О ФОРМУЛИРОВКЕ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Л. Берка (Прага, Чехословакия)

Задача осесимметричного напряженного состояния тел вращения для применения p-аналитических функций комплексного переменного приводится к краевой задаче, сформулированной Г. Н. Положевым в виде

$$R^* + iZ^* = -i\left[2r\frac{\partial\overline{\Phi(\xi)}}{\partial r} - 2r\frac{\partial\Phi(\xi)}{\partial r} - 2z\frac{\partial\Phi(\xi)}{\partial z} + \overline{\Phi(\xi)} + \Psi(\xi)\right]_L + 2\mu\int_L^{\pi}\frac{u}{r}\,dz$$

$$R^* = \int_L R_n\,ds, \qquad Z^* = \int_L rZ_n\,ds \tag{0.1}$$

Здесь $\Phi(\xi)$, $\Psi(\xi)$ — произвольные p-аналитические функции комплексного переменного $\xi = r + iz$ с характеристикой $1/r$.

В работе [2] это выражение краевых условий применялось к задачам, где интеграл по смещению u равен нулю для симметричного напряженного состояния толстых бесконечных плит.

Ниже предлагается формулировка первой краевой задачи для общего случая осесимметричного напряженного состояния тел вращения. Формулировка Г. Н. Положего основана на общем решении П. Ф. Папковича [3], которое выражено через p-аналитические функции комплексного переменного.

1. Предлагаемая формулировка основана на общих бигармонических решениях Лява [4] и Гродского [5]. Приведем необходимые в дальнейшем формулы для смещений и напряжений. Согласно общему решению Лява уравнения

$$\triangle\triangle\chi = 0, \qquad \triangle = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.1}$$

имеем следующие выражения:

для смещений

$$\frac{E}{1+\mu}u = \frac{\partial^2\chi}{\partial r\,\partial z}, \qquad \frac{E}{1+\mu}w = -(1-2\mu)\triangle\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r} \tag{1.2}$$

для напряжений

$$\sigma_r = -(1-\mu)\frac{\partial}{\partial z}(\triangle\chi) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r} + \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right)$$

$$\sigma_\theta = -(1-\mu)\frac{\partial}{\partial z}(\triangle\chi) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right) \tag{1.3}$$

$$\sigma_z = (1-\mu)\frac{\partial}{\partial z}(\triangle\chi) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r} + \frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}\right), \qquad \tau_{rz} = (1-\mu)\frac{\partial}{\partial r}(\triangle\chi) - \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^2\chi}{\partial r\,\partial z}\right)$$

Согласно общему решению Гродского уравнения

$$DD\Omega = 0, \qquad D = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

имеем следующие выражения:

для смещений

$$\frac{E}{1+\mu}u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^3\Omega}{\partial z^3} - \mu D\Omega\right), \qquad \frac{E}{1+\mu}w = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) - \mu D\Omega\right] \tag{1.4}$$

для напряжений

$$\sigma_r = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\,\partial z}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2} - \mu D\Omega\right), \qquad \sigma_\theta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2} + \mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}D\Omega\right)\right]$$

$$\sigma_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\,\partial z}\right)\right], \qquad \tau_{rz} = -\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\,\partial z}\right) \tag{1.5}$$

2. Выразим бигармонические функции χ и Ω посредством гармонических векторов φ_1 и φ_2, для которых выполняются уравнения

$$D(r\varphi_1) = 0, \qquad \Delta\varphi_2 = 0 \tag{2.1}$$

и справедливы соотношения [3]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi_1) = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}, \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} \tag{2.2}$$

В случае решения Лява примем, что

$$\Delta\chi = 2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi_1) + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right] = 2\,\mathrm{div}\,(\varphi_1, \varphi_2) \tag{2.3}$$

Тогда, используя уравнения (2.1), можно получить

$$2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi_1) + D(r\varphi_1) = \Delta(r\varphi_1), \quad 2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + z\Delta\varphi_2 = \Delta(z\varphi_2) \tag{2.4}$$

Складывая эти уравнения и принимая во внимание (2.3), получим

$$\Delta\chi = \Delta(r\varphi_1 + z\varphi_2) \tag{2.5}$$

Отсюда после интегрирования имеем

$$\chi = r\varphi_1 + z\varphi_2 + \gamma_2 \tag{2.6}$$

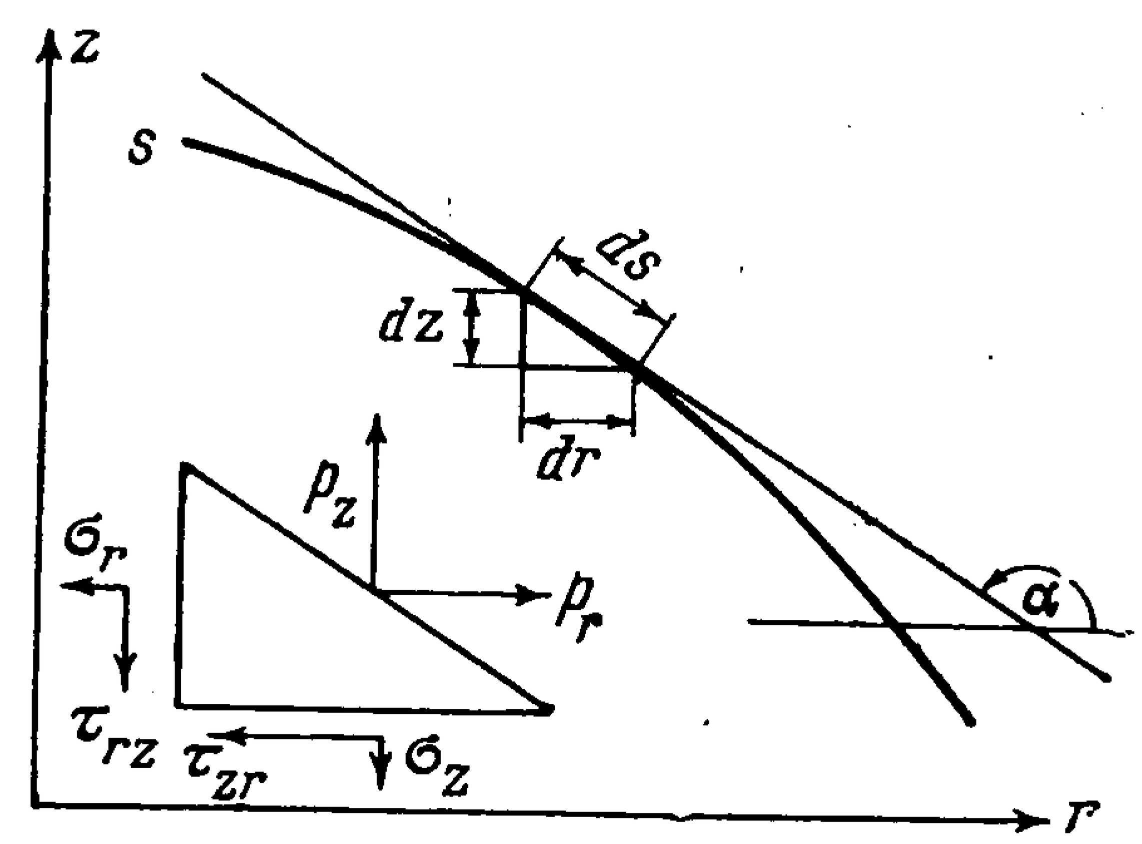
Здесь γ_2 — произвольная функция интегрирования, которая должна удовлетворять уравнению $\Delta\gamma_2 = 0$.

Чтобы выразить решение Гродского посредством φ_1, φ_2, надо положить

$$D\Omega = 2r\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right) \equiv 2r\,\mathrm{rot}\,(\varphi_1, \varphi_2) \tag{2.7}$$

Тогда при помощи (2.1) можно аналогично (2.4) получить

$$\begin{gathered} 2\frac{\partial}{\partial z}(r\varphi_1) + zD(r\varphi_1) = D(rz\varphi_1) \\ 2r\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} + r^2\Delta\varphi_2 = D(r^2\varphi_2) \end{gathered} \tag{2.8}$$



Вычитая второе уравнение из первого и принимая во внимание (2.7), получим

$$D\Omega = D\left[r(z\varphi_1 - r\varphi_2)\right] \tag{2.9}$$

Отсюда после интегрирования имеем

$$\Omega = r(z\varphi_1 - r\varphi_2 + \gamma_1) \tag{2.10}$$

Здесь γ_1 — произвольная функция, которая должна удовлетворять уравнению $D(r\gamma_1) = 0$.

3. Приступим к формулировке краевой задачи для функций напряжений χ и Ω. Для элемента контура между внешними усилиями p_r и p_z и внутренними напряжениями σ_r, σ_z, τ_{rz} должны выполняться уравнения равновесия (фигура)

$$p_r = \sigma_r \sin\alpha + \tau_{rz}\cos\alpha, \qquad p_z = \tau_{rz}\sin\alpha + \sigma_z\cos\alpha \tag{3.1}$$

И так как вдоль контура $\sin\alpha = dz/ds$, $\cos\alpha = -dr/ds$, то получаем

$$p_r = \sigma_r\frac{dz}{ds} - \tau_{rz}\frac{dr}{ds}, \qquad p_z = \tau_{rz}\frac{dz}{ds} - \sigma_z\frac{dr}{ds} \tag{3.2}$$

Подстановка в эти уравнения выражений (1.3) приводит к соотношениям для краевых значений $\chi(s)$; таким образом, с учетом зависимостей (2.2) и (2.3), в которых принимается, что

$$\Delta\chi = 4\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi_1) = 4\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \tag{3.3}$$

получим

$$p_r = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\chi}{\partial r\,\partial z}\frac{dz}{ds} - 4(1-\mu)\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)$$
$$p_z = \frac{1}{r} - \frac{d}{ds}\left(r\frac{\partial^2\chi}{\partial r\,\partial z}\right) + 4(1-\mu)\frac{1}{r}\frac{d}{ds}\left(r\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right) \tag{3.4}$$

Интегрируя эти выражения вдоль контура, получим

$$R \equiv \int_L p_r\,ds = \left[\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} - 4(1-\mu)\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right]_L + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r}\right]_L,$$
$$Z \equiv \int_L rp_z\,ds = -\left[\frac{\partial^2\chi}{\partial r\,\partial z} - 4(1-\mu)\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right]_L \tag{3.5}$$

Подставив эти результаты в выражения для нормальной и касательной компонент главного вектора внешних усилий к кривой контура, получим

$$N = R\frac{dz}{ds} - Z\frac{dr}{ds}, \qquad T = Z\frac{dz}{ds} + R\frac{dr}{ds}$$
$$N = \left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\chi}{\partial z}\right) - 4(1-\mu)\frac{d\varphi_2}{ds} + \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r}\frac{dz}{ds}\right]_L \tag{3.6}$$

$$T = \left[\frac{d}{dn}\left(\frac{\partial\chi}{\partial z}\right) + 4(1-u)\frac{d\varphi_2}{dn} + \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r}\frac{dr}{ds}\right]_L, \qquad \frac{d}{dn} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{dz}{ds} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{dr}{ds} \tag{3.7}$$

Теперь интегрировать первое из этих уравнений вдоль контура уже не удается.

Аналогично можно получить выражение краевых условий для функции напряжений Ω. С учетом (1.5), (2.2), (2.7) и (3.2) найдем

$$D\Omega = 4r\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = -4r\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}, \quad p_r = \frac{\partial^2\Omega'}{\partial z^2}\frac{dz}{ds} + \frac{\partial^2\Omega'}{\partial r\,\partial z}\frac{dr}{ds} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Omega'}{\partial r}\frac{dz}{ds} - \frac{4(1-\mu)}{r}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}\frac{dz}{ds}$$
$$p_z = -\frac{\partial^2\Omega'}{\partial r\,\partial z}\frac{dz}{ds} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Omega'}{\partial r}\right)\frac{dr}{ds}, \qquad \left(\Omega' = \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\,\partial z}\right) \tag{3.8}$$

Используя эти выражения интегрированием для компонент главного вектора внешних усилий, получим (3.9)

$$R \equiv \int_L p_r\,ds = \left[\frac{\partial\Omega'}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) - \frac{4(1-\mu)}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right]_L, \quad Z = \frac{1}{r}\int_L rp_z\,ds = -\left[\frac{\partial\Omega'}{\partial r}\right]_L$$

Используя (3.6) для N и T, найдем

$$N = \left[\frac{d\Omega'}{ds} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}\frac{dz}{ds} + \frac{4\mu}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right]_L, \quad T = \left[\frac{d\Omega'}{dn} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}\frac{dr}{ds} + \frac{4\mu}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{dr}{ds}\right]_L \tag{3.10}$$

Первое уравнение (3.10) можно проинтегрировать вдоль линии контура; имеем

$$M = \int_L N\,ds = \left[\Omega' - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Omega}{\partial z} + 4\mu\frac{\varphi_1}{r}\right]_L \tag{3.11}$$

Отсюда для M, в силу (3.7), (3.9), (3.10), получаем выражение в виде интегралов

$$M = \int_L ds \int_L p_r\,dz - \int_L \frac{ds}{r}\int_L rp_z\,dr \tag{3.12}$$

Этим соотношением формулировка первой краевой задачи для осесимметричного напряженного состояния тел вращения завершена. Далее, можно еще показать, что функция Ω' удовлетворяет уравнению

$$\triangle\triangle\Omega' = 0 \tag{3.13}$$

Поэтому

$$\Omega' \equiv \chi$$

4. Выразим функции напряжений χ и Ω через p-аналитические функции комплексного переменного [1] с характеристикой $1/r$

$$f(\xi) = \varphi_1 + i\varphi_2 \tag{4.1}$$

Такими называются функции комплексного переменного, для которых из условия существования производной в точке выполняются уравнения (2.1) и (2.2).

Функции напряжений χ и Ω теперь можно определить посредством p-аналитической функции комплексного переменного способом, вполне аналогичным представлению Колосова—Мусхелишвили для функции напряжения плоской задачи посредством обычной аналитической функции [6,7].

Выражение функции χ в виде (2.6) посредством $f(\xi)$ можно получить, если взять

$$2\chi = \bar{\xi} f(\xi) + \xi \bar{f}(\bar{\xi}) + i\,[\bar{g}(\bar{\xi}) - g(\xi)] \qquad (g(\xi) = \gamma_1 + i\gamma_2) \tag{4.2}$$

Здесь $g(\xi)$ — произвольная p-аналитическая функция.

Функцию Ω в виде (2.10) лучше писать как $r\omega$; при этом

$$\omega = z\varphi_1 - r\varphi_2 + \gamma_1 \tag{4.3}$$

Выражая ее через p-аналитические функции, получим

$$2\omega = i\,[\bar{\xi} f(\xi) - \xi \bar{f}(\bar{\xi})] + g(\xi) + \bar{g}(\bar{\xi}) \tag{4.4}$$

Для комплексного представления главного вектора внешних усилий находим: на основе решения Лявы для χ согласно (3.5) (4.5)

$$R + iZ = -i\left[\frac{\partial \chi'}{\partial r} + i\,\frac{\partial \chi'}{\partial z}\right]_L - 4(1-\mu)\,i\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - i\,\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right]_L + \left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial \chi}{\partial r}\right]_L \qquad \left(\chi' = \frac{\partial \chi}{\partial z}\right)$$

на основе решения Гродского для функции напряжения Ω согласно (3.9)

$$R + iZ = -i\left[\frac{\partial \chi}{\partial r} + i\,\frac{\partial \chi}{\partial z}\right]_L - \left[\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}\right] + 4\mu\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right] \tag{4.6}$$

где уже учитывается (3.13). Подстановкой (4.1), (4.2), (4.4) в (4.5) и (4.6) получим

$$R + iZ = \Big\{-i\,[f(\xi) + \xi \bar{f}'(\bar{\xi})] - \frac{2i}{\xi + \bar{\xi}}\left[f'(\xi) - \bar{f}'(\bar{\xi}) + \frac{\bar{\xi}}{2} f''(\xi) + \frac{\xi}{2}\bar{f}''(\bar{\xi})\right] +$$

$$+ \frac{8\mu}{\xi + \bar{\xi}}\, i\,[f'(\xi) - \bar{f}'(\bar{\xi})] + \bar{g}'(\bar{\xi}) + \frac{2}{\xi + \bar{\xi}}\,[g''(\xi) + \bar{g}''(\bar{\xi})]\Big\}_L \tag{4.7}$$

$$R + iZ\vartheta = \Big\{[f'(\xi) + \bar{f}'(\bar{\xi}) - \xi \bar{f}''(\bar{\xi}) - 4(1-\mu)\bar{f}'(\bar{\xi})] - i\bar{g}''(\bar{\xi}) +$$

$$+ \frac{1}{\xi + \bar{\xi}}\,[f(\xi) + \bar{f}(\bar{\xi}) + \bar{\xi} f'(\xi) + \xi \bar{f}'(\bar{\xi})] - \frac{i}{\xi + \bar{\xi}}\,[g'(\xi) - \bar{g}'(\xi)]\Big\}_L \tag{4.8}$$

Соотношения (3.10) и (3.11) аналогичным путем можно представить посредством функций комплексного переменного.

В соответствии с аналогией между общими решениями плоской и пространственной осесимметричной задачи теории упругости удалось сформулировать первую краевую задачу для осесимметричного напряженного состояния тел вращения.

Поступила 14 VIII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. П о л о ж и й Г. Н. К вопросу о p, q-аналитических функциях и их применениях. Revue de Mathematiques pures et Appliques, T. 2., RPR 1957.
2. П о л о ж и й Г. Н. О краевых задачах осесимметричной теории упругости. Метод p-аналитических функций комплексного переменного. Укр. матем. ж.,1963, т. 15, 1.
3. П а п к о в и ч П. Ф. К вопросу об аналогии между плоской задачей теории упругости и задачей о деформации симметричной. ПММ, 1939, т. 3, вып. 3.
4. A. E. H. L o v e M. A. A Treatise on the mathematical theory of Elasticity. v. 1,2. Cambridge, Univ. Press, 1893—1921.
5. К р у т к о в Ю. А. Тензор функций напряжений и общие решения в статике упругости. М.— Л., Изд-во Акад. наук СССР, 1949.
6. К о л о с о в Г. В. Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости. Юрьев., 1909, М.— Л.
7. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 4-е, М., Изд-во Акад. наук СССР, 1954.