Из этих выражений видно, в частности, что добавочные упругие члены имеют вблизи фронтов такую же интенсивность, что и акустические члены, но иную диаграмму направленности. Таким образом, отличие упругой задачи от акустической существенно не только вблизи ребра клина, но и во всей области дифракции.

Поступила 8 IX 1965

## ЛИТЕРАТУРА

1. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики гл. XII. ОНТИ, 1937.
2. Фридлендер Ф. Звуковые импульсы. Изд-во иностр. лит., 1962.
3. Филиппов А. Ф. Дифракция произвольной акустической волны на клине. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2, стр. 305—318.
4. Филиппов А. Ф. Некоторые задачи дифракции плоских упругих волн. ПММ, 1956, т. 20, вып. 6, стр. 688—703.
5. Свекло В. А., Сюкияйнен В. А. Дифракция плоской упругой волны относительно угля. Докл. АН СССР, 1958, т. 119, № 6.

---

# ТЕОРЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЧАСТЕЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

**А. А. Богоявленский** (Москва)

Наибольший интерес для решения задач динамики представляют методы, которые не затрагивают вопроса об определении сил реакций связей. Как правило, реакции связей в системах заранее неизвестны и их общие свойства задаются посредством свойств связей. Основная мысль в этих методах заключается в том, чтобы свойства связей выражать свойствами возможных перемещений. Рассматривая механическое движение как преобразование координат, можно устанавливать некоторые соответствия между возможными перемещениями и этими преобразованиями. Другими словами, можно из класса возможных перемещений выделить совокупность возможных перемещений, обладающих свойствами некоторых преобразований. Тогда для таких возможных перемещений эти преобразования дают уже некоторые свойства механической системы, которые при определенных требованиях, наложенных на силы, сводятся к существованию первых интегралов уравнений движения системы.

В работе рассматривается с этой точки зрения некоторое обобщение первых двух основных теорем динамики механической системы, состоящей из произвольного числа материальных точек $m_1, m_2, \ldots$ и стесненной гладкими голономными связями — теоремы о движении центра масс системы и о моменте количеств движения системы.

§ 1. Пусть механическая система $\Lambda$, состоящая из произвольного числа материальных точек $m_1, m_2, \ldots$, может быть разделена на части (1) и (2), свойства которых характеризуются наложенными связями, действующими силами и реакциями следующим образом. Введем две прямоугольные системы координат $xyz$ и $x'y'z'$, которые все время остаются параллельными неподвижной системе координат $x_1y_1z_1$.

Начала подвижных систем координат $Axyz$ и $A'x'y'z'$ помещены соответственно в некоторые точки $A$ и $A'$, отнесенные к системам (1) и (2).

Положения точек $A$ и $A'$ относительно неподвижных осей $x_1y_1z_1$ определяются координатами: $\alpha, \beta, \gamma$ и $\alpha', \beta', \gamma'$, которые связаны с координатами $\alpha^\circ$, $\beta^\circ, \gamma^\circ$ и $\alpha^{\circ\prime}$, $\beta^{\circ\prime}, \gamma^{\circ\prime}$ центров тяжестей $G$ и $G'$ систем (1) и (2) относительно тех же осей соотношениями

$$\begin{aligned} \alpha^\circ &= \lambda\alpha + \alpha_0, & \beta^\circ &= \lambda\beta + \beta_0, & \gamma^\circ &= \lambda\gamma + \gamma_0 \\ \alpha^{\circ\prime} &= \lambda'\alpha' + \alpha_0', & \beta^{\circ\prime} &= \lambda'\beta' + \beta_0', & \gamma^{\circ\prime} &= \lambda'\gamma' + \gamma_0' \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha_0', \beta_0', \gamma_0'$ — произвольные постоянные.

Скорости точек $A$ и $A'$ параллельны соответственно скоростям центров тяжести $G$ системы (1) и $G'$ системы (2). Пусть гладкие связи, наложенные на систему, таковы, что можно, не изменяя относительного расположения точек внутри каждой части системы, сообщить системам (1) и (2) возможные винтовые перемещения.

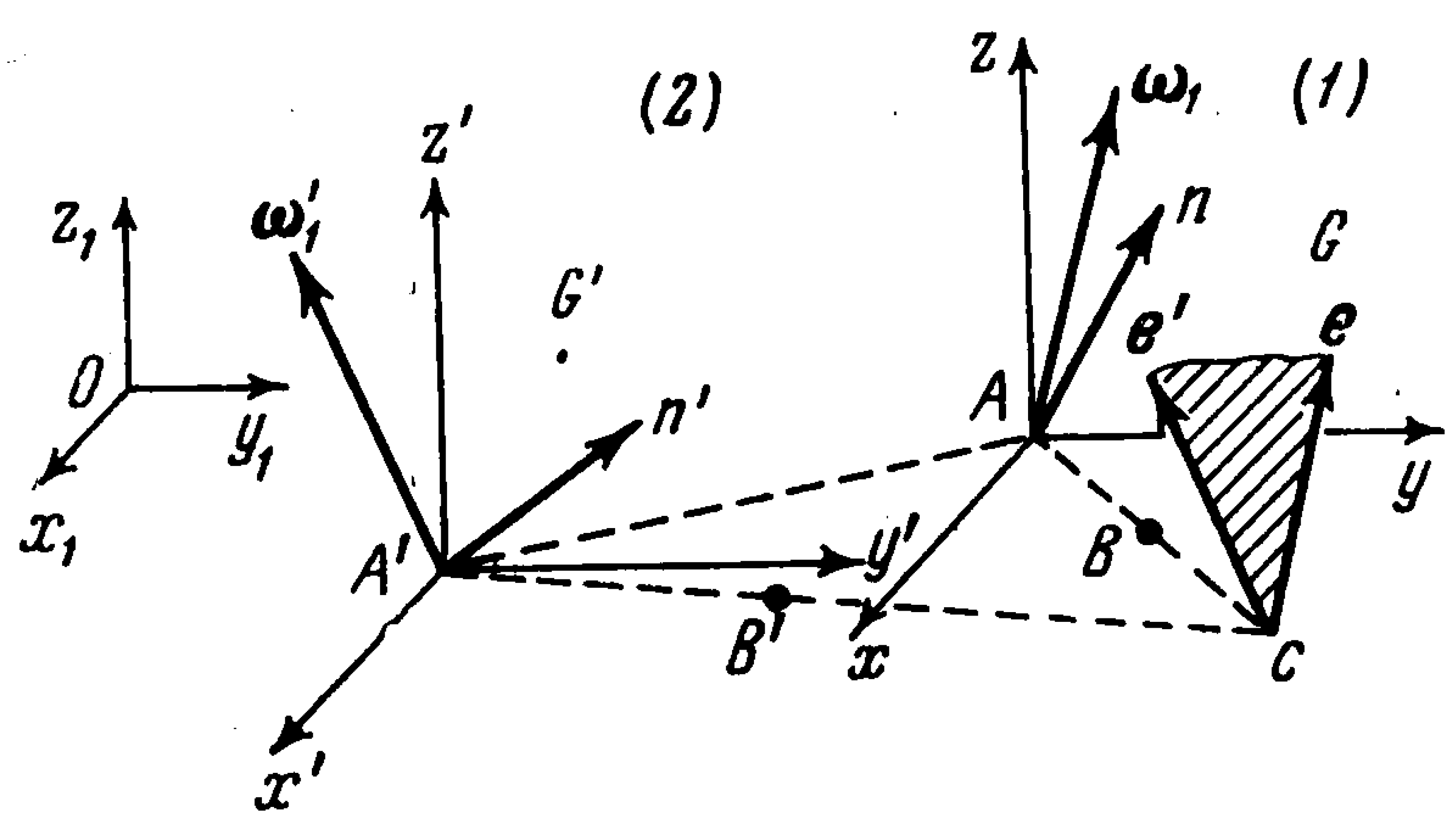
Эти винтовые перемещения систем (1) и (2) могут быть представлены (по Гамильтону) двумя бивекторами перемещений, главные части которых (повороты) направлены по двум прямым $\omega_1$ и $\omega_1'$, проходящим через движущиеся точки $A$ и $A'$.

Моменты бивекторов (поступательные перемещения) также проходят через точки $A$ и $A'$ соответственно и направлены по прямым $n$ и $n'$ (фиг.).

Для системы (1) перемещения произвольной точки твердого тела согласно формулам Эйлера в проекциях на неподвижные оси получаются круговой перестановкой $S$ четырех групп букв ($x_1$, $y_1$, $z_1$; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; $\pi_1$, $\sigma_1$, $\rho_1$; $x$, $y$, $z$) в формуле

$$\delta x_1 = \delta\alpha + \sigma_1 z - \rho_1 y \qquad (S) \tag{1.2}$$

Здесь $\pi_1$, $\sigma_1$, $\rho_1$ — проекции на неподвижные оси мгновенного бесконечно малого поворота твердого тела (1), $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ — проекции перемещения точки $A$ вдоль прямой $n$. Формулы (1.2) можно представить под видом




$$\delta x_1 = \lambda_1 + \sigma_1 z_1 - \rho_1 y_1 \quad (S) \tag{1.3}$$

Здесь в круговую перестановку включена группа букв $\lambda_1$, $\mu_1$, $\nu_1$.

Величины $\lambda_1$, $\mu_1$, $\nu_1$ имеют значение

$$\lambda_1 = \delta\alpha - \sigma_1\gamma + \rho_1\beta \quad (S) \tag{1.4}$$

Перемещения (1.3) твердого тела составлены из поворота вокруг оси, отнесенной к началу неподвижной системы координат с компонентами $\pi_1$, $\sigma_1$, $\rho_1$ и переноса с компонентами $\lambda_1$, $\mu_1$, $\nu_1$. Последний согласно (1.4) состоит из двух частей: первая часть есть перенос, совпадающий с перемещением точки $A$ ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$); вторая совпадает с перемещением точки твердого тела, находящейся в начале неподвижной системы координат вследствие поворота твердого тела вокруг оси, отнесенной к точке $A$. Компоненты этого поворота в проекциях на неподвижные оси будут те же самые: $\pi_1$, $\sigma_1$, $\rho_1$.

Формулы (1.2) выражают перемещения твердого тела, состоящие из переноса и поворота, если перенос, совпадающий с перемещением точки $A$, характеризовать свободным вектором с компонентами $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ и поворот вокруг оси, проходящей через начало подвижной системы осей $A$, характеризовать скользящим вектором с компонентами $\pi_1$, $\sigma_1$, $\rho_1$.

Формулы (1.3) получаются в результате приведения этих двух векторов (свободного и скользящего) к началу неподвижной системы координат.

Произвол выбора неподвижной системы координат дает возможность направить ось $z_1$ параллельно оси поворота и провести ее так, чтобы при том же направлении осей $x$ и $y$ было $\delta x = \delta y = 0$.

Тогда в такой неподвижной системе осей координат $x_1{}^*y_1{}^*z_1{}^*$ будем иметь $\pi_1 = \sigma_1 = 0$, и уравнения для перемещений примут вид

$$\delta x_1{}^* = -y_1{}^*\rho_1, \qquad \delta y_1{}^* = x_1{}^*\rho_1, \qquad \delta z_1{}^* = \nu_1 \tag{1.5}$$

Перемещение будет бесконечно малым винтовым перемещением твердого тела, состоящим из поступательного перемещения вдоль оси $z_1{}^*$ на величину $\nu_1$ и поворота вокруг этой оси на величину $\rho_1$ [1].

Обозначая все величины, связанные с системой координат $x'y'z'$ индексом «штрих вверху», получим при приведении свободного и скользящего векторов, характеризующих перемещения системы (2) как твердого тела

$$\delta x_1' = \delta\alpha' + \sigma_1' z' - \rho_1' y' \qquad (S') \tag{1.6}$$

Остальные уравнения получаются круговой перестановкой букв

$$S' \; (x_1', y_1', z_1'; \; \alpha', \beta', \gamma'; \; \pi_1', \sigma_1', \rho_1'; \; x', y', z')$$

Здесь $\pi_1'$, $\sigma_1'$, $\rho_1'$ — проекции на неподвижные оси мгновенного бесконечно малого поворота твердого тела (2); $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ — проекции перемещения точки $A'$ вдоль прямой $n'$.

Равенствам (1.2) и (1.6) будут соответствовать бесконечно малые винтовые перемещения твердых тел (1) и (2).

Проведем плоскость $\pi$, параллельную векторам $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_1'$ и проходящую чере точку $C$, расположенную на пересечении двух прямых неизменного направления $AB$ и $A'B'$. Точки $B$ и $B'$ неизменно расположены в системах координат $xyz$ и $x'y'z'$ соответственно.

Построим из точки $C$ два единичных вектора $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ в плоскости $\pi$, параллельных соответственно векторам $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_1'$.

Пусть $a$, $b$, $c$ — координаты точки $B$ в системе осей $xyz$; $a'$, $b'$, $c'$ — координаты точки $B'$ в системе осей $x'y'z'$; $l_0$, $m_0$, $n_0$ и $l_0'$, $m_0'$, $n_0'$ — направляющие косинусы единичных векторов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$.

Обозначим через $\mu$ ($\mu \neq \mathrm{const}$) отношение длин отрезков $AC : AB$; через $\mu'$ ($\mu' \neq \mathrm{const}$) — отрезков $A'C : A'B'$ (см. фиг.); через $X, Y, Z$ — проекции внешних сил, действующих на точки системы $\Lambda$; через $M$— сумму масс системы (1); через $M'$— сумму масс системы (2); через $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ — векторы, совпадающие с отрезками $AB$ и $A'B'$ соответственно.

Координаты центра тяжести $G$ системы (1) относительно осей $xyz$ и координаты центра тяжести $G'$ системы (2) относительно осей $x'y'z'$ будут соответственно

$$(\lambda - 1)\alpha + \alpha_0, \qquad (\lambda - 1)\beta + \beta_0, \qquad (\lambda - 1)\gamma + \gamma_0$$
$$(\lambda' - 1)\alpha' + \alpha_0', \qquad (\lambda' - 1)\beta' + \beta_0', \qquad (\lambda' - 1)\gamma' + \gamma_0'$$

В подвижных системах координат, связанных с точками $A$ и $A'$, имеем

$$\begin{gathered}\Sigma mx = M\,[(\lambda - 1)\alpha + \alpha_0], \qquad \Sigma my = M\,[(\lambda - 1)\beta + \beta_0] \\ \Sigma mz = M\,[(\lambda - 1)\gamma + \gamma_0] \\ \Sigma' mx' = M'\,[(\lambda' - 1)\alpha' + \alpha_0'], \qquad \Sigma' my' = M'\,[(\lambda' - 1)\beta' + \beta_0'] \\ \Sigma' mz' = M'\,[(\lambda' - 1)\gamma' + \gamma_0']\end{gathered} \tag{1.7}$$

Здесь и далее обозначено: $\Sigma$ — суммирование по точкам системы (1); $\Sigma'$ — суммирование по точкам системы (2).

Свойства связей, наложенных на систему $\Lambda$, определяются следующими предположениями:

1°. Связи гладкие и допускают вращение системы (1) вокруг прямой $\omega_1$ и поступательное перемещение вдоль прямой $n$, вращение системы (2) вокруг прямой $\omega_1'$ и поступательное перемещение вдоль прямой $n'$ как твердых тел.

2°. Подвижные прямые $\omega_1$ и $\omega_1'$, проходящие через $A$ и $A'$ соответственно, имеют неизменные направления.

3°. Прямые $n$ и $n'$ перпендикулярны плоскостям, проходящим через $\mathbf{A}'$, $\boldsymbol{\omega}_1'$ и $\mathbf{A}$, $\boldsymbol{\omega}_1$ соответственно.

Возможные перемещения $\boldsymbol{\delta}\mathbf{l}$ ($\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$) вдоль прямой $n$ и $\boldsymbol{\delta}\mathbf{l}'$ ($\delta\alpha'$, $\delta\beta'$, $\delta\gamma'$) вдоль прямой $n'$ выберем так, чтобы выполнялись равенства

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{l} = \chi'\mu'\mathbf{e}' \times \mathbf{A}', \qquad \boldsymbol{\delta}\mathbf{l}' = \chi\mu\mathbf{e} \times \mathbf{A} \tag{1.8}$$

Здесь $\chi'$, $\chi$ — постоянные коэффициенты пропорциональности.

Величины возможных поворотов $\omega_1$ и $\omega_1'$ выберем так, чтобы они находились в постоянном отношении

$$\begin{gathered}\omega_1' = K\omega_1 \qquad (K = \mathrm{const}) \\ \boldsymbol{\omega}_1 = \omega_1\mathbf{e}, \qquad \pi_1 = \omega_1 l_0, \qquad \sigma_1 = \omega_1 m_0, \qquad \rho_1 = \omega_1 n_0 \\ \boldsymbol{\omega}_1' = \omega_1'\mathbf{e}', \qquad \pi_1' = \omega_1' l_0', \qquad \sigma_1' = \omega_1' m_0', \qquad \rho_1' = \omega_1' n_0'\end{gathered} \tag{1.9}$$

Пусть возможные винтовые перемещения твердых тел (1) и (2) выбраны так, чтобы при выполнении (1.7) и (1.8) имели место равенства

$$\chi'\mu' = \varkappa'\omega_1', \qquad \chi\mu = \varkappa\omega_1 \qquad (\varkappa', \varkappa = \mathrm{const}) \tag{1.10}$$

Силы, действующие на систему $\Lambda$, обладают следующими свойствами:

4°. Системы (1) и (2) находятся под действием произвольных внутренних сил.

5°. Внешние силы, действующие на систему (1), если их сложить в предположении ее неизменяемости, приводятся у точки $A$ к силе $\mathbf{F}$, расположенной в плоскости, проведенной через $A$ и параллельной прямым $A'C$, $\omega_1'$ и к паре с моментом $\mathbf{M}°$.

Имеет место соотношение

$$\mathbf{F}\omega_1'\mathbf{A}' = 0 \tag{1.11}$$

6°. Внешние силы, действующие на систему (2), при приведении их к точке $A'$ при тех же предположениях дают силу $\mathbf{F}'$ и пару с моментом $\mathbf{M}^{\circ\prime}$. Сила $\mathbf{F}'$ расположена в плоскости, проведенной через $A'$ и параллельной прямым $AC$, $\omega_1$. Имеет

$$\mathbf{F}'\omega_1\mathbf{A} = 0 \tag{1.12}$$

7°. Проекция момента первой пары на направление $\omega_1$, умноженная на $\omega_1$, в сумме с проекцией момента второй пары на направление $\omega_1'$, умноженной на $\omega_1'$, дают нуль

$$\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{M}^\circ + \boldsymbol{\omega}_1' \cdot \mathbf{M}^{\circ\prime} = 0 \tag{1.13}$$

Это может быть, например, если моменты $\mathbf{M}^\circ$ и $\mathbf{M}^{\circ\prime}$ перпендикулярны $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_1'$.

Пусть силы действия системы (1) на систему (2) приводятся в точке $A$ к реакции $\mathbf{R}$ $(R_x, R_y, R_z)$ и паре, проекции момента которой $\mathbf{H}$ по осям координат $xyz$ будут $H_x$, $H_y$, $H_z$, в точке $A'$ — к реакции $\mathbf{R}$ и паре, момент которой $\mathbf{H}'$ имеет по осям $x'y'z'$ проекции $H'_{x'}$, $H'_{y'}$, $H'_{z'}$, в точке $C$ — к реакции $\mathbf{R}$ и паре, момент которой будет $\mathbf{W}$

$$\mathbf{W} = \mathbf{H} - \mu\mathbf{A} \times \mathbf{R} = \mathbf{H}' - \mu'\mathbf{A}' \times \mathbf{R} \tag{1.14}$$

При приведении сил реакций механическая система предполагается неизменяемой.

8°. Силы действия системы (1) на систему (2) таковы, что момент $\mathbf{W}$ перпендикулярен плоскости $\pi$, т. е. векторам $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{e} = 0, \qquad \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}' = 0 \tag{1.15}$$

Вместо указанного требования можно было бы предположить, что момент $\mathbf{W}$ расположен в плоскости, перпендикулярной прямой, которая проходит через концы векторов $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_1'$, построенных у точки $C$

$$\mathbf{W} \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_1') = 0$$

9°. При приведении указанных сил к точке $C$ выполняется равенство

$$\omega_1 (\varkappa - \mu)\, \mathbf{ReA} = \omega_1' (\varkappa' - \mu')\, \mathbf{Re'A'} \tag{1.16}$$

Это равенство могло бы, например, быть выполненным, если реакция $\mathbf{R}$, построенная у точки $C$, лежала на пересечении плоскостей, проходящих через $\mathbf{e}$, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{e}'$, $\mathbf{A}'$.

Применим основной принцип динамики систем материальных точек

$$\sum \left\{ \left(m \frac{d^2x_1}{dt^2} - X\right) \delta x_1 + \left(m \frac{d^2y_1}{dt^2} - Y\right) \delta y_1 + \left(m \frac{d^2z_1}{dt^2} - Z\right) \delta z_1 \right\} = 0$$

к системам (1) и (2), полагая, что возможные перемещения определены формулами (1.2) и (1.6). В соответствии с формулами (1.1), (1.7) и формулами перехода от неподвижной системы координат к подвижным имеем для системы (1)

$$\delta\alpha \frac{d}{dt} \lambda M \frac{d\alpha}{dt} + \delta\beta \frac{d}{dt} \lambda M \frac{d\beta}{dt} + \delta\gamma \frac{d}{dt} \lambda M \frac{d\gamma}{dt} + \pi_1 \frac{dS_1}{dt} + \sigma_1 \frac{dS_2}{dt} + \rho_1 \frac{dS_3}{dt} =$$

$$= \delta\alpha (\Sigma X - R_x) + \delta\beta (\Sigma Y - R_y) + \delta\gamma (\Sigma Z - R_z) + \pi_1 [\Sigma (yZ - zY) - H_x] +$$

$$+ \sigma_1 [\Sigma (zX - xZ) - H_y] + \rho_1 [\Sigma (xY - yX) - H_z] \tag{1.17}$$

Здесь

$$S_1 = (\lambda - 1) M \left(\beta \frac{d\gamma}{dt} - \gamma \frac{d\beta}{dt}\right) + M \left(\beta_0 \frac{d\gamma}{dt} - \gamma_0 \frac{d\beta}{dt}\right) + \Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}\right)$$

$$S_2 = (\lambda - 1) M \left(\gamma \frac{d\alpha}{dt} - \alpha \frac{d\gamma}{dt}\right) + M \left(\gamma_0 \frac{d\alpha}{dt} - \alpha_0 \frac{d\gamma}{dt}\right) + \Sigma m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt}\right) \tag{1.18}$$

$$S_3 = (\lambda - 1) M \left(\alpha \frac{d\beta}{dt} - \beta \frac{d\alpha}{dt}\right) + M \left(\alpha_0 \frac{d\beta}{dt} - \beta_0 \frac{d\alpha}{dt}\right) + \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right)$$

означают суммы моментов количеств движения относительно осей $x$, $y$, $z$ системы (1).

Для системы (2) таким же образом из принципа имеем

$$\delta\alpha' \frac{d}{dt} \lambda' M' \frac{d\alpha'}{dt} + \delta\beta' \frac{d}{dt} \lambda' M' \frac{d\beta'}{dt} + \delta\gamma' \frac{d}{dt} \lambda' M' \frac{d\gamma'}{dt} + \pi_1' \frac{dS_1'}{dt} + \sigma_1' \frac{dS_2'}{dt} +$$
$$+ \rho_1' \frac{dS_3'}{dt} = \delta\alpha' (\Sigma' X + R_x) + \delta\beta' (\Sigma' Y + R_y) + \delta\gamma' (\Sigma' Z + R_z) + \tag{1.19}$$
$$+ \pi_1' [\Sigma' (y' Z - z' Y) + H_{x'}'] + \sigma_1' [\Sigma' (z' X - x' Z) + H_{y'}'] + \rho_1' [\Sigma' (x' Y - y' X) + H_{z'}']$$

Здесь $S_1'$, $S_2'$, $S_3'$ имеют те же выражения, что и (1.18) (если приписать всем величинам индекс «штрих вверху») и означают суммы моментов количеств движения относительно осей $x'$, $y'$, $z'$ системы (2).

Складывая равенства (1.17) и (1.19) в силу формул (1.8), (1.9), условий (1.11—1.16), имеем в правой части нуль. Левая часть дает первый интеграл

$$K\varkappa'\lambda M \left\{ l_0' \left( b' \frac{d\gamma}{dt} - c' \frac{d\beta}{dt} \right) + m_0' \left( c' \frac{d\alpha}{dt} - a' \frac{d\gamma}{dt} \right) + n_0' \left( a' \frac{d\beta}{dt} - b' \frac{d\alpha}{dt} \right) \right\} +$$
$$+ \varkappa\lambda' M' \left\{ l_0 \left( b \frac{d\gamma'}{dt} - c \frac{d\beta'}{dt} \right) + m_0 \left( c \frac{d\alpha'}{dt} - a \frac{d\gamma'}{dt} \right) + n_0 \left( a \frac{d\beta'}{dt} - b \frac{d\alpha'}{dt} \right) \right\} +$$
$$+ l_0 S_1 + m_0 S_2 + n_0 S_3 + K (l_0' S_1' + m_0' S_2' + n_0' S_3') = \text{const} \tag{1.20}$$

Уравнения (1.17) и (1.19) позволяют получить теоремы взаимодействия между (1) и (2) частями системы $\Lambda$, математическим выражением которых служит первый интеграл (1.20). Он характеризует взаимные воздействия двух частей системы при указанных ранее условиях на связи, внешние силы и силы взаимодействия обеих частей. Эти теоремы будут некоторым обобщением первых двух основных теорем динамики и будут иметь различную формулировку для отдельных случаев воздействия количества движения и главного момента одной части системы на количество движения и главный момент другой части системы. Примеры этого приведены в § 2.

Здесь нет необходимости давать полные формулировки этих теорем. Они понятны из методов изложения общих теорем динамики систем материальных точек.

Краткое содержание их таково. Для механической системы, состоящей из произвольного числа материальных точек, на которую наложены связи, допускающие винтовые перемещения со свойствами, указанными в п.п.1° — 3°, и которая находится под действием сил со свойствами, указанными в п.п. 4° — 9°, имеет место интеграл (1.20). Этот интеграл будет некоторым обобщением интегралов первых двух общих теорем динамики — теоремы о движении центра масс системы и о моменте количеств движения системы.

§ 2. Из интеграла (1.20) получаются, как частные значения, интегралы первых двух общих теорем динамики и обобщенные интегралы Чаплыгина [3].

а) Полагаем $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ постоянными, $l_0 = m_0 = 0$, $n = 1$, $K = 0$, $a = b = c = 0$.

В соответствии с (1.8), (1.9) и (1,10) это равносильно тому, что система (2) отсутствует, а система (1) может вращаться без изменения конфигурации вокруг прямой $Az$.

Внешние силы, действующие в этом случае на систему (1), дают момент относительно прямой $Az$, равный нулю. Интеграл (1.20) дает $S_3 = \text{const}$, т. е. обобщенный интеграл площадей Чаплыгина (§ 1 работы [3]).

б) Полагаем $\varkappa' = \varkappa = \chi' = \chi = 0$, $l_0 = m_0 = l_0' = m_0' = 0$, $n_0 = n_0' = 1$.

В соответствии с (1.8), (1.9) и (1.10) это равносильно тому, что (1) и (2) части системы в отношении связей, внешних сил, центров $A$ и $A'$ и осей $Az$ и $A'z'$ обладают свойствами системы (1) пункта а. Из выражения (1.16) следует, что при произвольной $\mathbf{R}$ возможные повороты $\omega_1$ и $\omega_1'$ должны быть такими, чтобы моменты скользящих векторов $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_1'$ относительно точки $C$ были бы равны.

Точка $C$ необходимо должна лежать в плоскости, проходящей через $\omega_1$ и $\omega_1'$. Не уменьшая общности, можно положить ее лежащей на прямой $A'A$.

Постоянная $K$ будет равняться отношению отрезков $CA : CA'$.

Силы взаимодействия между системами (1) и (2) согласно (1.14) и (1.15) имеют равный нулю момент относительно прямой, параллельный $z$ и проходящей через точку $C$. Это дает

$$H_z : H'_{z'} = K$$

Интеграл (1.20) становится равным

$$S_3 + KS_3' = \mathrm{const}$$

т. е. получается интеграл Чаплыгина (интеграл (4) § 2 работы [3]).

в) Полагаем $\chi' = 0$, $K = 0$, $l_0' = m_0 = 0$, $n_0 = \mu = 1$.

В соответствии с (1.8), (1.9) и (1.10) это равносильно тому, что связи допускают вращение системы (1) вокруг подвижной прямой $Az$ и поступательное перемещение системы (2) по неизменному направлению $n'$, перпендикулярному вертикальной плоскости, которая проходит через $AC$. Точка $C$ совпадает с $B$ и имеет неизменное расположение в системе координат $xyz$. Перемещения (1) и (2) систем рассматриваются как перемещения твердых тел.

Силы взаимодействия системы (1) на систему (2) согласно (1.14) и (1.15) дают равный нулю момент относительно оси, параллельной $Az$ и проходящей через $C$.

Внешние силы, действующие на систему (1) согласно (1.13), дают равный нулю момент относительно оси $Az$. Внешние силы, действующие на систему (2) согласно (1.11), (1.12) и (1.13), дают произвольную пару с моментом $\mathbf{M}^{\circ\prime}$ и силу $\mathbf{F}'$, расположенную в плоскости, проведенной через $A'$ и параллельной прямым $AC$ и $\omega_1$.

В этом случае интеграл (1.20) дает

$$\varkappa\lambda' M' \left(a\frac{d\beta'}{dt} - b\frac{d\alpha'}{dt}\right) + S_3 = \mathrm{const}$$

Из формул (1.10) и (1.16) следует $\varkappa = 1$. Формулы (1.7) дают

$$\lambda' M' \frac{d\alpha'}{dt} = M' \frac{d}{dt}(\alpha' + f'), \qquad \lambda' M' \frac{d\beta'}{dt} = M' \frac{d}{dt}(\beta' + g') \qquad (\alpha' + f' = \alpha + f)$$
$$(\beta' + g' = \beta + g)$$

Здесь $f'$, $g'$ — координаты центра тяжести $G'$ системы (2) относительно осей $x'\,y'\,z'$, а $f$, $g$ — координаты центра тяжести $G'$ системы (2) относительно осей $xyz$.

Интеграл получает вид

$$M'\left(a\frac{dg}{dt} - b\frac{df}{dt}\right) + M'\left(a\frac{d\beta}{dt} - b\frac{d\alpha}{dt}\right) + S_3 = \mathrm{const}$$

т. е. вид интеграла Чаплыгина (интеграл (11) § 4 работы [3]). Этот интеграл имеет место при несколько иных силах и связях [4], чем те, которые указаны у Чаплыгина.

§ 3. Полученные результаты для механической системы материальных точек $\Lambda$ можно обобщить в том смысле, о котором говорит Чаплыгин в § 3, в конце § 4, и в § 5 своей работы [3]. Теоремы и интеграл живых сил механической системы связаны со свойствами группы действительных движений.

Поступила 29 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Кирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике. Лекция 5. М., Изд. АН СССР, 1962.
2. Котельников А. П. Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. Казань, 1895.
3. Чаплыгин С. А. О некотором возможном обобщении теоремы площадей с применением к задаче о катании шаров. Избр. тр. по механике и математике», М., Гостехиздат, 1954, стр. 434—454.
4. Богоявленский А. А. Об одном виде обобщенного интеграла площадей. ПММ, 1957, т. 21, вып. 3, стр. 422—423.