Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ ПРИ ПОМОЩИ МАХОВИКОВ

В. В. Крементуло
(Москва)

При помощи одной теоремы в духе прямого метода Ляпунова дано решение задачи аналитического конструирования регуляторов для обеспечения оптимальной стабилизации твердого тела с неподвижной точкой.

Рассмотрим механическую систему, представляющую собой твердое тело (платформу) с неподвижной точкой, по главным осям инерции которого расположены оси трех однородных симметричных маховиков. Маховики приводятся во вращение специальными двигателями. Описанная система относится к типу гиростатов, т. е. таких систем, распределение масс которых не изменяется в процессе движения. Пусть неподвижная точка O совпадает с центром масс системы; $OX_1X_2X_3$ — неподвижная система координат; $Ox_1x_2x_3$ — подвижная система координат, жестко связанная с телом и направленная по его главным осям инерции (по осям маховиков).

	x_1	x_2	x_3
X_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}
X_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}
X_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}

Введем следующие обозначения: p_1, p_2, p_3 — проекции абсолютной мгновенной угловой скорости тела на оси $x_1x_2x_3$; C_1, C_2, C_3 — моменты инерции системы относительно осей $x_1x_2x_3$; J_1, J_2, J_3 — осевые моменты инерции маховиков; $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — относительные угловые скорости маховиков. Направляющие косинусы между осями $OX_1X_2X_3$ и $Ox_1x_2x_3$ зададим в виде таблицы, приведенной здесь слева.

1. Постановка задачи. Исходные уравнения движения. Уравнения движения системы запишем в форме трех динамических уравнений Эйлера

$$C_1\frac{dp_1}{dt} + (C_3 - C_2)\,p_2p_3 + p_2H_3 - p_3H_2 + \frac{dH_1}{dt} = 0 \qquad (123) \qquad (1.1)$$

$$(H_i = J_i\omega_i, \quad i = 1, 2, 3)$$

Символ (123) означает, что два других уравнения получаются циклической перестановкой. К уравнениям (1.1) следует присоединить девять кинематических уравнений Пуассона

$$\frac{d\alpha_{i1}}{dt} + p_2\alpha_{i3} - p_3\alpha_{i2} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (123) \qquad (1.2)$$

Необходимо иметь в виду, что девять переменных α_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ связаны шестью геометрическими соотношениями

$$\sum_i \alpha_{ki}\alpha_{li} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad (k, l = 1, 2, 3) \qquad (1.3)$$

Здесь и в дальнейшем суммирование производится от 1 до 3 по соответствующему индексу. Помимо уравнений (1.1) и (1.2), введем еще три уравнения, описывающие вращательное движение маховиков. Эти уравнения без учета внутреннего трения имеют вид

$$J_i(\omega_i^{\cdot} + p_i^{\cdot}) = u_i \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (1.4)$$

где u_1, u_2, u_3 — управляющие моменты, создаваемые двигателями.

Совокупность уравнений (1.1) — (1.4) полностью описывает движение рассматриваемой механической системы. Полученные уравнения движения допускают частное решение, соответствующее положению равновесия основного тела (платформы) при выключенном управлении ($u_i = 0$):

$$p_i = 0, \qquad \alpha_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, 3), \quad \omega_i = \omega_i^\circ \tag{1.5}$$

Будем решать задачу о частичной оптимальной стабилизации положения равновесия (1.5): так подобрать u_i как функции переменных p_1, p_2, p_3, α_{11}, α_{12}, ..., α_{33}, чтобы при достаточно малых начальных возмущениях платформа асимптотически стремилась к исходному положению

$$p_i = 0, \qquad \alpha_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, 3) \tag{1.6}$$

и, кроме того, обеспечивался минимум некоторого функционала, интегральным образом характеризующего качество переходного процесса. При этом угловые скорости маховиков ω_i могут и не достигать своих исходных значений ω_i°. Будем считать $\omega_i^\circ = 0$. Поставленную задачу можно рассматривать, например, как задачу стабилизации положения равновесия спутника, вращающегося вокруг центра масс.

Угловые скорости ω_i можно вообще исключить из рассмотрения по аналогии с тем, как в аналитической механике производится исключение циклических скоростей. В данной задаче имеет место закон сохранения вектора-момента количества движения системы относительно точки O, т. е. $\mathbf{G} = \mathbf{const}$, что в проекции на оси $OX_1X_2X_3$ дает

$$\sum_i (C_i p_i + H_i) \alpha_{ki} = h_k = \text{const} \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{1.7}$$

Поскольку определитель системы (1.7) равен 1, последнюю можно разрешить относительно $C_i p_i + H_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Получим

$$C_i p_i + J_i \omega_i = Q_i (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}, h_1, h_2, h_3) \qquad (i = 1,2,3) \tag{1.8}$$

где через Q_i обозначен определитель системы (1.7) с заменой i-го столбца на столбец из h_k. Продифференцировав равенства (1.8) по времени, исключим при помощи полученных соотношений $\omega_i^{\cdot}$ из уравнений (1.4). При этом производные $\alpha_{ik}^{\cdot}$ $(i, k = 1, 2, 3)$ заменим их выражениями согласно (1.2). В результате приходим к следующей системе трех уравнений:

$$\begin{aligned}(C_1 - J_1) \frac{dp_1}{dt} = &- p_2 (h_1 \alpha_{13} + h_2 \alpha_{23} + h_3 \alpha_{33}) + \\ &+ p_3 (h_1 \alpha_{12} + h_2 \alpha_{22} + h_3 \alpha_{32}) - u_1 \ (123)\end{aligned} \tag{1.9}$$

имея в виду, что

$$\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{31}\alpha_{22} = \alpha_{13} \quad (123)$$

Таким образом, рассматриваемая механическая система описывается двенадцатью уравнениями (1.2), (1.9) при наличии между переменными шести соотношений (1.3). Угловые скорости ω_i в полученные уравнения не входят, и, следовательно, решается обычная задача об оптимальной стабилизации положения равновесия (1.6). Фазовыми координатами являются $p_1, p_2, p_3, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$, причем в силу (1.3) лишь шесть из них независимы.

2. Решение задачи об оптимальной стабилизации платформы. Приняв (1.6) в качестве невозмущенного движения, составим уравнения возмущенного движения, сохраняя за возмущениями обозначения исходных переменных

$$\frac{dp_1}{dt} = -h_{13}p_2 + h_{12}p_3 + P_1(p_2, p_3, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{33}) + v_1 \qquad (123) \qquad (2.1)$$

$$\frac{d\alpha_{ii}}{dt} = A_{ii} \quad (i = 1, 2, 3); \qquad \frac{d\alpha_{12}}{dt} = -p_3 + A_{12}, \frac{d\alpha_{13}}{dt} = p_2 + A_{13} \qquad (123) \qquad (2.2)$$

$$h_{ik} = \frac{h_k}{C_i - J_i}, \quad v_i = -\frac{u_i}{C_i - J_i}, \quad A_{i1} = p_3\alpha_{i2} - p_2\alpha_{i3} \quad (123) \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

Здесь P_1, P_2, P_3 — невыписанные члены второго порядка малости. Величины h_{ik}, характеризующие начальные возмущения, будем рассматривать как некоторые малые постоянные параметры.

Помимо уравнений (2.1), введем также систему уравнений первого приближения

$$\frac{dp_1}{dt} = -h_{13}p_2 + h_{12}p_3 + v_1 \qquad (123) \qquad (2.3)$$

Систему уравнений (2.3), (2.2) будем называть «укороченной» в отличие от полной системы уравнений (2.1), (2.2).

Задача состоит в следующем: так определить функции v_i фазовых координат, чтобы нулевое решение

$$p_i = 0, \quad \alpha_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3) \qquad (2.4)$$

было асимптотически устойчивым и чтобы выполнялось условие минимума интеграла

$$\int_{t_0}^{\infty} \Omega(p_1, p_2, p_3, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{33}, v_1, v_2, v_3)\, dt$$

где Ω — некоторая положительная функция, которая будет найдена в процессе решения задачи. Заранее определим лишь структуру Ω, положив

$$\Omega = F_1(p_1, p_2, p_3) + F_2(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{33}) + \sum n_i v_i^2 + \Lambda(p_1, p_2, p_3, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{33}) \qquad (2.5)$$

Здесь

$$F_1(p_1, p_2, p_3) = \sum_{i,k} e_{ik} p_i p_k$$

имея в виду, что на постоянные коэффициенты e_{ik} $(e_{ii} > 0)$, $n_i > 0$ $(i, k = 1, 2, 3)$ в дальнейшем будут наложены соответствующие ограничения; функция F_2 подлежит определению, Λ обозначает возможные члены порядка выше второго. Функция F_1 должна быть определенно-положительной квадратичной формой от скоростей, функция F_2 ищется в виде положительной (желательно — определенно-положительной) квадратичной формы от α_{ik}.

При решении поставленной задачи воспользуемся основной теоремой второго метода Ляпунова исследования проблем оптимальной стабилизации (см., например, [1]). Теорема дает достаточные условия оптимальной стабилизации на основе теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости и уравнения Беллмана в частных производных.

Рассмотрим сначала задачу об оптимальной стабилизации невозмущенного движения (2.4) в силу «укороченной» системы уравнений. Согласно теореме, оптимальное управление v_i° и оптимальная функция Ляпунова V° должны удовлетворять следующей системе четырех уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial V^\circ}{\partial p_1}(-h_{13}p_2+h_{12}p_3+v_1^\circ)+\frac{\partial V^\circ}{\partial p_2}(h_{23}p_1-h_{21}p_3+v_2^\circ)+\\+\frac{\partial V^\circ}{\partial p_3}(-h_{32}p_1+h_{31}p_2+v_3^\circ)+\sum_i\delta_ip_i+\sum_{i,k}\frac{\partial V^\circ}{\partial \alpha_{ik}}A_{ik}+\\+\Omega(p_1,p_2,p_3,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{33},v_1^\circ,v_2^\circ,v_3^\circ)=0\\ \frac{\partial V^\circ}{\partial p_i}+2n_iv_i^\circ=0\qquad(i=1,2,3)\end{gathered}\tag{2.6}$$

Здесь

$$\delta_1=\frac{\partial V^\circ}{\partial\alpha_{32}}-\frac{\partial V^\circ}{\partial\alpha_{23}}\qquad(123)$$

Поскольку

$$v_i^\circ=-\frac{1}{2n_i}\frac{\partial V^\circ}{\partial p_i}\qquad(i=1,2,3)\tag{2.7}$$

получаем для функции V° одно нелинейное уравнение в частных производных первого порядка

$$\begin{gathered}-\sum_i\frac{1}{4n_i}\left(\frac{\partial V^\circ}{\partial p_i}\right)^2+\frac{\partial V^\circ}{\partial p_1}(-h_{13}p_2+h_{12}p_3)+\frac{\partial V^\circ}{\partial p_2}(h_{23}p_1-h_{21}p_3)+\\+\frac{\partial V^\circ}{\partial p_3}(-h_{32}p_1+h_{31}p_2)+\sum_i\delta_ip_i+\sum_{i,k}\frac{\partial V^\circ}{\partial\alpha_{ik}}A_{ik}+F_1(p_1,p_2,p_3)+\\+F_2(\alpha_{11},\ldots,\alpha_{33})+\Lambda(p_1,p_2,p_3,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{33})=0\end{gathered}\tag{2.8}$$

В соответствии с (1.3) возмущения α_{ik} $(i,k=1,2,3)$ связаны шестью соотношениями

$$\Phi_{kl}=\alpha_{kl}+\alpha_{lk}+\sum_i\alpha_{ki}\alpha_{li}=0\qquad(k,l=1,2,3;\ k\leqslant l)\tag{2.9}$$

которые можно рассматривать как интегралы уравнений (2.2), (2.3).

Введем следующую функцию Φ_0 с неопределенными коэффициентами, состоящую из линейных и квадратичных членов:

$$2\Phi_0=-2\sum_ik_i\alpha_{ii}+\sum_im_ip_i^2+2p_1\sum_{i,k}a_{ik}\alpha_{ik}+2p_2\sum_{i,k}b_{ik}\alpha_{ik}+2p_3\sum_{i,k}c_{ik}\alpha_{ik}$$
$$(k_i>0,\ m_i>0)\tag{2.10}$$

Функцию V° будем искать в виде связки

$$2V^\circ=2\Phi_0+\sum_ik_i\Phi_{ii}\tag{2.11}$$

представляющей собой квадратичную форму от всех переменных p_1, p_2, p_3, $\alpha_{11},\ldots,\alpha_{33}$. Частные производные $\partial V^\circ/\partial p_i$, через которые выражается управление согласно (2.7), равны (2.12)

$$\frac{\partial V^\circ}{\partial p_1} = m_1 p_1 + \sum_{i,k} a_{ik}\alpha_{ik}, \quad \frac{\partial V^\circ}{\partial p_2} = m_2 p_2 + \sum_{i,k} b_{ik}\alpha_{ik}, \quad \frac{\partial V^\circ}{\partial p_3} = m_3 p_3 + \sum_{i,k} c_{ik}\alpha_{ik}$$

Подставив (2.1) в уравнение (2.8) и приравняв нулю коэффициенты при членах второго порядка, получим систему алгебраических уравнений, связывающую коэффициенты функций V° и Ω (2.13)

$$d_1^2 n_1 + a_{23} - a_{32} = e_{11}, \quad d_2^2 n_2 - b_{13} + b_{31} = e_{22}, \quad d_3^2 n_3 + c_{12} - c_{21} = e_{33}$$
$$m_1 h_{13} - m_2 h_{23} = 2e_{12}, \quad -m_1 h_{12} + m_3 h_{32} = 2e_{13}, \quad m_2 h_{21} - m_3 h_{31} = 2e_{23}$$
$$d_i = m_i / 2n_i \qquad (i = 1,2,3)$$

Остальные уравнения разбиваются на девять подсистем, линейных относительно a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, каждая из которых содержит по три коэффициента, отвечающих одинаковым номерам i, k. Все подсистемы имеют один и тот же определитель

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -d_1, & h_{23}, & -h_{32} \\ -h_{13}, & -d_2, & h_{31} \\ h_{12}, & -h_{21}, & -d_3 \end{vmatrix} \qquad (2.14)$$

а в правые части входят числа k_i $(i = 1, 2,3)$.

Будем считать величины d_i заданными и достаточно большими (нижняя грань d_i будет установлена впоследствии). Тогда ввиду малости h_{ik} определитель Δ_1 заведомо не равен нулю и каждая подсистема имеет единственное решение. Решения получаются следующие:

$$a_{11} = b_{11} = c_{11} = 0$$

$$a_{12} = -\frac{k_1}{\Delta_1}(d_2 h_{32} - h_{23} h_{31}), \qquad a_{13} = -\frac{k_1}{\Delta_1}(d_3 h_{23} + h_{21} h_{32})$$
$$b_{12} = \frac{k_1}{\Delta_1}(d_1 h_{31} + h_{13} h_{32}), \qquad b_{13} = -\frac{k_1}{\Delta_1}(d_1 d_3 + h_{12} h_{32})$$
$$c_{12} = \frac{k_1}{\Delta_1}(d_1 d_2 + h_{13} h_{23}), \qquad c_{13} = \frac{k_1}{\Delta_1}(d_1 h_{21} - h_{12} h_{23}) \qquad (2.15)$$

$$a_{22} = b_{22} = c_{22} = 0$$

$$a_{21} = \frac{k_2}{\Delta_1}(d_2 h_{32} - h_{23} h_{31}), \qquad a_{23} = \frac{k_2}{\Delta_1}(d_2 d_3 + h_{21} h_{31})$$
$$b_{21} = -\frac{k_2}{\Delta_1}(d_1 h_{31} + h_{13} h_{32}), \qquad b_{23} = -\frac{k_2}{\Delta_1}(d_3 h_{13} - h_{12} h_{31})$$
$$c_{21} = -\frac{k_2}{\Delta_1}(d_1 d_2 + h_{13} h_{23}), \qquad c_{23} = \frac{k_2}{\Delta_1}(d_2 h_{12} + h_{13} h_{21})$$

$$a_{33} = b_{33} = c_{33} = 0$$

$$a_{31} = \frac{k_3}{\Delta_1}(d_3 h_{23} + h_{21} h_{32}), \qquad a_{32} = -\frac{k_3}{\Delta_1}(d_2 d_3 + h_{21} h_{31})$$
$$b_{31} = \frac{k_3}{\Delta_1}(d_1 d_3 + h_{12} h_{32}), \qquad b_{32} = \frac{k_3}{\Delta_1}(d_3 h_{13} - h_{12} h_{31})$$
$$c_{31} = -\frac{k_3}{\Delta_1}(d_1 h_{21} - h_{12} h_{23}), \qquad c_{32} = -\frac{k_3}{\Delta_1}(d_2 h_{12} + h_{13} h_{21})$$

Из формул (2.15) видно, что при достаточно больших d_i все a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ будут достаточно малы, так как они имеют при этом условии порядок $1 / d_i$. Последнее обеспечивает определенную положительность функции $V°$. Одновременно будет выполнена определенная положительность формы $F_1(p_1, p_2, p_3)$, так как в соответствии с (2.13) коэффициенты e_{ik} $(i \neq k)$ малы по сравнению с e_{ii}. Функция F_2 записывается в виде

$$F_2(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{33}) = \frac{1}{4n_1}\Big(\sum_{i,k} a_{ik}\alpha_{ik}\Big)^2 + \frac{1}{4n_2}\Big(\sum_{i,k} b_{ik}\alpha_{ik}\Big)^2 + \frac{1}{4n_3}\Big(\sum_{i,k} c_{ik}\alpha_{ik}\Big)^2 \qquad (2.16)$$

Поскольку α_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ связаны шестью соотношениями (2.9), функция F_2 может быть сделана определенно-поло ительнсй. Область $F_2 = 0$ определяется равенствами

$$\Phi_{21} = \sum_{i,k} a_{ik}\alpha_{ik} = 0, \quad \Phi_{31} = \sum_{i,k} b_{ik}\alpha_{ik} = 0, \quad \Phi_{32} = \sum_{i,k} c_{ik}\alpha_{ik} = 0 \qquad (2.17)$$

В совокупности с (2.9) получаем девять соотношений

$$\Phi_{kl} = 0 \qquad (k, l = 1, 2, 3)$$

Функция F_2 будет определенно-положительной, если положение равновесия (2.4) является изолированным. Последнее имеет место при условии

$$\left[\frac{D(\Phi_{11}, \Phi_{12}, \ldots, \Phi_{33})}{D(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33})}\right]_{\alpha_{11}=\ldots=\alpha_{33}=0} \neq 0 \qquad (2.18)$$

Условие (2.18) с учетом (2.15) можно записать в виде

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} d_2d_3 + h_{21}h_{31} & -d_3h_{23} - h_{21}h_{32} & -d_2h_{32} + h_{23}h_{31} \\ d_3h_{13} - h_{12}h_{31} & d_1d_3 + h_{12}h_{32} & -d_1h_{31} - h_{13}h_{32} \\ d_2h_{12} + h_{13}h_{21} & d_1h_{21} - h_{12}h_{23} & d_1d_2 + h_{13}h_{23} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (2.19)$$

Это соотношение заведомо выполняется при достаточно больших d_i.

Для того чтобы уравнение (2.8) точно удовлетворялось при выбранной функции $V°$, нужно взять функцию Λ из (2.5) в форме

$$\Lambda(p_1, p_2, p_3, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{33}) = -\sum_{i,k} (p_1a_{ik} + p_2b_{ik} + p_3c_{ik}) A_{ik} \qquad (2.20)$$

Добавление этой функции естественно не нарушает знакоопределенность основной квадратичной формы.

Отметим, что при больших d_i соотношения (2.13) дают

$$d_i \approx \sqrt{e_{ii} / n_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

т. е. наличие больших d_i равносильно наличию больших e_{ii} / n_i.

Таким образом, установлено, что положение равновесия (2.4) стабилизи руется в силу «укороченной» системы уравнений (2.3), (2.2) посредством управления (2.7), (2.12), (2.15), если постоянные k_i, m_i, n_i выбраны так, что: 1) формы $V°$ и F_1 являются определенно-положительными; 2) выполняются неравенства $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$.

Из этих условий при фиксированных k_i можно вычислить нижнюю грань $m_i / 2n_i$. При этом найденное управление оказывается оптимальным в смысле минимума интеграла от функции Ω (2.5), (2.13), (2.20).

Легко видеть, что из стабилизации положения равновесия (2.4), в силу «укороченной» системы уравнений (2.3), (2.2), вытекает стабилизация (2.4) в силу полных уравнений (2.1), (2.2), Действительно, члены P_1, P_2, P_3 в (2.1) удовлетворяют в малой окрестности (2.4) условиям

$$|P_1| < \varepsilon_1 l_1 (|p_2| + |p_3|), \qquad l_1 = \max(|h_{12}|, |h_{13}|) \quad (123) \tag{2.21}$$

Здесь ε_1, ε_2, ε_3 — достаточно малые положительные постоянные.

Построенная функция $V°$ устанавливает асимптотическую устойчивость решения (2.4) полных уравнений (2.1), (2.2), так как производная от $V°$ по времени в силу полных уравнений отличается от соответствующей производной в силу «укороченных» уравнений лишь наличием дополнительных членов высокого порядка

$$\sum_i \frac{\partial V°}{\partial p_i} P_i \tag{2.22}$$

что ввиду условий (2.21) не нарушает ее знакоопределенность, установленную в силу «укороченной» системы.

Следовательно, найденное управление обеспечивает стабилизацию (2.4), исходя из полных уравнений (2.1), (2.2). Эта стабилизация не будет, однако, оптимальной в смысле минимума интеграла от функции (2.5), (2.13), (2.20), так как уравнение (2.8) не будет удовлетворяться ввиду появления новых членов (2.22). Тем не менее, можно обеспечить оптимальную стабилизацию (2.4), добавив в найденные функции $V°$ и Ω соответствующие члены высокого порядка, учитывающие наличие слагаемых (2.22). Это, очевидно, осуществляется не единственным способом. Например, можно, не изменяя $V°$, прибавить все члены (2.22) с обратным знаком к функции Ω.

3. Анализ полученных результатов. В соответствии с (2.7), (2.12), (2.15) найденное управление $v_i°$ (управление $u_i°$ отличается от $v_i°$ лишь множителями $J_i - C_i$)

$$-v_1° = d_1 p_1 + \frac{1}{2n_1}\sum_{i,k} a_{ik}\alpha_{ik}, \qquad -v_2° = d_2 p_2 + \frac{1}{2n_2}\sum_{i,k} b_{ik}\alpha_{ik}$$
$$-v_3° = d_3 p_3 + \frac{1}{2n_3}\sum_{i,k} c_{ik}\alpha_{ik} \tag{3.1}$$

характерно тем, что в нем можно выделить члены, линейные относительно скоростей p_1, p_2, p_3 с большими коэффициентами d_i и члены, зависящие от координат α_{ik} с коэффициентами, которые выражаются через d_i и начальные возмущения h_{ik}. Управление (3.1) существенно зависит от начальных возмущений: чем больше h_{ik}, тем большими следует выбирать d_i. Будем считать, что величины h_{ik} сколь угодно малы и имеют порядок малости координат α_{ik}. Не нарушая общности, можно положить $k_1 = k_2 = k_3 = k > 0$ (при нахождении управления нигде не предполагалось, что k_i различны).

Тогда в соответствии с (2.15), считая $\Delta_1 \approx - d_1 d_2 d_3$, управлению (3.1) можно придать следующий вид:

$$-v_1^\circ = d_1 p_1 + \frac{k}{m_1}(\alpha_{32} - \alpha_{23}) + [2]_1 + [3]_1 \qquad (123) \tag{3.2}$$

где символы $[2]_i$, $[3]_i$ обозначают невыписанные члены второго и третьего порядка малости (с учетом малости h_{ik}). Таким образом, члены в (3.1), зависящие от координат, делятся на члены первого, второго и третьего порядка малости.

Представляет интерес записать управление (3.2) в виде функций угловых отклонений платформы. Возьмем, например, в качестве координат, определяющих положение платформы, три угла Крылова [2]: φ (рысканье), ψ (дифферент) и θ (крен). Рассматриваемое положение равновесия (2.4) имеет вид

$$\varphi = \psi = \theta = 0 \tag{3.3}$$

Возмущения α_{ik} выражаются через возмущения углов φ, ψ, θ по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= -\varphi + \ldots, \quad \alpha_{13} = \psi + \ldots, \quad \alpha_{23} = -\theta + \ldots \\ \alpha_{21} &= \varphi + \ldots, \quad \alpha_{31} = -\psi + \ldots, \quad \alpha_{32} = \theta + \ldots \end{aligned} \tag{3.4}$$

Многоточие означает члены порядка малости выше первого. Из (3.2), (3.4) получим

$$\begin{gathered} -v_1^\circ = d_1 p_1 + \frac{2k}{m_1}\theta + \ldots, \qquad -v_2^\circ = d_2 p_2 + \frac{2k}{m_2}\psi + \ldots \\ -v_3^\circ = d_3 p_3 + \frac{2k}{m_3}\varphi + \ldots \end{gathered} \tag{3.5}$$

Структуру управления (3.1) можно заранее предположить, основываясь на соображениях, изложенных ниже. Рассмотрим управление

$$v_i^* = -d_i p_i \qquad (d_i > 0, \ i = 1, 2, 3) \tag{3.6}$$

Нетрудно проверить, что d_i можно подобрать таким образом, чтобы характеристическое уравнение системы (2.3) имело все корни с отрицательными вещественными частями. Остальные корни характеристического уравнения системы первого приближения, соответствующей (2.3), (2.2), равны нулю. Следовательно, формально получается критический случай девяти нулевых корней. Полного эффективного решения задачи устойчивости в этом случае не найдено. Однако структура правых частей системы (2.2) такова, что они обращаются в нуль при нулевых значениях некритических переменных p_1, p_2, p_3. Последнее означает, что рассматриваемый критический случай является «особенным» [3], в котором задача устойчивости легко решается. Решение (2.4) при этом устойчиво, причем асимптотически устойчиво по скоростям p_1, p_2, p_3, т. е. платформа асимптотически приближается к одному из положений равновесия, лежащих в окрестности (2.4). Значит, управление (3.6) обеспечивает для положения равновесия (2.4) асимптотическую устойчивость по скоростям и обычную устойчивость по координатам. Для того чтобы сделать (2.4) асимптотически устойчивым и по координатам, оказывается достаточным добавить к управлению (3.6) малые члены, зависящие от координат.

4. Учет внутреннего трения. При исследовании, проведенном выше, не учитывалось вязкое трение в осях маховиков, которое всегда имеется в реальной системе и может существенно повлиять на движение последней. Найденное управление (3.1) приводит к тому, что платформа, получив начальные возмущения, возвращается в исходное положение равновесия (1.6). В этом положении управляющие моменты u_i обращаются в нуль и маховики продолжают вращаться по инерции. Однако моменты вязкого трения в осях $x_1 x_2 x_3$

$$M_i = -f_i \omega_i \qquad (f_i > 0, \ i = 1, 2, 3) \tag{4.1}$$

не будучи ничем скомпенсированными, выведут платформу из достигнутого положения равновесия. Чтобы этого не произошло, управляющие моменты u_i в положении равновесия (1.6) не должны обращаться в нуль, уравновешивая моменты сопротивления (4.1). Вместо уравнений (1.4) будем иметь

$$J_i (\omega_i^{\cdot} + p_i^{\cdot}) = u_i + M_i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{4.2}$$

В положении равновесия (1.6) моменты $u_{i0} = f_i \omega_i$. Взяв в качестве

$$v_i = -\frac{1}{C_i - J_i} (u_i - f_i \omega_i) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{4.3}$$

сохраняем в силе все последующие рассуждения. Искомое управление u_i° получим в виде

$$u_i^\circ = f_i \omega_i - (C_i - J_i) v_i^\circ \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{4.4}$$

где ω_i — функции $p_1, p_2, p_3, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{33}, h_1, h_2, h_3$ согласно (1.8), а v_i° получены в форме (3.2).

В заключение отметим, что полученные результаты сохраняют силу и в случае, когда возмущения h_{ik} являются конечными величинами. Выбирая d_i достаточно большими, можно удовлетворить всем вышеуказанным неравенствам и снова записать управление в форме (3.2) или (4.4).

Автор благодарит Н. Н. Красовского и Г. К. Пожарицкого за интерес к работе и ценные замечания.

Поступила 5 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. О стабилизации неустойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи. ПММ. 1963, т. 27, вып. 4.
2. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, 1961, стр. 51.
3. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Гостехиздат, 1952.