

Для крыла с клиновидным профилем

$$Kv = \frac{1}{\sqrt{27 + v^{-3}\xi}}, \quad v = \frac{V}{k^{2/3}l^3}, \quad \xi = \frac{X_0}{kl^2} \quad (13)$$

кривая Kv , как функция $v^{-1}\xi^{1/3}$ приведена на фиг. 3 (пунктир) для сравнения с крылом с максимальным качеством. Для значений параметра $v^{-1}\xi^{1/3}$ больших, чем приведенные на фиг. 3, оптимальный профиль, по-видимому, должен включать участок с $p_2 = 0$.

Из формулы (3) видно, что существует оптимальный размер крыла

$$v = 1/3 \left(\frac{\xi}{2}\right)^{1/3}, \quad K = 1/3 \left(\frac{2}{\xi}\right)^{1/3}$$

Поступила 12 X 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. М а й к а п а р Г. И. О волновом сопротивлении неосесимметричных тел в сверхзвуковом потоке. ПММ, 1959, т. 23, вып. 2.
2. М а й к а п а р Г. И. О построении сверхзвукового течения обтекания твердых тел при помощи плоских скачков уплотнения. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 5.
3. М а й к а п а р Г. И. Тела, образованные поверхностями тока конических течений. Механика жидкости и газа, 1966, № 1.
4. H u l l D., M i e l e A. Three-dimensional wings of minimum total drag in Newtonian flow. J. Astron. Sci., 1965, vol. 12, No 2.

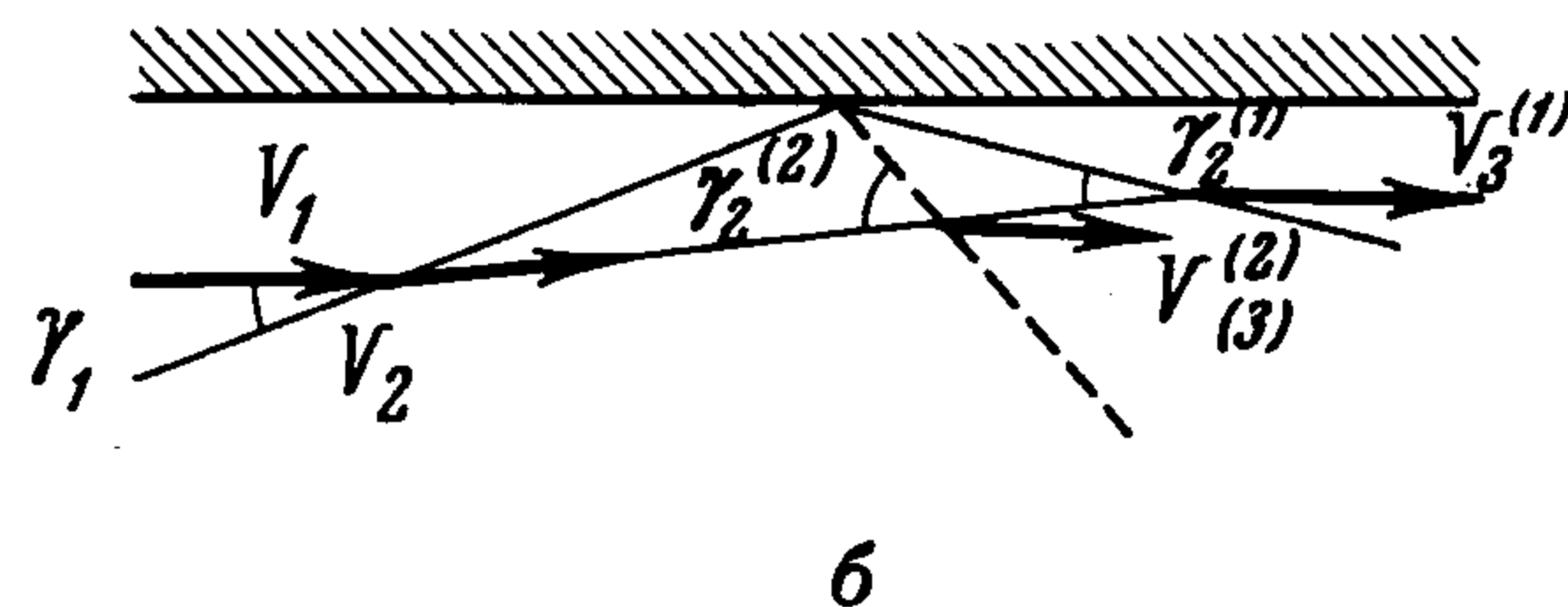
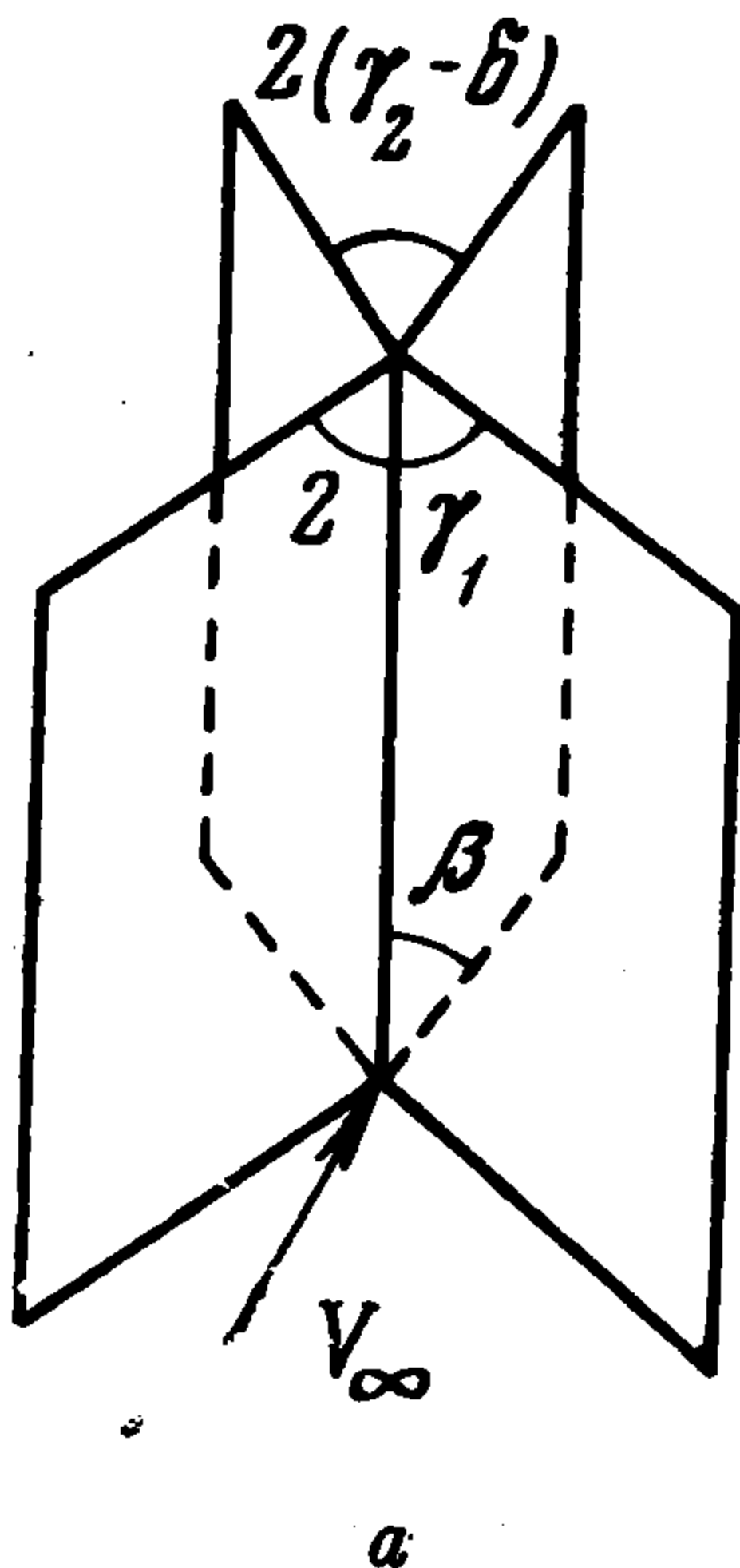
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ДВУХ ПЛОСКИХ СКАЧКОВ УПЛОТНЕНИЯ

В. В. Келдыш
(Москва)

Рассматривается задача о пересечении в пространстве двух плоских скачков уплотнения. Показано, что, в отличие от двумерного случая, где решение этой задачи единственно, в пространстве существует область изменения параметров, определяющих задачу, где имеются два решения со сверхзвуковой скоростью за соответствующими системами скачков уплотнения.

Рассмотрим два плоских пересекающихся скачка уплотнения. Из условия равновесия потока за ними следует, что после пересечения плоскости скачков, вообще говоря, повернутся, и угол между ними изменится.

Только при одном частном значении угла между плоскостями скачков величина его после их пересечения остается неизменной [1]. В симметричном случае, когда скорость невозмущенного потока параллельна плоскости, делящей угол между скачками уплотнения пополам, эта задача эквивалентна отражению скачка от стенки. В настоящей работе ограничимся рассмотрением симметричного случая. Случай пересечения несимметричных скачков уплот-

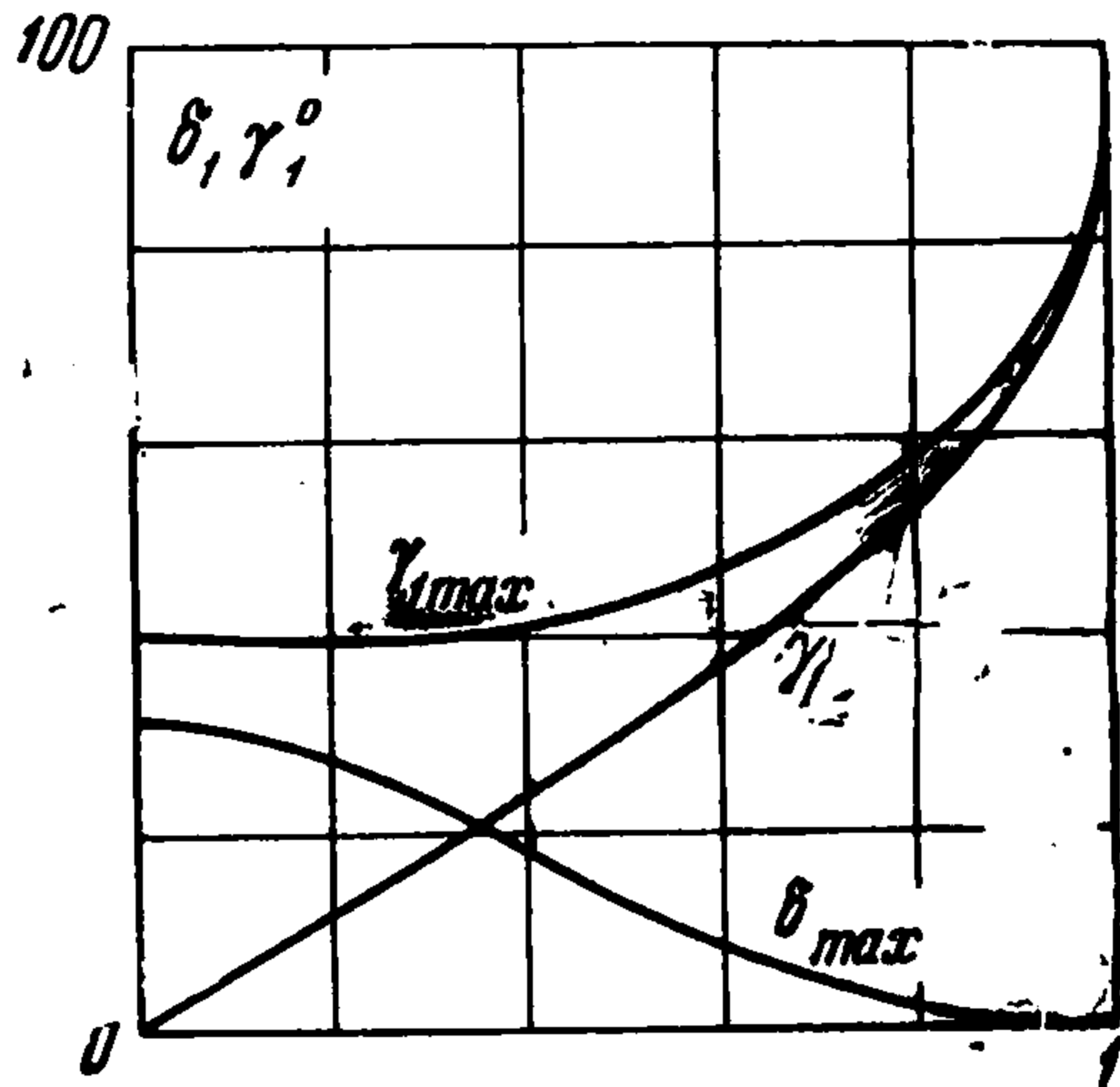


Фиг. 1 а, б

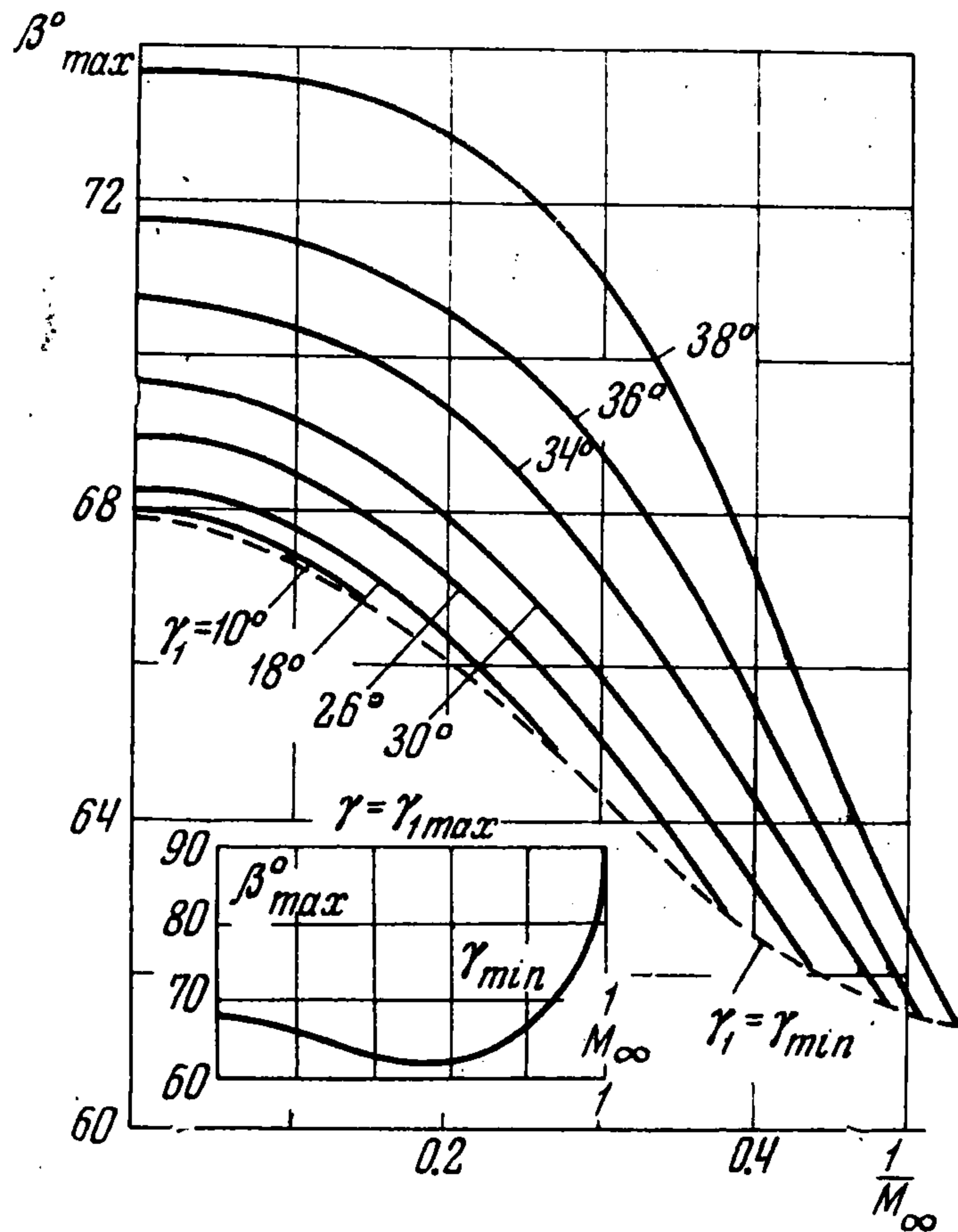
нения не имеет принципиальных отличий, и в качественном отношении результаты должны быть аналогичными.

По аналогии с отражением скачка от стенки, назовем скачки до их пересечения «падающими», а после пересечения — «отраженными». Наложим условие, что как падающие, так и отраженные скачки уплотнения являются «слабыми». Под термином «слабый» понимается косой скачок уплотнения, скорость за которым сверхзвуковая.

Как известно, из двух решений системы уравнений для косоугольного скачка именно этот скачок реализуется на клине. При конечном значении числа M условие, что скорость за скачком сверхзвуковая, несколько сужает область существования слабых скачков по сравнению с принятой обычно в классической газовой динамике [1]. Однако соответствующее различие в максимальном угле клина не превышает 0.5° .



Фиг. 2



Фиг. 3

Параметрами, определяющими задачу пересечения в пространстве двух плоских скачков уплотнения, являются: угол $2\gamma_1$ между их плоскостями, число M_∞ невозмущенного потока и наклон вектора скорости его к линии пересечения скачков β (фиг. 1).

Область изменения параметров M_∞ , β и γ_1 ограничена условием существования падающего и отраженного скачков уплотнения:

$$\frac{1}{M_\infty \sin \beta} \leq \sin \gamma_1 \leq \sin \gamma_{1max} \quad (1)$$

величина γ_{1max} определена ниже из условия регулярности отражения скачков.

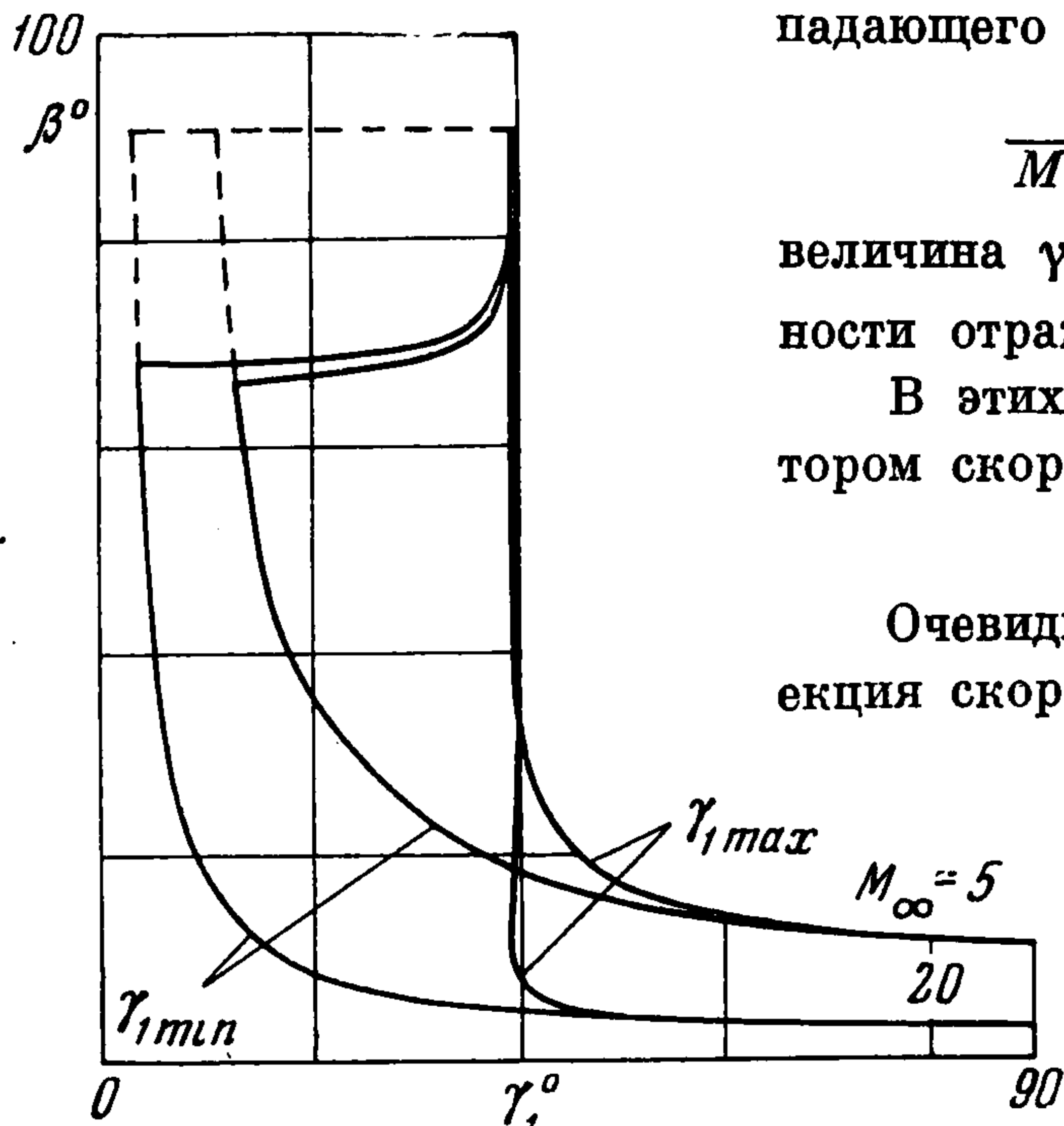
В этих параметрах угол плоскостей скачков с вектором скорости невозмущенного потока равен

$$\omega_1 = \arcsin(\sin \beta \sin \gamma_1) \quad (2)$$

Очевидно, в поле рассматриваемого течения проекция скорости на линию пересечения скачков уплотнения сохраняет постоянную величину, равную $V_\infty \cos \beta$. Поэтому расчет параметров потока можно проводить в плоскости, перпендикулярной этой линии, которая равномерно скользит вдоль линии со скоростью $V_\infty \cos \beta$. Рассмотрение задачи в этой плоскости определить истинные значения плотности, давления и температуры в окружающем

пространстве, а величину и направление скорости надо рассчитывать с учетом скорости скольжения.

В плоскости, перпендикулярной линии пересечения скачков уплотнения, составляющая скорости невозмущенного потока соответствует числу $M_1' = M_\infty \sin \beta$, а угол ее со следом падающего скачка γ_1 (фиг. 1, б).



Фиг. 4

Составляющая скорости за отраженным скачком V_3 в симметричном случае совпадает по направлению с составляющей скорости невозмущенного потока $V_1 = V_\infty \cos \beta$, следовательно, в рассматриваемой плоскости угол поворота скорости δ в падающем и отраженном скачках одинаков по абсолютной величине.

Из уравнений косоугольного скачка уплотнения следует [1]:

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{\cos \gamma_1}{\cos(\gamma_1 - \delta)} \frac{\cos \gamma_2}{\cos(\gamma_2 - \delta)} \quad (3)$$

Здесь γ_2 — угол отраженного скачка со скоростью перед ним

$$\operatorname{tg}(\gamma_i - \delta) = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} \operatorname{tg} \gamma_i + \frac{2}{\kappa + 1} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma_i}{M_i'^2 \operatorname{tg} \gamma_i} \quad (4)$$

$$M_{i+1}' = \frac{1}{\sin(\gamma_i - \delta)} \left(\frac{2(\kappa - 1)^{-1} + M_i'^2 \sin^2 \gamma_i}{2\kappa(\kappa - 1)^{-1} M_i'^2 \sin^2 \gamma_i - 1} \right)^{1/2} \quad (5)$$

$$p_1^\circ = \frac{p_2/p_\infty - 1}{1/2\kappa M_\infty'^2} = \frac{4 \sin^2 \beta}{\kappa + 1} \left(\sin^2 \gamma_1 - \frac{1}{M_1'^2} \right) \quad (6)$$

$$p_2^\circ = \frac{p_3/p_\infty - 1}{1/2\kappa M_\infty'^2} = \frac{4 \sin^2 \beta}{\kappa + 1} \left(\sin^2 \gamma_2 - \frac{1}{M_2'^2} \right) \frac{\sin 2\gamma_1}{\sin 2(\gamma_1 - \delta)} + p_1^\circ \quad (7)$$

$$\frac{\rho_3}{\rho_\infty} = \frac{\operatorname{tg} \gamma_1}{\operatorname{tg}(\gamma_1 - \delta)} \frac{\operatorname{tg} \gamma_2}{\operatorname{tg}(\gamma_2 - \delta)} \quad (8)$$

$$\frac{T_3}{T_\infty} = \frac{p_3}{p_\infty} \frac{\rho_\infty}{\rho_3}$$

Здесь κ — отношение удельных теплоемкостей, индексами $i = 1$ и 2 отмечены параметры падающего и отраженного скачков уплотнения, $2, 3$ параметры потока за ними, ∞ — параметры невозмущенного потока.

Условием регулярности пересечения в пространстве двух плоских скачков уплотнения, когда от линии их пересечения вниз по потоку отходят тоже два плоских слабых скачка, является требование, чтобы в рассматриваемой плоскости угол δ не превышал максимальный угол клина, обтекаемого с присоединенным скачком в потоке со скоростью M_2' за падающим скачком. Эта величина δ_{\max} и соответствующее ей значение $\gamma_{1 \max}$ определяются путем численного решения системы уравнений (4), (5) при $i = 1, 2$ и зависят только от $M_1' = M_\infty \sin \beta$ (см. фиг. 2, где $\gamma_1 = \gamma_{1 \min}$).

В пространстве углы поворота скорости в падающем и отраженном скачках различны и направление скорости за рассматриваемой системой скачков уплотнения (с учетом скорости скольжения), не совпадает с направлением скорости невозмущенного потока, но оба вектора параллельны плоскости симметрии и угол τ между ними равен

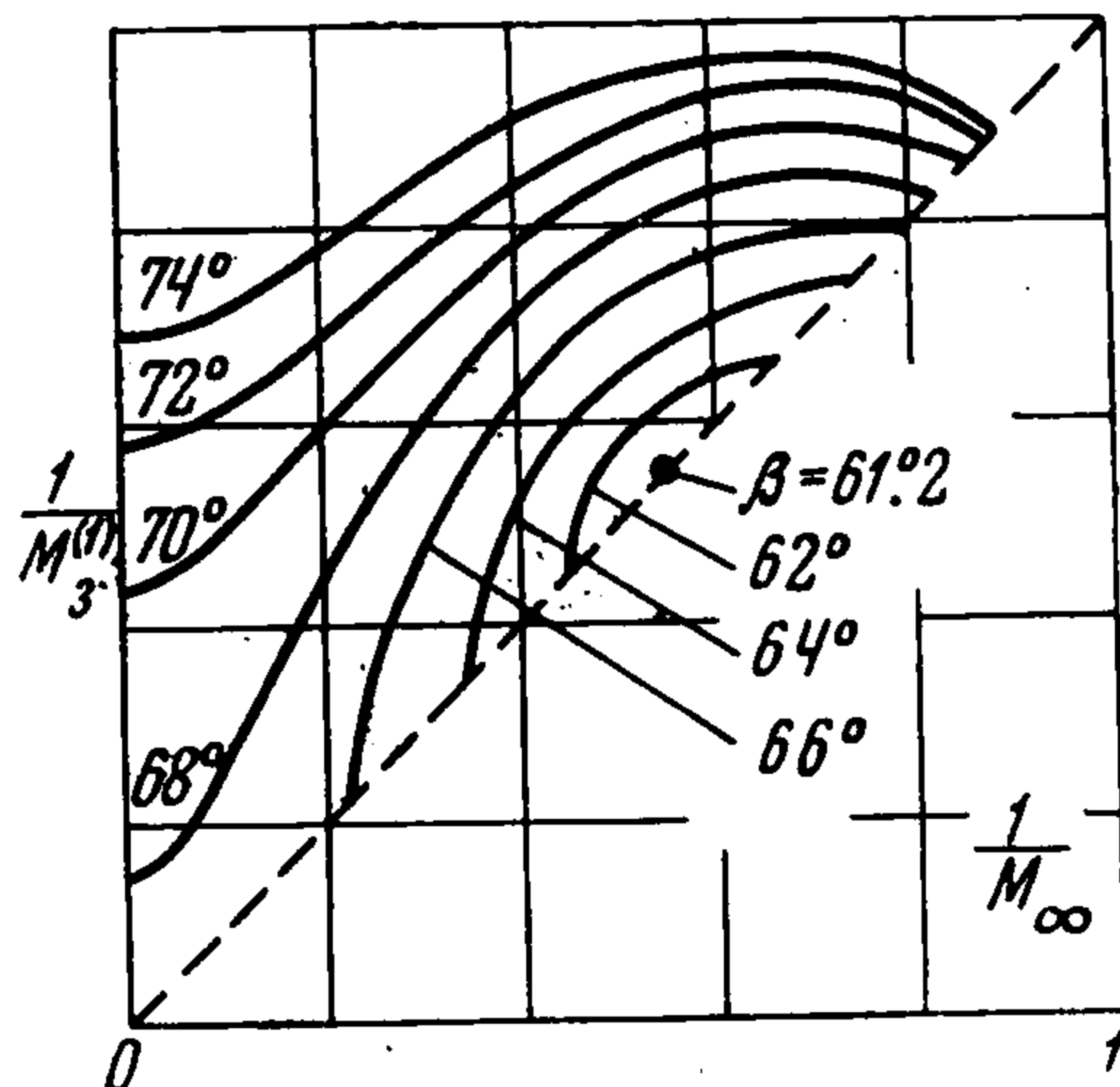
$$\tau = \beta - \theta, \quad \theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{V_3}{V_1} \operatorname{tg} \beta \right) \quad (9)$$

Здесь θ — угол вектора скорости за системой скачков уплотнения с линией их пересечения, а соответствующее этой скорости число M равно

$$M_3 = \frac{M_3'}{\sin \theta} \quad (10)$$

Угол между плоскостями отраженных скачков уплотнения равен $2(\gamma_2 - \delta)$, а наклон их к вектору скорости непосредственно перед ними

$$\omega_2 = \operatorname{arccos} \left(\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \theta \cos^2(\gamma_2 - \delta)}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta \cos^2(\gamma_2 - \delta) \cos^2 \gamma_2} \right)^{1/2} \quad (11)$$



Фиг. 5

В плоском случае пересечения двух скачков уплотнения ($\beta = 1/2 \pi$) только одно из решений уравнения (4) соответствует слабому отраженному скачку со сверхзвуковой скоростью за ним и, следовательно, решение задачи единственно. В пространстве оба решения уравнения (4) $\gamma_2^{(1)}$ и $\gamma_2^{(2)}$ для отраженного скачка во вспомогательной плоскости соответствуют слабым скачкам, если

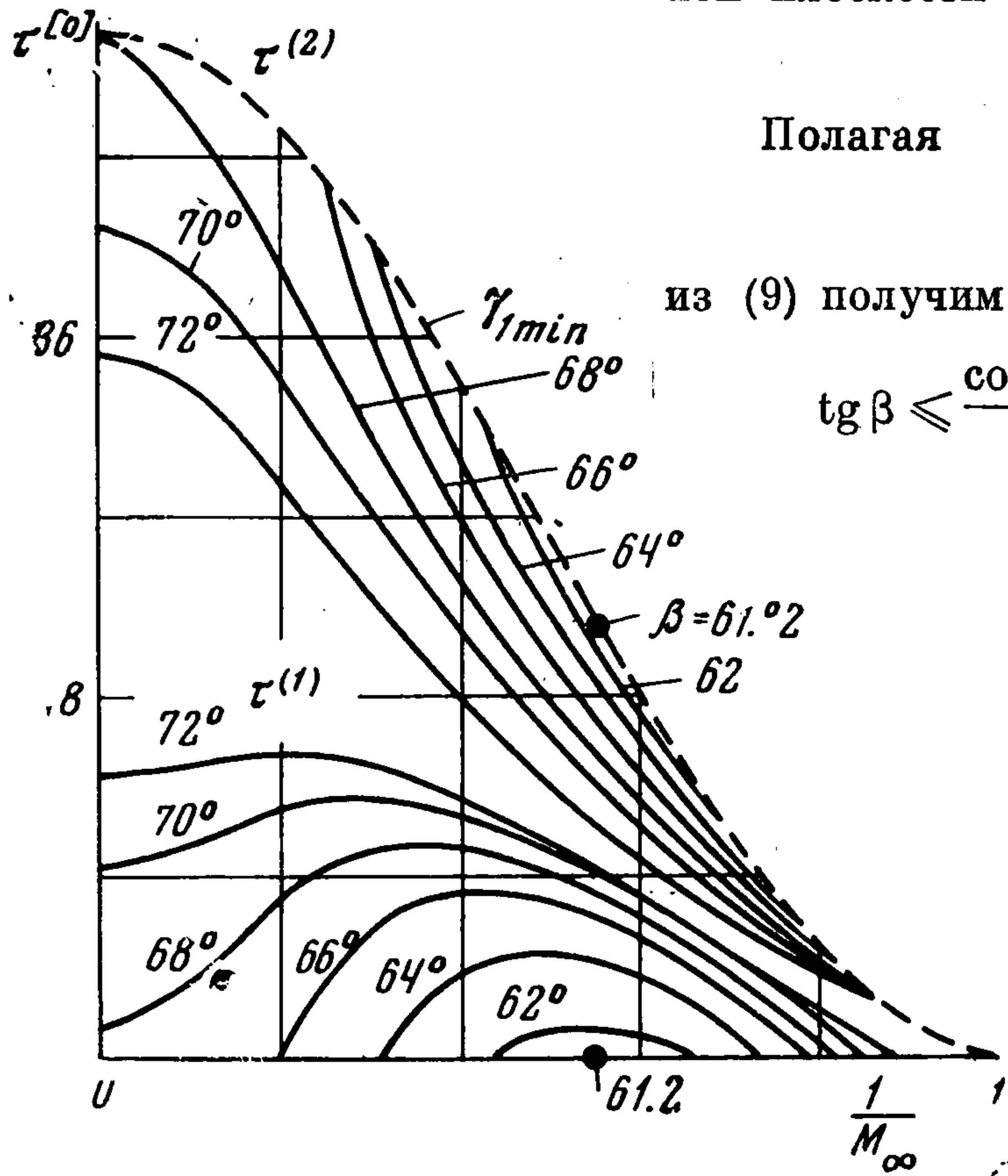
$$M_3' > \sin \theta$$

Полагая

$$\sin \theta_{\max} = M_3'^{(2)} \quad (12)$$

из (9) получим

$$\operatorname{tg} \beta \leq \frac{\cos(\gamma_1 - \delta) \cos(\gamma_2^{(2)} - \delta)}{\cos \gamma_1 \cos \gamma_2^{(2)}} \operatorname{tg} \theta_{\max} \quad (13)$$

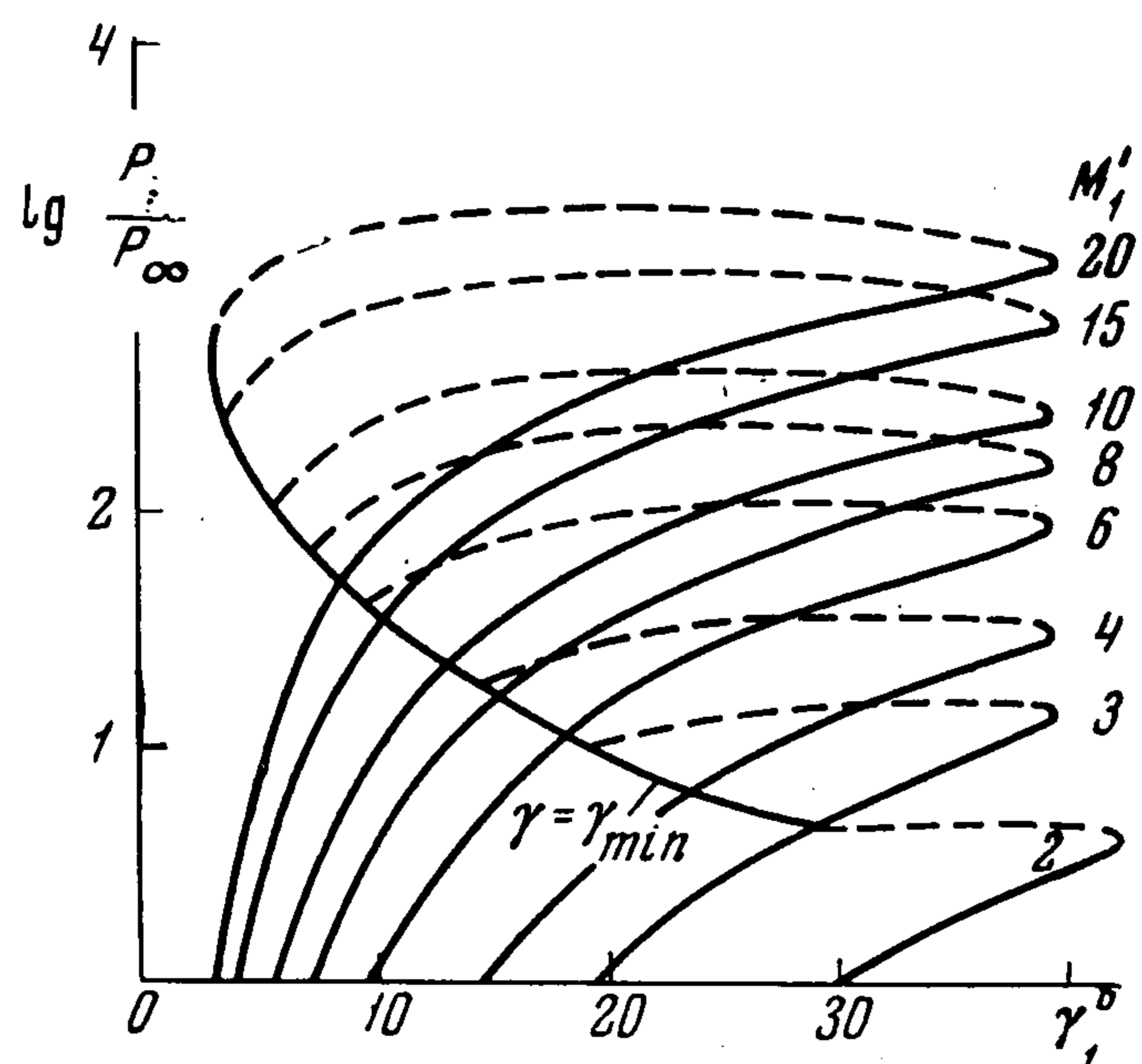


Фиг. 6

На фиг. 3 приведены значения β_{\max} для $M_\infty \geq 2$. При $\gamma_1 = \gamma_{1\min}$, $\delta = 0$ имеем $\gamma_2^{(2)} = 1/2 \pi$ и рассматриваемая система скачков уплотнения во втором решении вырождается в один плоский скачок, наклоненный к скорости невозмущенного потока под углом β . При $\gamma_1 = \gamma_{1\max}$ оба решения совпадают $\gamma_2^{(2)} = \gamma_2^{(1)}$ $\beta = \theta = 1/2 \pi$.

Неравенства (1) и (13) ограничивают область изменения определяющих параметров, в которой задача о регулярном пересечении в пространстве двух плоских скачков уплотнения имеет два решения со слабыми отраженными скачками, скорость за которыми сверхзвуковая. В одном из них проекция скорости за системой скачков на плоскость, перпендикулярную линии их пересечения, — сверхзвуковая (первое решение — $M_3'^{(1)} > 1$), в другом — дозвуковая (второе решение — $M_3'^{(2)} \leq 1$).

На фиг. 4 сплошными линиями показаны эти области для $M_\infty = 20$ и 5. Область, расположенная правее кривой $\gamma_{1\max}$, соответствует режимам с Маховским отражением скачка. Пунктирные линии ограничивают область, где существует только одно решение со слабым отраженным скачком, для которого проекция результирующей скорости на плоскость, перпендикулярную линии пересечения скачков, — сверхзвуковая. Второе решение в этой области соответствует сильному отраженному скачку, скорость за которым дозвуковая. На линии, разграничивающей две эти области, скорость за отраженными скачками во втором решении равна скорости звука $M_3^{(2)} = 1$. Соответствующие значения числа $M_3^{(1)}$ для первого решения приведены на фиг. 5, а на фиг. 6 для обоих решений даны углы наклона вектора скорости за системой скачков относительно скорости невозмущенного потока $\tau^{(i)}$. Давление, плотность и температура

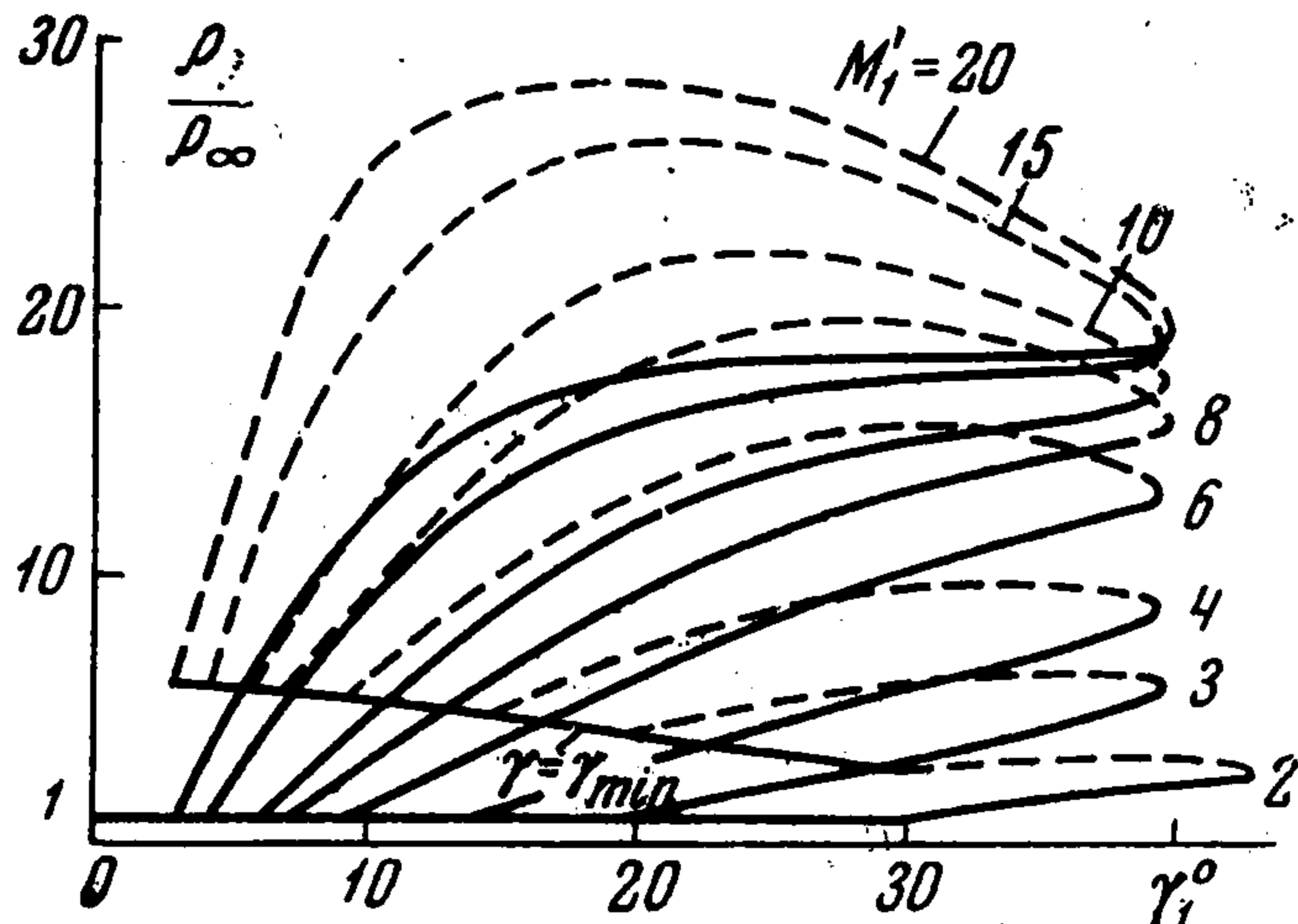


Фиг. 7

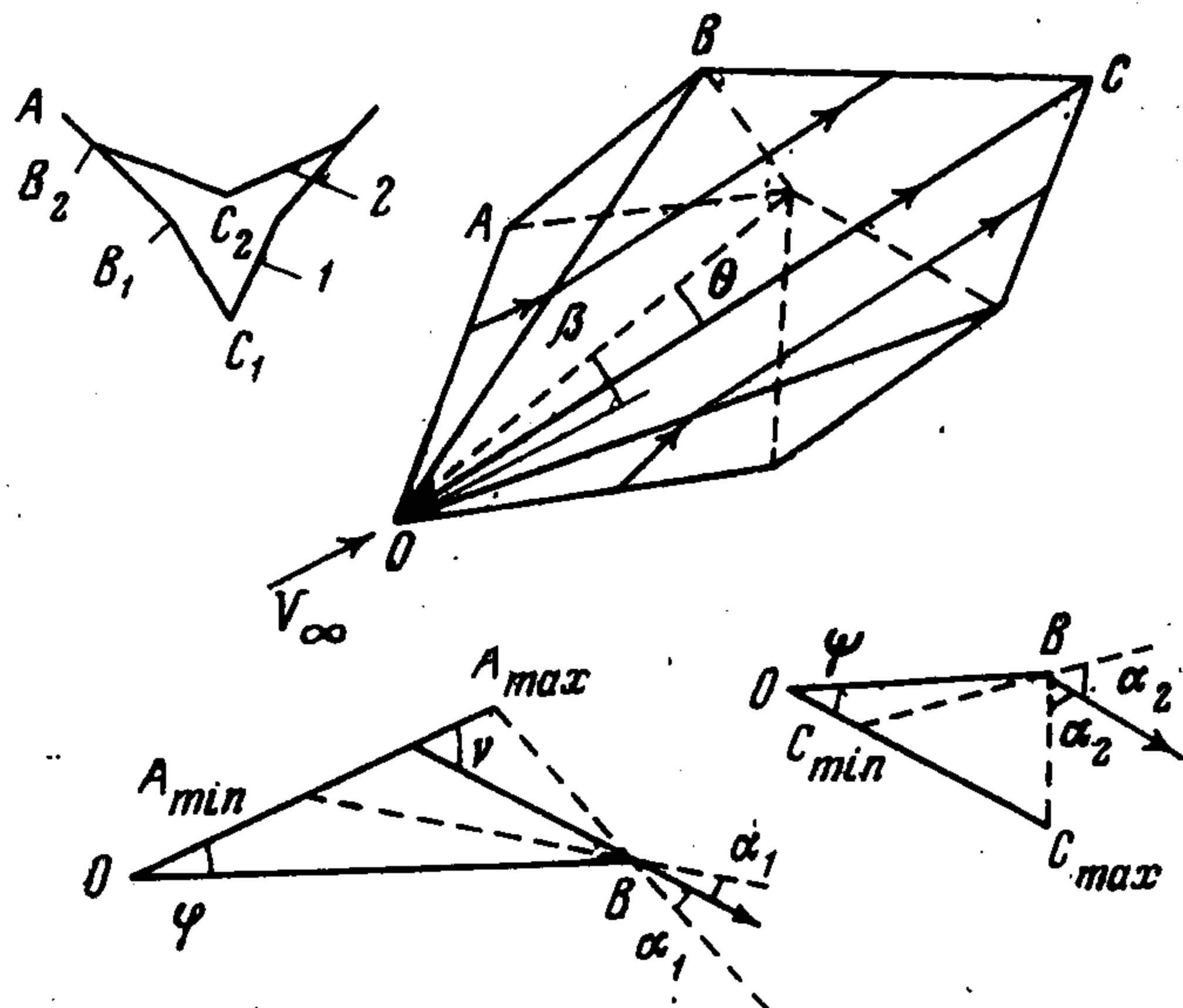
давления, плотности и температуры за скачками приведены на фиг. 8.

тура в поле рассматриваемого течения, а также величина $\text{tg } \beta / \text{tg } \theta$ зависят от комбинации определяющих параметров $M_1' = M_\infty \sin \beta$ и γ_1 . На фиг. 7 и 8 показаны плотность и давление в поле за отраженными скачками в первом и втором решениях; сплошные линии на фигурах соответствуют первому решению $\gamma_2^{(1)}$, пунктирные — второму решению $\gamma_2^{(2)}$. Очевидно, во втором решении (с дозвуковой составляющей скорости в плоскости, перпендикулярной линии пересечения скачков) преобразование параметров потока в системе скачков уплотнения значительно больше, чем в первом решении.

То или иное решение должно осуществляться при обтекании поверхности, составленной из векторов скорости поля соответствующего течения. На фиг. 9 приведен пример такого тела, состоящего из четырех плоских граней, на ребра которого опираются скачки уплотнения, показанные пунктирными линиями. Стрелками показаны линии тока на гранях. Ребро OC совпадает с направлением скорости за отраженными скачками. Различным решениям соответствуют различные поверхности, отличающиеся положением граней OBC . Поперечные сечения их показаны на фиг. 9. При некоторых конфигурациях скачков поверхность AB_2C_2 выражается в V-образное крыло, у которого в окрестности ребра OC существует область повышенного давления, расположенная за отраженным скачком. Для осуществления расчетной схемы течения в окрестности тела необходимо, чтобы возмущения с его задней кромки не попадали на грани. При этом давление на них будет постоянно. Из рассмотрения областей возмущения задних кромок граней OAB и OBC (см. пунктирные линии на фиг. 9) следует, что условием существования расчетного обтекания является:



Фиг. 8



Фиг. 9

Здесь φ и $\psi = f_i(\varphi, \gamma_1, \beta, M_\infty)$ — углы граней при вершине тела, α_1 и α_2 — углы Маха в поле за падающим и отраженным скачками уплотнения (с учетом скорости скольжения), $\nu = f(\varphi, \gamma_1, \beta, M_\infty)$ — наклон вектора скорости на грани OAB относительно передней кромки OA . При регулярном пересечении скачков всегда $\nu > \alpha_1$.

$$0 \leq \frac{OC}{OA} \leq \frac{\sin(\alpha_1 + \nu) \sin(\alpha_2 + \psi)}{\sin(\alpha_1 + \nu - \varphi) \sin \alpha_2}$$

$$\nu + \alpha_1 < \pi, \quad \psi + \alpha_2 < \pi \quad (14)$$

Здесь φ и $\psi = f_i(\varphi, \gamma_1, \beta, M_\infty)$ — углы граней при вершине тела, α_1 и α_2 — углы Маха в поле за падающим и отраженным скачками уплотнения (с учетом скорости скольжения), $\nu = f(\varphi, \gamma_1, \beta, M_\infty)$ — наклон вектора скорости на грани OAB относительно передней кромки OA . При регулярном пересечении скачков всегда $\nu > \alpha_1$.

Поступила 21 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ферри А. Аэродинамика сверхзвуковых течений Гостехиздат, М., 1952.