор начального смещения жидкости, причем в силу несжимаемости $\operatorname{div} \Delta_0 \mathbf{r} = 0$. Тогда из (4.1) при учете уравнения (1.14) следует

$$\operatorname{div} \Delta \mathbf{r} = 0 \tag{4.2}$$

Наклон возмущенной поверхности жидкости к невозмущенной характеризуется частными производными n_u, n_v функции $n(u, v) = \Delta\zeta$. Максимум $|n_u|$, $|n_v|$ обозначим через ∇ и назовем наклонением возмущенной поверхности к невозмущенной.

Рассмотрим функционал [4]

$$V = -(T + \Pi)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j^{\cdot}} q_j + \sum_{i=1}^{3} \rho \int_{\tau} \frac{\partial T^\circ}{\partial u_i} \Delta x_i \, d\tau\right) \tag{4.3}$$

В достаточно малой окрестности положения равновесия, т. е. в области малых по абсолютной величине значений координат q_j, Δx_i, наклонения ∇ и скоростей $q_j^{\cdot}$, u_i выделим существующую для сколь угодно малых по абсолютной величине q_j,

$\Delta x_i, \nabla, q_j^{\cdot}, u_i$ бесконечномерную область (C), определенную совместными неравенствами

$$T+\Pi<0, \qquad \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_j^{\cdot}}q_j+\sum_{i=1}^{3}\rho\int_{\tau}\frac{\partial T^{\circ}}{\partial u_i}\Delta x_i d\tau>0 \tag{4.4}$$

Существование первого из этих неравенств при достаточно малых $q_j^{\cdot}$, u_i очевидно в силу условий теоремы об отсутствии минимума П. В точках окрестности положения равновесия, где выполняется это неравенство, скорости $q_j^{\cdot}$, u_i всегда можно выбрать по знаку такими, чтобы выполнялось и второе из неравенств (4.4).

В области (C) функционал V является, очевидно, ограниченным, т. е. существует такое положительное число N, что в области (C)

$$|V|<N \tag{4.5}$$

Производная по времени от функционала V, в силу уравнений возмущенного движения (1.17), (1.18), (1.14),

$$V^{\cdot}=-(T+\Pi)\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}q_j+\frac{\partial L}{\partial q_j^{\cdot}}q_j^{\cdot}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{3}\rho\int_{\tau}\left[\left(\frac{\partial T^{\circ}}{\partial x_i}+\frac{\partial U_2}{\partial x_i}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)\Delta x_i+\frac{\partial T^{\circ}}{\partial u_i}u_i\right]d\tau\right\}$$

Учитывая соотношение

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_j^{\cdot}}q_j^{\cdot}+\sum_{i=1}^{3}\rho\int_{\tau}\frac{\partial T^{\circ}}{\partial u_i}u_i d\tau=2T \tag{4.6}$$

в справедливости которого нетрудно убедиться непосредственным вычислением, выражение для $V^{\cdot}$ запишем в виде (4.7)

$$V^{\cdot}=-(T+\Pi)\left\{2T+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_j}q_j+\sum_{i=1}^{3}\rho\int_{\tau}\left(\frac{\partial T^{\circ}}{\partial x_i}+\frac{\partial U_2}{\partial x_i}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)\Delta x_i d\tau+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial q_i}q_j\right\}$$

Вследствие того что связи, наложенные на твердое тело, предполагаются не зависящими явно от времени, кинетическая энергия T является определенно-положительной относительно $q_j^{\cdot}$ и u_i. Для достаточно малых по абсолютной величине значений q_j и Δx_i выражение

$$2T+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_j}q_j+\sum_{i=1}^{3}\rho\int_{\tau}\frac{\partial T^{\circ}}{\partial x_i}\Delta x_i d\tau$$

по непрерывности также будет определенно-положительным относительно $q_j^{\cdot}$ и u_i.

Рассмотрим теперь остальные слагаемые в выражении (4.7). Пользуясь формулой (3.24) и учитывая, что $\Pi=\Pi^{(2)}+\Pi^{(3)}+\ldots$, где $\Pi^{(2)}=\delta^2\Pi/2$, $\Pi^{(3)}=\delta^3\Pi/3!$, находим

$$\frac{\partial U}{\partial q_j}=-\frac{\partial\Pi}{\partial q_j}=-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_j\partial q_i}\right)_0 q_i+\rho\int_{S_0}\left(\frac{\partial U_2}{\partial q_j}\right)_0 ndS$$

так что

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial q_j}q_j=-\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_i\partial q_j}\right)_0 q_i q_j+\rho\int_{S_0}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial U_2}{\partial q_j}\right)_0 q_j ndS+\ldots \tag{4.8}$$

Далее, с учетом (4.2) и (1.12), будем иметь

$$\sum_{i=1}^{3}\rho\int_{\tau}\frac{\partial U_2}{\partial x_i}\Delta x_i d\tau=\rho\int_{S_0}\left[U_2(0,x_i)+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial U_2}{\partial q_j}\right)_0 q_j+\left(\frac{\partial U_2}{\partial n}\right)_0 n\right]ndS+\ldots$$

$$\sum_{i=1}^{3}\int_{\tau}\frac{\partial p}{\partial x_i}\Delta x_i d\tau=\alpha\int_{S_0}[2H-2(2H^2-K)n-\Delta^{\circ}n]\,ndS$$

Применяя формулу Грина (3.16), получим

$$\sum_{i=1}^{3}\int_{\tau}\frac{\partial p}{\partial x_i}\Delta x_i\,d\tau=\alpha\int_{S_0}[2Hn-2(2H^2-K)n^2+\nabla^\circ n]\,dS-\alpha\int_{l_0}n\frac{dn}{ds_1}\,dl$$

Таким образом, с учетом условий (3.21) и (3.11), будем иметь

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial q_j}q_j+\sum_{i=1}^{3}\int_{\tau}\left(\rho\frac{\partial U_2}{\partial x_i}-\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)\Delta x_i\,d\tau=-\sum_{i,\,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_i\partial q_j}\right)_0 q_iq_j+$$

$$+\int_{S_0}\left[2\rho\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial U_2}{\partial q_j}\right)_0 q_jn+\rho\left(\frac{\partial U_2}{\partial n}\right)_0 n^2+2\alpha(2H^2-K)n^2-\alpha\nabla^\circ n\right]dS+$$

$$+\alpha\int_{l_0}\left(\frac{1}{R_{n_2}}-\frac{\cos\theta}{R_{n_1}}\right)n_2{}^2\sin\theta\,dl+\ldots=-2\Pi^{(2)}+\ldots\qquad(n_2=\Delta\zeta_2)$$

где многоточия обозначают члены вида $-3\Pi^{(3)}+\ldots$ Согласно (4.7) находим

$$V^{\cdot}=-(T+\Pi)\left\{2T+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_j}q_j+\rho\int_{\tau}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial T^\circ}{\partial x_i}\Delta x_i\,d\tau-2\Pi^{(2)}+\ldots\right\}\qquad(4.9)$$

Так как в области (C) потенциальная энергия Π отрицательна, а знаки Π и выражения $2\Pi^{(2)}+3\Pi^{(3)}+\ldots$ определяются членами второго порядка $\Pi^{(2)}<0$, то в области (C) это выражение определенно-отрицательно: $2\Pi^{(2)}+3\Pi^{(3)}+\ldots<0$.

Следовательно, в области (C) производная от функционала V является определенно-положительной относительно q_j, Δx_j, $q_j^{\cdot}$, u_i, ∇.

При этом определенная положительность функционала $V^{\cdot}$ в области положительности функционала V определяется аналогично знакоопределенности функции [4] в области $V>0$. Выбирая начальные возмущения q_{j0}, $\Delta_0 x_i$, ∇_0, $q_{j0}^{\cdot}$, u_{i0} в области (C) сколь угодно малыми, так что начальное значение $V_0>0$, из уравнения

$$V=V_0+\int_{t_0}^{t}V^{\cdot}\,dt\qquad(4.10)$$

заключаем, что с течением времени неравенство (4.5) будет нарушено, чем и доказывается неустойчивость положения равновесия.

Теорема 4.2. Если в положении равновесия твердого тела с жидкостью потенциальная энергия системы $\Pi=\Pi^{(2)}+\Pi^{(3)}+\ldots$ не имеет минимума и это узнается уже по ее второй вариации $\Pi^{(2)}$ без необходимости рассмотрения членов высших порядков, то положение равновесия неустойчиво.

Доказательство можно провести почти дословным повторением доказательства, данного Четаевым [8] в аналогичном случае для системы с конечным числом степеней свободы.

В бесконечномерном пространстве переменных q_j, Δx_i, n_u, n_v рассмотрим гиперсферу с центром в положении равновесия произвольно малого радиуса $\varepsilon>0$. На этой гиперсфере непрерывный функционал Π для некоторых значений a_s рассматриваемых переменных принимает свое наименьшее значение Π_0. Согласно предположению о потенциальной энергии Π, это наименьшее значение будет отрицательным и определяется функционалом $\Pi^{(2)}$. Следовательно, Π_0 будет второго порядка малости по сравнению с ε. Пусть область, в которой изучается вопрос о неустойчивости возмущенных движений, определена неравенствами

$$|q_j|<l,\qquad|\Delta x_i|<l,\qquad|q_j^{\cdot}|<l,\qquad|u_i|<l,\qquad|\nabla|<l\qquad(4.11)$$

при произвольно малом положительном l. Будем предполагать, что отношение величин l и ε представляет некоторое определенное число, хотя бы и очень большое.

При таком предположении о выборе l и ε выражение

$$2\Pi_0 + \Pi^{(3)} + 2\Pi^{(4)} + \ldots \tag{4.12}$$

в области (4.11) будет несомненно отрицательным. В возмущенном движении за начальные значения наших переменных примем значения a_s, а начальные значения всех скоростей примем равными нулю. Такое возмущенное движение будет совершаться в соответствии с законом кинетической энергии $T + \Pi = \Pi_0$ и, следовательно, будет происходить в области, определенной неравенством

$$\Pi_0 - \Pi \geqslant 0 \tag{4.13}$$

Рассмотрим функционал

$$V = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j^{\cdot}} q_j + \rho \int_{\tau} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial T^{\circ}}{\partial u_i} \Delta x_i \, d\tau \tag{4.14}$$

и производную по времени от него в силу уравнений возмущенного движения (1.17), (1.18), (1.14)

$$V^{\cdot} = 2T + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_j} q_j + \rho \int_{\tau} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial T^{\circ}}{\partial x_i} \Delta x_i \, d\tau - 2\Pi^{(2)} + \ldots \tag{4.15}$$

Для рассматриваемого возмущенного движения, происходящего в области (4.13), производная $V^{\cdot}$ будет положительной. Действительно, как выяснено выше, выражение

$$2T + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_j} q_j + \rho \int_{\tau} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial T^{\circ}}{\partial x_i} \Delta x_i \, d\tau$$

при достаточно малом l будет определенно-положительным относительно $q_j^{\cdot}$ и u_i, а

$$-(2\Pi^{(2)} + 3\Pi^{(3)} + \ldots) > 0 \tag{4.16}$$

в силу (4.12) и (4.13). Обозначим через l' минимум выражения, стоящего в левой части неравенства (4.16), внутри области, определенной неравенствами (4.11) и (4.13). Из уравнения (4.10), где в данном случае $V_0 = 0$, выводим, что $V > l' (t - t_0)$, пока переменные за время от t_0 до t не нарушали неравенств (4.11). Следовательно, с течением времени неравенство (4.5) будет нарушено. Теорема доказана.

Следует отметить, что в линейной постановке обращение теоремы Лагранжа для твердого тела с жидкостью было доказано С. Г. Крейном [9], при этом поверхностное натяжение жидкости не рассматривалось. В нелинейной постановке обращение теоремы Лагранжа для сплошных тел рассмотрено А. А. Мовчаном [10] в предположении, что потенциалы внешних и внутренних сил являются однородными степени m.

Поступила 28 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В. Об устойчивости движения твердого тела с жидкостью, обладающей поверхностным натяжением. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
2. Румянцев В. В. Уравнения движения твердого тела, имеющего полости, не полностью наполненные жидкостью. ПММ, 1954, т. 18, вып. 6.
3. Румянцев В. В. Об устойчивости установившихся движений твердых тел с полостями, наполненными жидкостью. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
4. Четаев Н. Г. Устойчивость движения, изд. 3-е. М., Изд. «Наука», 1965.
5. Бляшке В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна. ОНТИ, 1935.
6. Беляева М. А., Мышкис А. Д., Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых гравитационных полях. I. Равновесные формы поверхности жидкости. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 5.
7. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики. М.—Л., Гостехиздат, 1945.
8. Четаев Н. Г. О неустойчивости равновесия, когда силовая функция не есть максимум. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1938, т. 98, кн. 9, Математика, вып. 3.
9. Крейн С. Г., Моисеев Н. Н. О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной поверхностью. ПММ, 1957, т. 21, вып. 2.
10. Мовчан А. А. Об устойчивости процессов деформирования сплошных тел. Arch. Mech. Stosowanej, 1963, т. 5, № 15.