

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ЖЕСТКОМ КЛИНЕ, ВСТАВЛЕННОМ БЕЗ ТРЕНИЯ В БЕЗГРАНИЧНУЮ УПРУГУЮ СРЕДУ

Б. В. Костров (Москва)

Вопросы дифракции упругих волн привлекают в последнее время все большее внимание, в частности, в связи с задачами о взаимодействии упругих волн с подвижными препятствиями. Если препятствие имеет полигональную форму, то задача сводится к исследованию дифракции падающей волны на бесконечном клине. В то время, как в случае дифракции акустических волн задача о клине исследована с исчерпывающей полнотой [1, 2, 3], соответствующая задача в теории упругости, в общем случае, пока не поддается аналитическому решению, если не считать частного случая, когда клин вырождается в полубесконечный разрез [4].

В настоящей работе исследуется другой случай, позволяющий построить аналитическое решение, когда трение между жестким клином и окружающей его упругой средой отсутствует, но среда все же не отрывается от клина, т. е. когда на гранях клина исчезают нормальное смещение и касательное напряжение. При этих условиях отражение падающей волны от граней клина не приводит к появлению обменных волн, т. е. при падении продольной волны отражается только продольная, а при падении поперечной — только поперечная волна. Однако, как известно, если граница имеет острое ребро, для обеспечения единственности решения недостаточно одних только граничных и начальных условий, но необходимо сформулировать еще дополнительное условие, так называемое «условие на ребре», эквивалентное требованию выполнения закона сохранения энергии. Это последнее условие, как оказывается, не может быть удовлетворено, если ограничиться возмущениями только одного типа (продольными или поперечными), что приводит к возникновению обменной дифрагированной на ребре волны, несмотря на отсутствие отраженных обменных волн. Последнее обстоятельство не было замечено в работе В. А. Свекло и В. А. Сюкияйнена [5], посвященной рассматриваемой здесь задаче, и поэтому полученное в ней решение неверно.

Несмотря на то что условие на ребре не позволяет свести задачу полностью к акустическому случаю, задача все же оказывается весьма близкой к акустической, что и позволяет найти замкнутое аналитическое решение. Близость задачи к акустической проявляется, в конечном счете, в том, что возмущение оказывается суммой двух решений, первое из которых есть просто решение соответствующей акустической задачи, тогда как второе описывает влияние упругости. Как показывает исследование, этой последней частью решения никоим образом нельзя пренебречь по сравнению с акустической частью. Только в одном частном случае, когда плоская продольная волна падает на клин вдоль его биссектрисы, упругое слагаемое отсутствует и решение полностью совпадает с акустическим.

1. Постановка задачи. Рассматривается упругая среда с модулем сдвига μ и скоростями распространения продольных и поперечных волн a и b , соответственно, заполняющая сектор $r \geq 0$, $0 \leq \vartheta \leq \pi/k$ и граничащая с жестким клином ($\pi/k \leq \vartheta \leq 2\pi$), причем граничные условия имеют вид

$$u_{\vartheta} = 0, \quad \tau_{r\vartheta} = 0 \quad \text{при } \vartheta = 0, \pi/k, \quad 0 \leq r \leq \infty \quad (1.1)$$

где r, ϑ — цилиндрические координаты. Без ограничения общности можно считать $k < 1$, так как из этого случая $k > 1$ получается при помощи зеркального отражения. Действительно, если взять решение задачи для $k < 1$ и отделить от него антисимметричную относительно биссектрисы клина часть, то эта последняя будет решением для $k' = 2k \geq 1$.

Если ввести продольный и поперечный потенциалы, связанные с компонентами смещения соотношениями

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}, \quad u_{\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (1.2)$$

то граничные условия (1.1) будут выполнены, если потребовать, чтобы

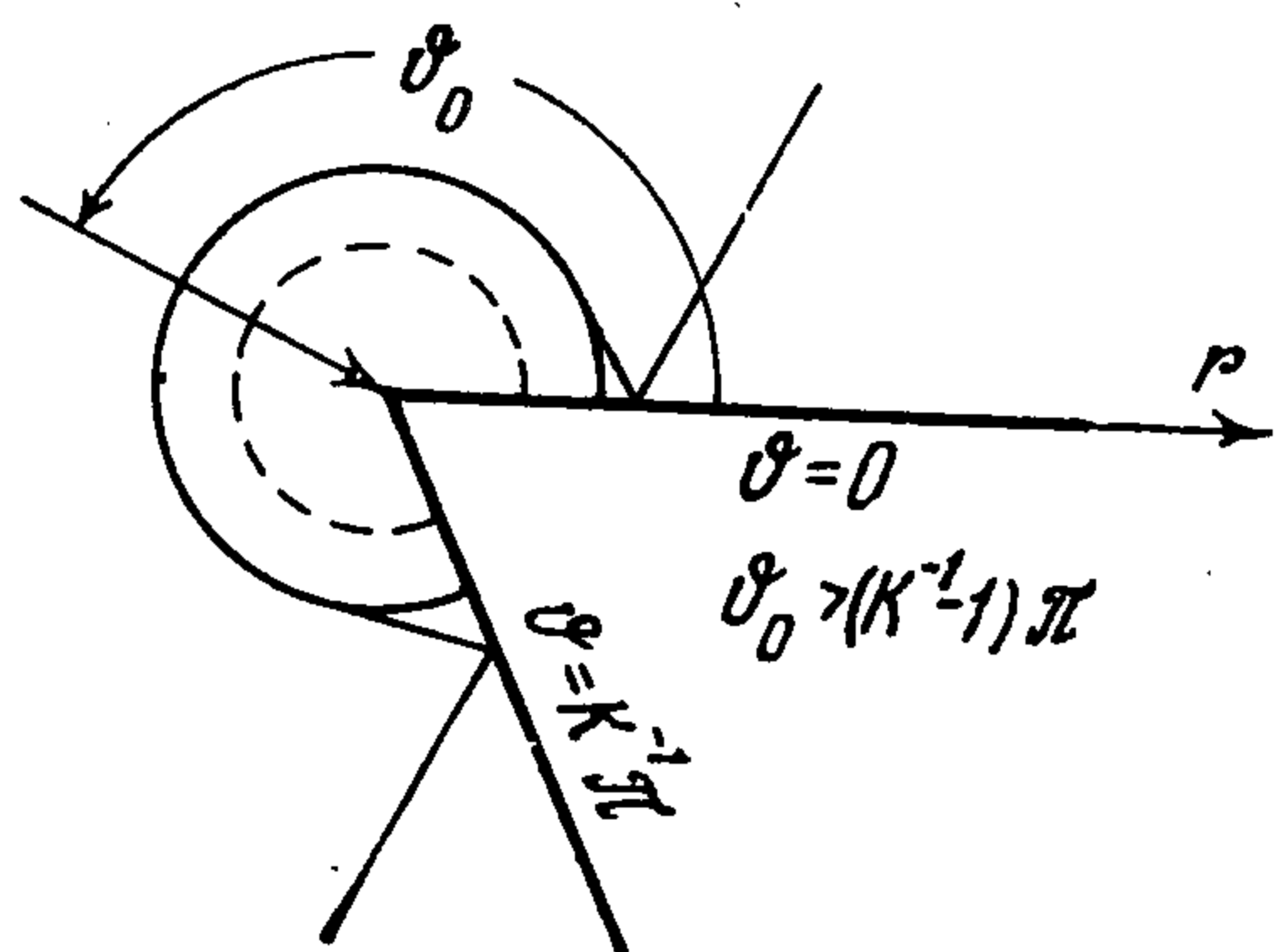
$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{при } \vartheta = 0, \quad \pi/k \quad (1.3)$$

Таким образом, граничные условия устанавливаются независимо для продольного и поперечного потенциалов. Это позволяет разыскивать потенциалы независимо до тех пор, пока не принимается во внимание условие на ребре.

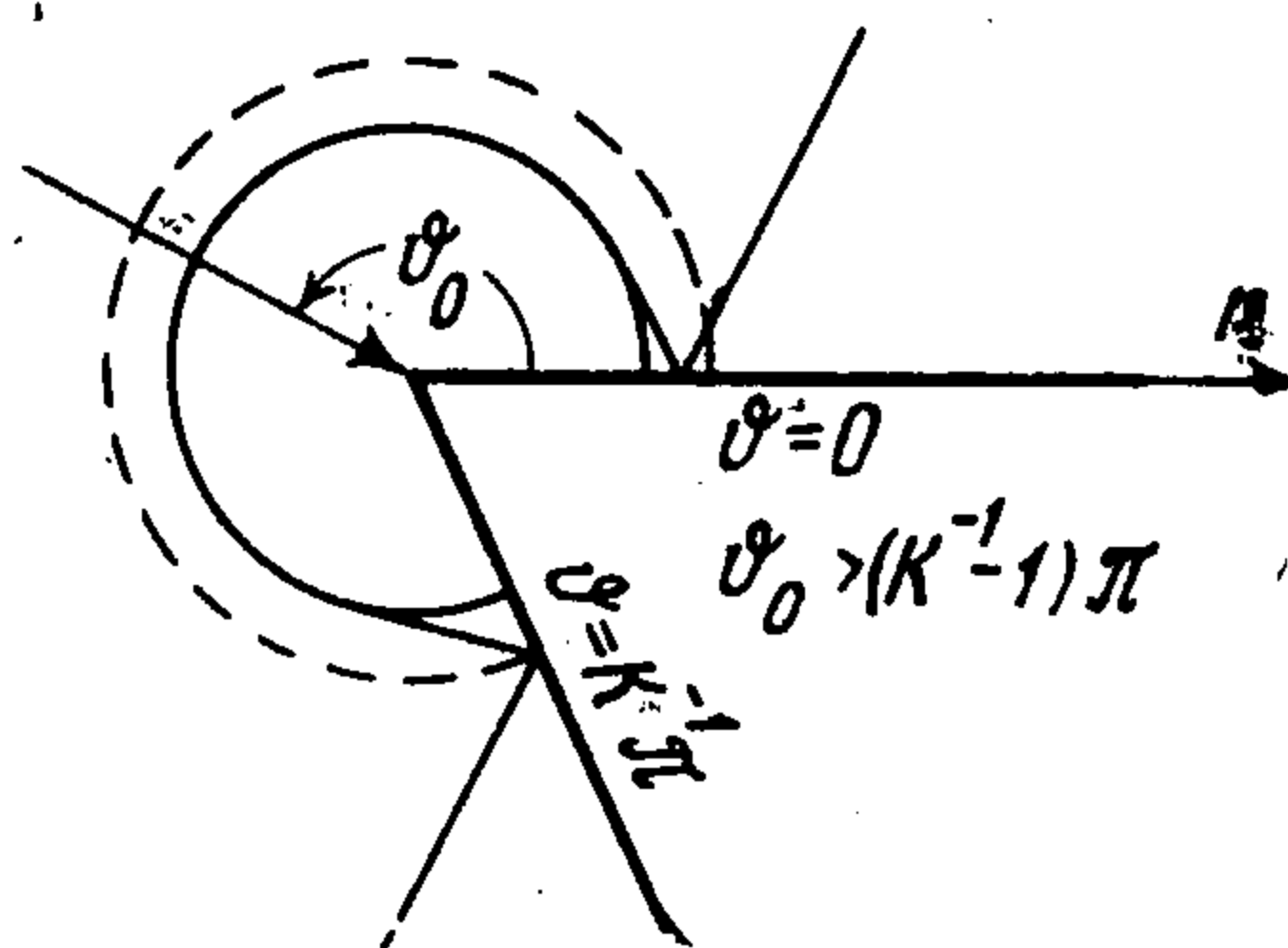
В качестве условия на ребре потребуем, чтобы при $k < 1$ смещения были ограничены, а напряжения и деформации росли медленнее, чем r^{-1} , иными словами

$$u = O(r^\lambda) + \text{const}, \quad \lambda > 0 \quad \text{при } r \rightarrow 0 \quad (1.4)$$

Будем считать, что потенциал падающей волны описывается ступенчатой функцией Хевисайда $H(\tau)$, т. е. равен нулю перед ее фронтом и единице за ним. При по-

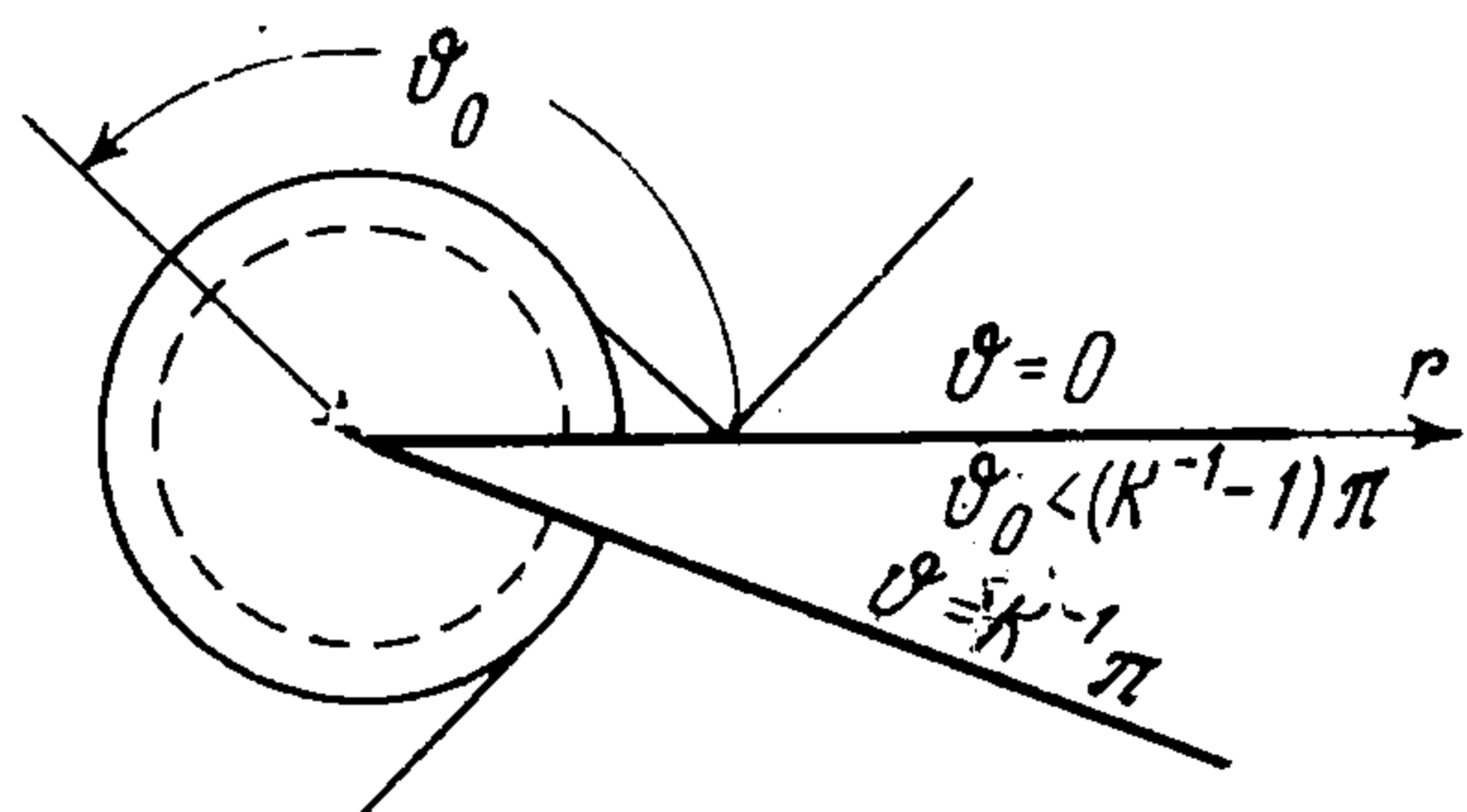


Фиг. 1

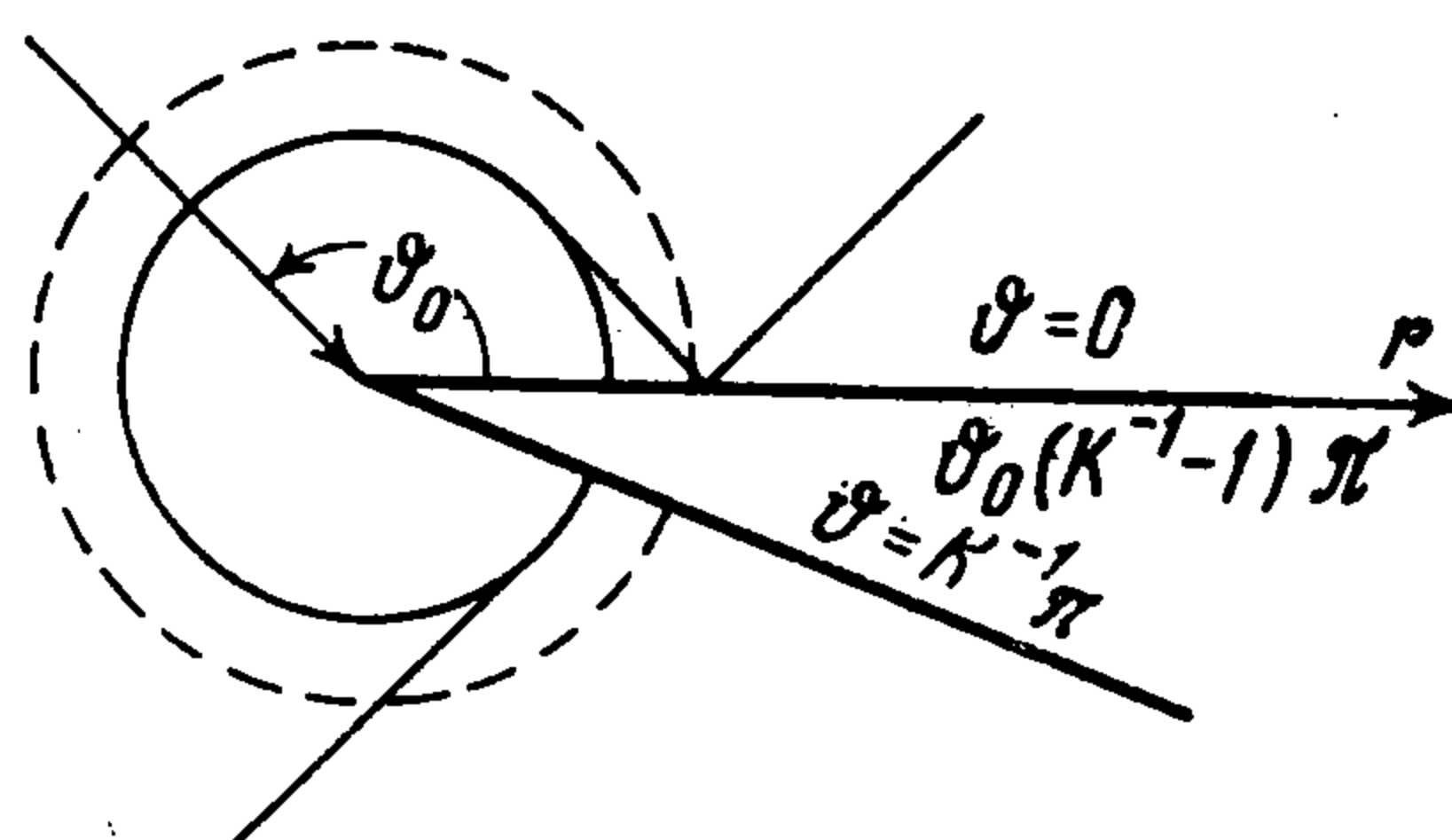


Фиг. 2

мощи интеграла Дюамеля можно перейти от этого случая к случаю падения произвольной плоской волны. Искомые продольный и поперечный потенциалы разобьем на два слагаемых, первое из которых описывает падающую волну, а второе пред-



Фиг. 3



Фиг. 4

ставляет собой возмущение, вызванное наличием клина и содержащее отраженные и дифрагированные волны. Таким образом, положим:

при падении продольной волны

$$\varphi = H\left(\frac{at}{r} \mp \cos(\vartheta - \vartheta_0)\right) \mp \varphi_1, \quad \psi = \psi_1 \quad (1.5)$$

при падении поперечной волны

$$\varphi = \varphi_1, \quad \psi = H\left(\frac{bt}{r} \mp \cos(\vartheta - \vartheta_0)\right) + \psi_1 \quad (1.6)$$

Потенциалы φ_1 и ψ_1 , описывающие возмущение, должны, очевидно, удовлетворять однородным начальным условиям и граничным условиям, вытекающим из условий (1.3), т. е. при падении продольной волны

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \vartheta} = \sin(\vartheta - \vartheta_0) \delta\left(\frac{at}{r} \mp \cos(\vartheta - \vartheta_0)\right), \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = 0 \quad \text{при } \vartheta = 0, \quad \pi/k \quad (1.7)$$

при падении поперечной волны

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = -\frac{\cos(\vartheta - \vartheta_0)}{r} \delta\left(\frac{bt}{r} \mp \cos(\vartheta - \vartheta_0)\right) \quad (1.8)$$

Здесь $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака.

Фронты отраженных и дифрагированных волн показаны на фиг. 1 для случая падения продольной и на фиг. 2 для случая падения поперечной волны при условии, что не образуется зоны тени. Случай, когда образуется тень, показан на фиг. 3 и 4. Заметим, что знак потенциала продольной отраженной волны совпадает со знаком потенциала падающей продольной волны (т. е. коэффициент отражения равен единице), а потенциал поперечной отраженной волны имеет знак, противоположный знаку потенциала падающей (коэффициент отражения равен -1).

Граничные и начальные условия задачи таковы, что искомое решение должно быть однородным нулевого измерения относительно r и t . Это позволяет использовать метод функционально инвариантных решений Смирнова — Соболева [1]. Следуя этому методу, введем переменные

$$z_1 = \operatorname{ch} k (\chi_1 + i\vartheta), \quad z_2 = \operatorname{ch} k (\chi_2 + i\vartheta) \quad \left(\operatorname{ch} \chi_1 = \frac{at}{r}, \quad \operatorname{ch} \chi_2 = \frac{bt}{r} \right) \quad (1.9)$$

Область продольного возмущения отображается на верхнюю полуплоскость комплексной переменной z_1 следующим образом: сектор $0 \leq \vartheta \leq \pi/k$, $0 < r < at$ отображается в верхнюю полуплоскость, причем радиусы $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi/k$ переходят в отрезки $(1, \infty)$ и $(-\infty, -1)$ действительной оси, а дуга окружности $r = at$ (фронт дифрагированной продольной волны) — в отрезок действительной оси $(-1, 1)$; внешность же этого сектора (та ее часть, где возможны продольные возмущения) также отображается в отрезок $(-1, 1)$. Область поперечного возмущения точно так же отображается в верхнюю полуплоскость переменной z_2 .

Потенциалы φ_1 и ψ_1 можно теперь искать в виде $\varphi_1 = \operatorname{Re} \Phi(z_1)$, $\psi_1 = \operatorname{Re} \Psi(z_2)$ где $\Phi(z_1)$ и $\Psi(z_2)$ — аналитические функции переменных z_1 и z_2 , регулярные в верхней полуплоскости и удовлетворяющие на действительной оси условиям, вытекающим из граничных условий (1.7) или (1.8).

2. Падение продольной волны. Можно показать, что из условий (1.7) следует:

$$\operatorname{Re} [i \sqrt{z_1^2 - 1} \Phi'(z_1)] = 0, \quad \operatorname{Im} z_1 = +0 \quad (2.1)$$

и что в точках $z_1 = \cos k(\vartheta_0 - \pi)$ и $z_1 = \cos k(\vartheta_0 + \pi)$ функция $\Phi'(z_1)$ должна иметь простые полюсы с вычетами, равными по абсолютной величине двум. Знак вычета зависит от угла падения и, как можно убедиться, должен совпадать со знаком $\sin k(\vartheta_0 - \pi)$ в полюсе $z_1 = \cos k(\vartheta_0 - \pi)$ и быть противоположным знаку $\sin k(\vartheta_0 + \pi)$ в полюсе $z_1 = \cos k(\vartheta_0 + \pi)$. Выберем ветвь радикала $\sqrt{z_1^2 - 1}$, равную $+i$ при $z_1 = 0$. Тогда решение граничной задачи (2.1) запишется в виде

$$\Phi'(z_1) = \frac{1}{\pi \sqrt{z_1^2 - 1}} [A_1(z_1) \sin(\vartheta_0 - \pi) k (z_1 - \cos(\vartheta_0 - \pi) k)^{-1} - A_2(z_1) \sin(\vartheta_0 + \pi) k (z_1 - \cos(\vartheta_0 + \pi) k)^{-1}] \quad (2.2)$$

где A_1 и A_2 — многочлены степени n_1 , удовлетворяющие условиям

$$A_1(\cos(\vartheta_0 - \pi) k) = A_2(\cos(\vartheta_0 + \pi) k) = 1 \quad (2.3)$$

Учитывая, что $z_1 = O(r^{-k})$ при $r \rightarrow 0$, отсюда можно заключить, что компоненты смещения имеют порядок

$$r^{[(1-n_1)k]-1} \quad \text{при } r \rightarrow 0$$

т. е. не ограничены даже при $n_1 = 0$, и условие на ребре (1.4) не может быть удовлетворено одним продольным потенциалом.

Чтобы удовлетворить условию на ребре (1.4), будем искать поперечный потенциал Ψ , компенсирующий особенность смещений, соответствующих продольному потенциалу (2.2). Из условий (1.7) следует, что

$$\operatorname{Re} \Psi'(z_2) = 0 \quad \text{при } \operatorname{Im} z_2 = 0 \quad (2.4)$$

причем функция $\Psi'(z_2)$ регулярна всюду в верхней полуплоскости, включая действительную ось. Отсюда следует, что

$$\Psi'(z_2) = iB(z_2) \quad (2.5)$$

где B — многочлен с действительными коэффициентами степени n_2 . Соответствующие смещения имеют порядок

$$r^{-[(n_2+1)k]-1} \quad \text{при } r \rightarrow 0$$

Для того чтобы особенности смещений на ребре компенсировались, должно быть $n_1 - 1 = n_2 + 1$ или $n_2 = n_1 - 2$. Можно убедиться, что условие на ребре может быть удовлетворено только при $n_2 = 0$, $n_1 = 2$. Теперь выражения (2.2) и (2.5) можно представить в виде

$$\Phi'(z_1) = \frac{1}{\pi \sqrt{z_1^2 - 1}} [(z_1 - \cos(\vartheta_0 - \pi)k)^{-1} \sin(\vartheta_0 - \pi)k - (z_1 - \cos(\vartheta_0 + \pi)k)^{-1} \sin(\vartheta_0 + \pi)k + \alpha z_1 + \beta], \quad \Psi'(z_1) = \frac{i}{\pi} \gamma \quad (2.6)$$

Из (1.2) и (2.6) находим выражения для смещений

$$u_\vartheta = \frac{-k}{\pi r} \operatorname{Im} \left[(z_1 - \cos k(\vartheta_0 - \pi))^{-1} \sin k(\vartheta_0 - \pi) - (z_1 - \cos k(\vartheta_0 + \pi))^{-1} \sin k(\vartheta_0 + \pi) + \alpha z_1 + \beta + \frac{bt\gamma \sqrt{z_2^2 - 1}}{\sqrt{b^2 t^2 - r^2}} \right] \quad (2.7)$$

$$u_r = \frac{-k}{\pi r} \operatorname{Re} \left\{ \frac{at}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}} [(z_1 - \cos k(\vartheta_0 - \pi))^{-1} \sin k(\vartheta_0 - \pi) - (z_1 - \cos k(\vartheta_0 + \pi))^{-1} \sin k(\vartheta_0 + \pi) + \alpha z_1 + \beta] + \gamma \sqrt{z_2^2 - 1} \right\}$$

В выражениях (2.6) и (2.7) действительные постоянные α , β и γ подлежат определению из условия на ребре. Пользуясь соотношениями (1.9), нетрудно найти первые члены асимптотических разложений выражений (2.7) при $r \rightarrow 0$

$$u_\vartheta = \frac{k}{\pi r} \sin k\vartheta \left\{ -a^k \frac{\alpha}{2} \left(\frac{2t}{r}\right)^k + b^k \frac{\gamma}{2} \left(\frac{2t}{r}\right)^k + a^{-k} \left[2\sin k(\vartheta_0 - \pi) - 2\sin k(\vartheta_0 + \pi) + \frac{\alpha}{2} \right] \left(\frac{r}{2t}\right)^k - b^{-k} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{r}{2t}\right)^{-k} \right\} + o(1)$$

$$u_r = \frac{-k}{\pi r} \left\{ \cos k\vartheta \left[a^k \frac{\alpha}{2} \left(\frac{2t}{r}\right)^k - b^k \frac{\gamma}{2} \left(\frac{2t}{r}\right)^k + a^{-k} \left(2\sin k(\vartheta_0 - \pi) - 2\sin k(\vartheta_0 + \pi) + \frac{\alpha}{2} \right) \left(\frac{r}{2t}\right)^k - b^{-k} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{r}{2t}\right)^k \right] + \beta \right\} + o(1)$$

Отсюда видно, что для выполнения условия на ребре нужно положить $\beta = 0$, $a^k \alpha + b^k \gamma = 0$, $a^{-k} [4 \sin k(\vartheta_0 - \pi) - 4 \sin k(\vartheta_0 + \pi)] + a^{-k} \alpha - b^{-k} \gamma = 0$

Теперь вместо (2.6) получим

$$\Phi'(z_1) = \frac{1}{\pi \sqrt{z_1^2 - 1}} \left\{ (z_1 - \cos k(\vartheta_0 - \pi))^{-1} \sin k(\vartheta_0 - \pi) - (z_1 - \cos k(\vartheta_0 + \pi))^{-1} \sin k(\vartheta_0 + \pi) + 8 \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{2k} \right]^{-1} \sin \pi k \cos k\vartheta_0 z_1 \right\} \quad (2.8)$$

$$\Psi'(z_2) = -8i \left[\left(\frac{a}{b}\right)^k + \left(\frac{b}{a}\right)^k \right]^{-1} \sin \pi k \cos \vartheta_0 k$$

Интегрируя и переходя к физическим переменным, получим (2.9)

$$\varphi = \varphi_a(r, \vartheta, t) + \frac{8}{\pi} \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{2k} \right]^{-1} \sin \pi k \cos \vartheta_0 k \cos \vartheta_0 k \left[P(at/r) - \frac{1}{P(at/r)} \right]$$

$$\psi = \frac{8}{\pi} \left(\frac{b}{a}\right)^k \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{2k} \right]^{-1} \sin \pi k \cos \vartheta_0 k \sin \vartheta k \left[P(bt/r) - \frac{1}{P(bt/r)} \right]$$

Здесь φ_a — решение акустической задачи с граничным условием $\partial \varphi_a / \partial \vartheta = 0$, а функция $P(\tau)$ равна

$$P(\tau) = (\tau + \sqrt{\tau^2 - 1})^k \quad (2.10)$$

Как видно из этих выражений, поправки к акустическому решению исчезают на фронтах дифрагированных волн, что вполне естественно, так как они не связаны с волнами, отраженными от граней клина. Легко видеть также, что эти поправки удовлетворяют однородным начальным и граничным условиям. Полученное решение совпадает с акустическим, если падающий луч направлен по биссектрисе клина ($\vartheta_0 = \pi / (2k)$), так как в этом случае $\cos k\vartheta_0 = 0$, обе поправки исчезают тождественно. При этом значении угла падения акустическое решение само по себе удовлетворяет условию на ребре (1.4).

3. Падение поперечной волны. При падении поперечной волны условия (2.1) и (2.4) остаются в силе, но теперь $\Phi'(z_1)$ должна быть регулярна в верхней полуплоскости, включая действительную ось, а $\Psi'(z_2)$ должна иметь простые полюсы в точках $z_2 = \cos k(\vartheta_0 - \pi)$ и $z_2 = \cos k(\vartheta_0 + \pi)$ с вычетами, равными ± 2 соответственно. Поступая аналогично тому, как описано в предыдущем разделе, находим

$$\Phi'(z_1) = \frac{-8z_1}{\pi \sqrt{z_1^2 - 1}} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^k + \left(\frac{b}{a}\right)^k \right]^{-1} \sin \pi k \sin \vartheta_0 k \quad (3.1)$$

$$\Psi'(z_2) = \frac{1}{\pi i} \left\{ [z_2 - \cos k(\vartheta_0 - \pi)]^{-1} - [z_2 - \cos k(\vartheta_0 + \pi)]^{-1} + \right. \\ \left. + 8 \left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{2k} \right]^{-1} \sin \pi k \sin \vartheta_0 k \right\}$$

Отсюда получаем выражение для потенциалов в физических переменных

$$\varphi = \frac{8}{\pi} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^k \left(\frac{b}{a}\right)^k \right]^{-1} \sin \pi k \sin \vartheta_0 k \cos \vartheta k \left[P(at/r) - \frac{1}{P(at/r)} \right] \quad (3.2)$$

$$\psi = \psi_a + \frac{8}{\pi} \left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{2k} \right]^{-1} \sin \pi k \sin \vartheta_0 k \sin \vartheta k \left[P(bt/r) - \frac{1}{P(bt/r)} \right]$$

Здесь ψ_a снова решение соответствующей акустической задачи ($\psi_a = 0$ на гранях клина). В данном случае не существует такого значения угла падения, при котором решение совпадало бы с акустическим, так как $\sin k\vartheta_0$ обращается в нуль только при $\vartheta_0 = 0$ или π/k , т. е. когда падающий луч скользит вдоль одной из граней клина, что невозможно, так как при этом отраженная волна уничтожает падающую.

4. Поведение дифрагированных волн вблизи фронтов. Пользуясь соотношениями (1.2), (1.9), (1.10) и (2.8), (3.1), нетрудно вычислить асимптотические выражения для смещений вблизи фронтов дифрагированных волн (но не вблизи точек касания этих фронтов с фронтами отраженных или падающих волн).

Введем переменные

$$\tau_1 = \frac{at}{r} - 1, \quad \tau_2 = \frac{bt}{r} - 1 \quad (4.1)$$

представляющие собой расстояния от фронтов продольной и поперечной волн соответственно. Тогда при падении продольной волны будем иметь

при $\tau_1 \rightarrow 0$

$$u_\vartheta = O(1), \quad u_r \approx \frac{-k}{\pi r \sqrt{2\tau_1}} \left\{ [\cos k\vartheta - \cos k(\vartheta_0 - \pi)]^{-1} \sin k(\vartheta_0 - \pi) - \right. \quad (4.2)$$

$$\left. - [\cos \vartheta k - \cos k(\vartheta_0 + \pi)]^{-1} \sin k(\vartheta_0 + \pi) + 8 \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^k \right]^{-1} \sin \pi k \cos k\vartheta_0 \cos \vartheta k \right\} + O(1)$$

при $\tau_2 \rightarrow 0$ (т. е. вблизи фронта поперечной волны)

$$u_r = O(1), \quad u_\vartheta = \frac{8k}{\pi r \sqrt{2\tau_2}} \left(\frac{a}{b}\right)^k \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^k \right]^{-1} \sin \pi k \cos \vartheta_0 k \sin \vartheta k + O(1) \quad (4.3)$$

Аналогичные выражения можно получить и для случая падения поперечной волны.

Из этих выражений видно, в частности, что добавочные упругие члены имеют вблизи фронтов такую же интенсивность, что и акустические члены, но иную диаграмму направленности. Таким образом, отличие упругой задачи от акустической существенно не только вблизи ребра клина, но и во всей области дифракции.

Поступила 8 IX 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики гл. XII. ОНТИ, 1937.
2. Фридлендер Ф. Звуковые импульсы. Изд-во иностр. лит., 1962.
3. Филиппов А. Ф. Дифракция произвольной акустической волны на клине. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2, стр. 305—318.
4. Филиппов А. Ф. Некоторые задачи дифракции плоских упругих волн. ПММ, 1956, т. 20, вып. 6, стр. 688—703.
5. Свекло В. А., Сюкияйнен В. А. Дифракция плоской упругой волны относительно угла. Докл. АН СССР, 1958, т. 119, № 6.

ТЕОРЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЧАСТЕЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

А. А. Богоявленский (Москва)

Наибольший интерес для решения задач динамики представляют методы, которые не затрагивают вопроса об определении сил реакций связей. Как правило, реакции связей в системах заранее неизвестны и их общие свойства задаются посредством свойств связей. Основная мысль в этих методах заключается в том, чтобы свойства связей выражать свойствами возможных перемещений. Рассматривая механическое движение как преобразование координат, можно устанавливать некоторые соответствия между возможными перемещениями и этими преобразованиями. Другими словами, можно из класса возможных перемещений выделить совокупность возможных перемещений, обладающих свойствами некоторых преобразований. Тогда для таких возможных перемещений эти преобразования дают уже некоторые свойства механической системы, которые при определенных требованиях, наложенных на силы, сводятся к существованию первых интегралов уравнений движения системы.

В работе рассматривается с этой точки зрения некоторое обобщение первых двух основных теорем динамики механической системы, состоящей из произвольного числа материальных точек m_1, m_2, \dots и стесненной гладкими голономными связями — теоремы о движении центра масс системы и о моменте количества движения системы.

§ 1. Пусть механическая система Λ , состоящая из произвольного числа материальных точек m_1, m_2, \dots , может быть разделена на части (1) и (2), свойства которых характеризуются наложенными связями, действующими силами и реакциями следующим образом. Введем две прямоугольные системы координат $x_1y_1z_1$ и $x'y'z'$, которые все время остаются параллельными неподвижной системе координат $x_1y_1z_1$.

Начала подвижных систем координат $Ax_1y_1z_1$ и $A'x'y'z'$ помещены соответственно в некоторые точки A и A' , отнесенные к системам (1) и (2).

Положения точек A и A' относительно неподвижных осей $x_1y_1z_1$ определяются координатами: α, β, γ и α', β', γ' , которые связаны с координатами $\alpha^0, \beta^0, \gamma^0$ и $\alpha^{0'}, \beta^{0'}, \gamma^{0'}$ центров тяжести G и G' систем (1) и (2) относительно тех же осей соотношениями

$$\begin{aligned} \alpha^0 &= \lambda\alpha + \alpha_0, & \beta^0 &= \lambda\beta + \beta_0, & \gamma^0 &= \lambda\gamma + \gamma_0 \\ \alpha^{0'} &= \lambda'\alpha' + \alpha_0', & \beta^{0'} &= \lambda'\beta' + \beta_0', & \gamma^{0'} &= \lambda'\gamma' + \gamma_0' \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha_0', \beta_0', \gamma_0'$ — произвольные постоянные.

Скорости точек A и A' параллельны соответственно скоростям центров тяжести G системы (1) и G' системы (2). Пусть гладкие связи, наложенные на систему, таковы, что можно, не изменяя относительного расположения точек внутри каждой части системы, сообщить системам (1) и (2) возможные винтовые перемещения.