

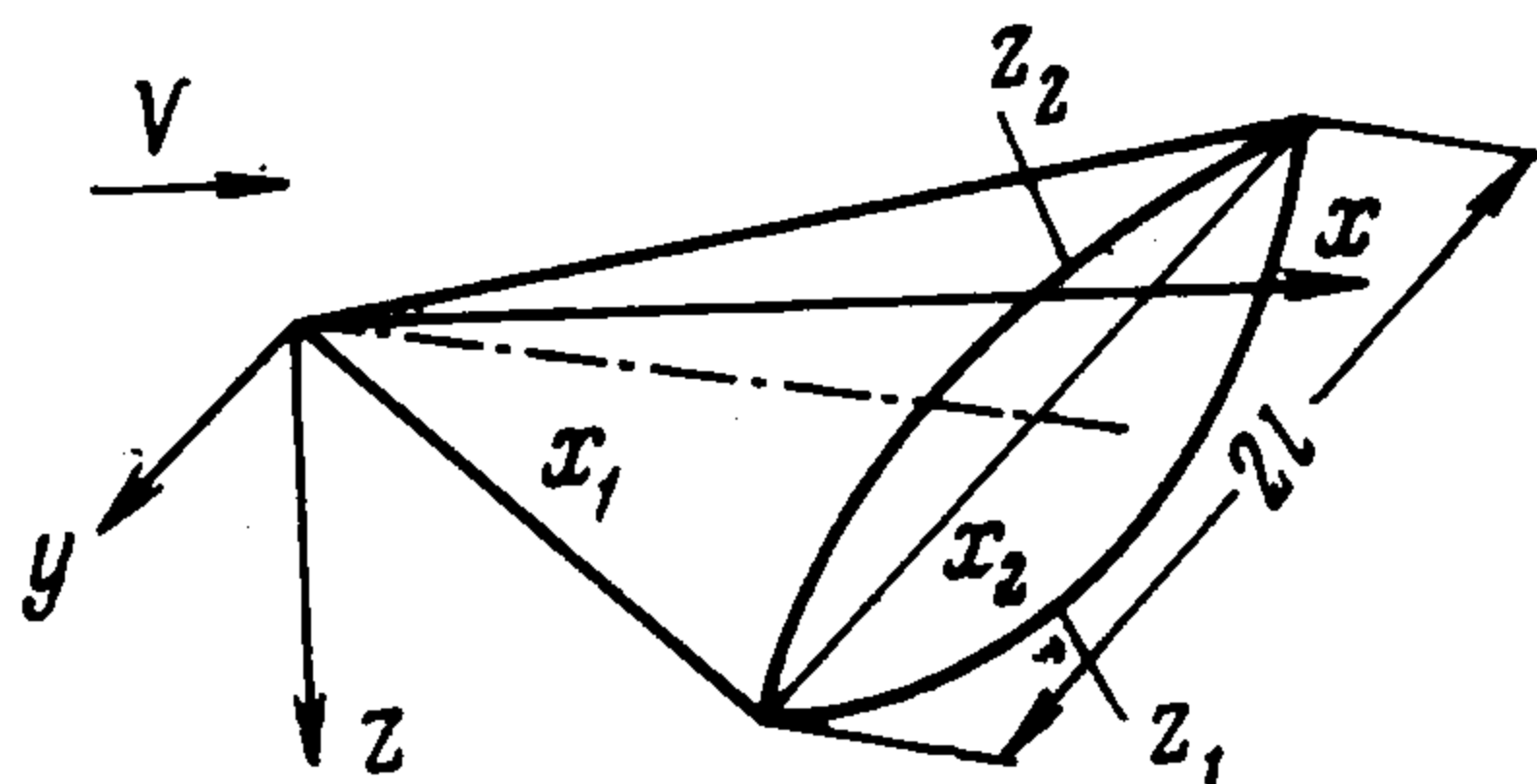
КРЫЛО С МАКСИМАЛЬНЫМ АЭРОДИНАМИЧЕСКИМ КАЧЕСТВОМ ПРИ ГИПЕРЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

Г. И. Майкапар

(Москва)

Вариационная задача о крыле с максимальным аэродинамическим качеством и заданным объемом решена в предположении, что давление подчиняется закону Ньютона, крыло тонкое и сопротивление трения от формы профиля крыла не зависит.

Показано, что крыло с максимальным аэродинамическим качеством имеет профиль, отличный от профиля крыла с минимальным волновым сопротивлением. Оптимальный профиль зависит от заданного объема и сопротивления трения и может меняться от клина до профиля крыла с минимальным волновым сопротивлением.



Фиг. 1

Возможности поисков оптимальных форм гиперзвуковых летательных аппаратов практически ограничены решением вариационных задач, сформулированных при помощи простейших зависимостей давления от формы, например закона Ньютона, и сравнением тел простейшей формы, например указанных в статьях [1-3].

Вариационные задачи, даже в случае применения закона Ньютона, вообще приводят к нелинейным уравнениям в частных производных второго порядка; чтобы избежать этого, обычно делается предположение о тонкости тела. Сам закон Ньютона и указанное предположение о тонкости тел приводят к тому, что получаемые решения вариационных задач можно рассматривать только как ориентировочные и дающие основание для более серьезных исследований.

В случае крыла, конечно, при этом нельзя должным образом учесть влияние притупления передней кромки. Кроме того, оказывается, что и сама форма передней кромки при принятых допущениях на аэродинамические характеристики крыла не влияет, они зависят только от распределения площади по размаху крыла (смещение продольных сечений крыла в плоскости, параллельной xz , на характеристики не влияет).

Вариационная задача о крыле заданного объема с минимальным волновым сопротивлением при заданной подъемной силе была рассмотрена автором ранее, аналогичные результаты получены недавно в [4]. Ниже приводится решение задачи о крыле с максимальным аэродинамическим качеством.

Пусть нижняя и верхняя стороны крыла заданы функциями $z_1 = z_1(x, y)$, $z_2 = z_2(x, y)$ (фиг. 1), тогда при указанных выше предположениях величины сопротивления, подъемной силы и объем крыла можно представить в виде

$$X = X_0 + \iint (p_1^3 + p_2^3) dx dy = X_0 + I_3, \quad Z = \iint (p_1^2 - p_2^2) dx dy = I_2,$$

$$\left(p = \frac{\partial z}{\partial x} \right) \quad V = \iint (z_1 + z_2) dx dy = I_1$$

Здесь X_0 — составляющая лобового сопротивления, которую приближенно можно считать не зависящей от формы профиля крыла (сопротивление трения, сопротивление притупленных кромок).

Обозначим буквой K аэродинамическое качество крыла. [Вариационная задача ставится следующим образом:

$$K = \frac{I_2}{I_3 + X_0} = \max \quad \text{при} \quad I_1 = \text{const} \quad (1)$$

Варьировать контур крыла в плоскости xy не будем. Тогда, имея в виду, что вариация $\delta z = (\partial z / \partial \alpha) \delta \alpha$, $\delta p = (\partial / \partial x) \delta z$,] из условия равенства вариации

$\delta(K + \lambda V) = 0$ (λ — неопределенный пока множитель) получим

$$\int \left[\left(2p_1 - \frac{3I_2}{I_3 + X_0} p_1^2 \right) \delta z_1 - \left(2p_2 + \frac{3I_2}{I_3 + X_0} p_2^2 \right) \delta z_2 \right] dy + \\ + \iint \left\{ \left[\lambda (I_3 + X_0) + \frac{3I_2}{I_3 + X_0} \frac{\partial p_1^2}{\partial x} - 2 \frac{\partial p_1}{\partial x} \right] \delta z_1 + \right. \\ \left. + \left[\lambda (I_3 + X_0) + \frac{3I_2}{I_3 + X_0} \frac{\partial p_2^2}{\partial x} + 2 \frac{\partial p_2}{\partial x} \right] \delta z_2 \right\} dx dy = 0 \quad (2)$$

Первый интеграл берется по контуру крыла. Из условия экстремальности функций z_1, z_2 получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3I_2}{I_3 + X_0} p_1^2 - 2p_1 \right) + \lambda (I_3 + X_0) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3I_2}{I_3 + X_0} p_2^2 + 2p_2 \right) + \lambda (I_3 + X_0) = 0 \quad (3)$$

Предполагая, что на передней кромке крыла z_1 и z_2 заданы, т. е. $\delta z_1 = \delta z_2 = 0$, а граничные условия на задней кромке $x = x_2(y)$ естественные, для нее получаем

$$p_1 \left(2 - \frac{3I_2}{I_3 + X_0} p_1 \right) = 0, \quad p_2 \left(2 + \frac{3I_2}{I_3 + X_0} p_2 \right) = 0 \quad (4)$$

Ограничимся крылом, на всей поверхности которого коэффициент давления неотрицателен, тогда единственно возможным значением для p_2 на задней кромке будет $p_2(x_2) = 0$, при этом значение $p_1(x_2) \neq 0$ оказывается невозможным, так как, если принять его, то следствием будет не соответствующее условиям задачи равенство $p_1(x) = -p_2(x)$. Поэтому единственным значением для p_1 будет

$$p_1(x_2) = \frac{2}{3} \frac{I_3 + X_0}{I_2}$$

Интегрируя (3) и определяя произвольные функции от y из условий на задней кромке, получим

$$p_1(x) = \frac{I_3 + X_0}{3I_2} \left[\sqrt{1 + 3I_2\lambda(x_2 - x)} + 1 \right], \\ p_2(x) = \frac{I_3 + X_0}{3I_2} \left[\sqrt{1 + 3I_2\lambda(x_2 - x)} - 1 \right] \quad (5)$$

Выполним дальнейшее интегрирование, предполагая, что передняя кромка $x_1 = x_1(y)$ расположена в плоскости

$$z = \frac{I_3 + X_0}{3I_2} x$$

Тогда

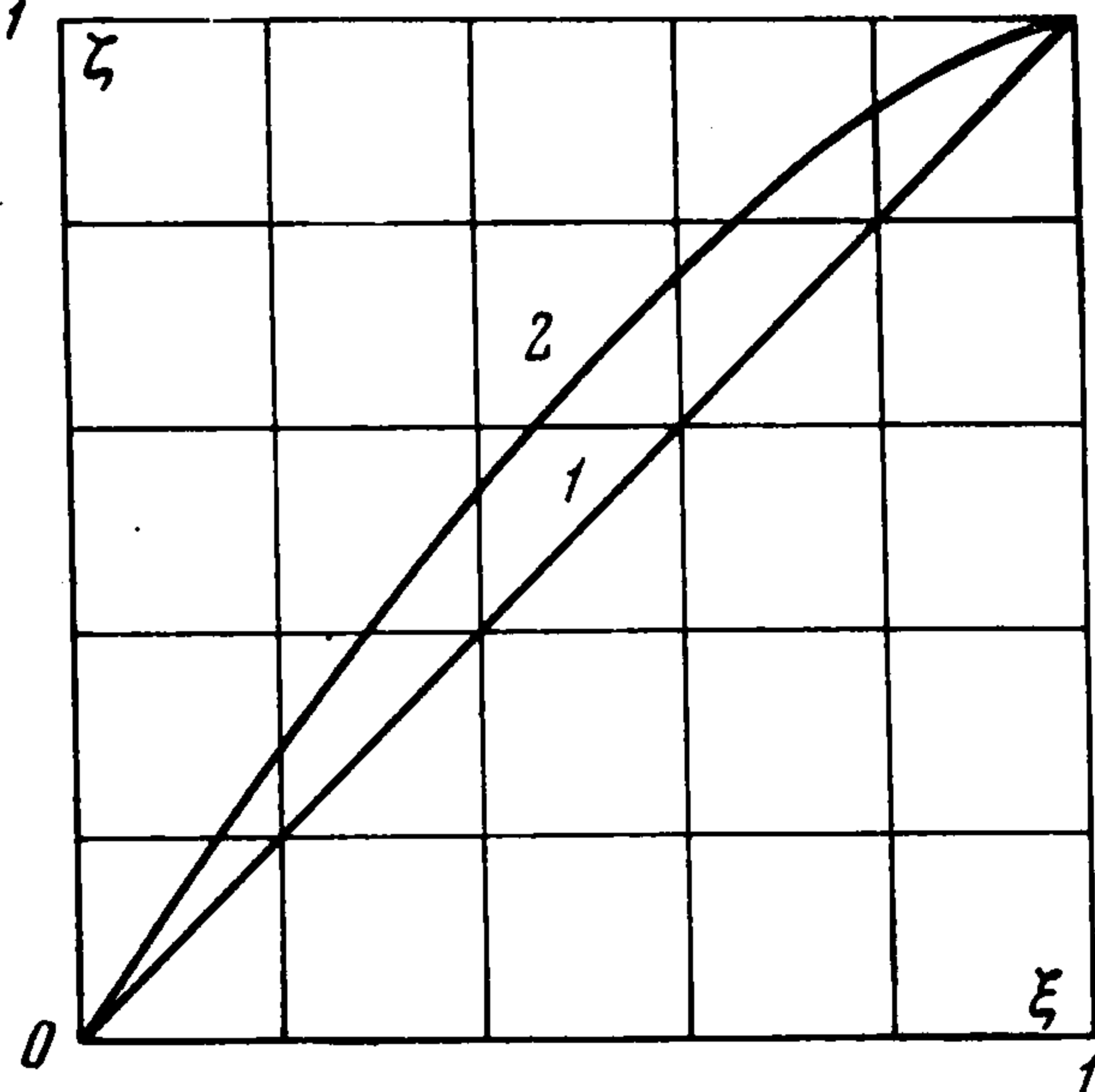
$$z_1 = \frac{I_3 + X_0}{3I_2} \left\{ \frac{2}{9I_2\lambda} [1 + 3I_2\lambda(x_2 - x_1)]^{3/2} - \frac{2}{9I_2\lambda} [1 + 3I_2\lambda(x_2 - x)]^{3/2} + x \right\} \\ z_2 = \frac{I_3 + X_0}{3I_2} \left\{ \frac{2}{9I_2\lambda} [1 + 3I_2\lambda(x_2 - x_1)]^{3/2} - \frac{2}{9I_2\lambda} [1 + 3I_2\lambda(x_2 - x)]^{3/2} - x \right\} \quad (6)$$

Из формул (5), (6) видно, что искомый профиль крыла, симметричный с ординатой

$$z = \frac{I_3 + X_0}{3I_2} \frac{2}{9I_2\lambda} \left\{ [1 + 3I_2\lambda(x_2 - x_1)]^{3/2} - [1 + 3I_2\lambda(x_2 - x)]^{3/2} \right\} \quad (7)$$

угол атаки, соответствующий максимальному качеству,

$$\alpha = \frac{I_3 + X_0}{3I_2} = \frac{1}{3K} \quad (8)$$



Фиг. 2

Угол наклона профиля на задней кромке равен $\pm \alpha$, поэтому давление обращается в 0 только на задней кромке верхней стороны крыла.

Профиль крыла заданного объема с минимальным сопротивлением при естественных граничных условиях на задней кромке, естественно, симметричный и дается

формулой (9)

$$z = \lambda [(x_2 - x_1)^{3/2} - (x_2 - x)^{3/2}]$$

Предельными случаями для профиля [крыла с максимальным аэродинамическим качеством будут:

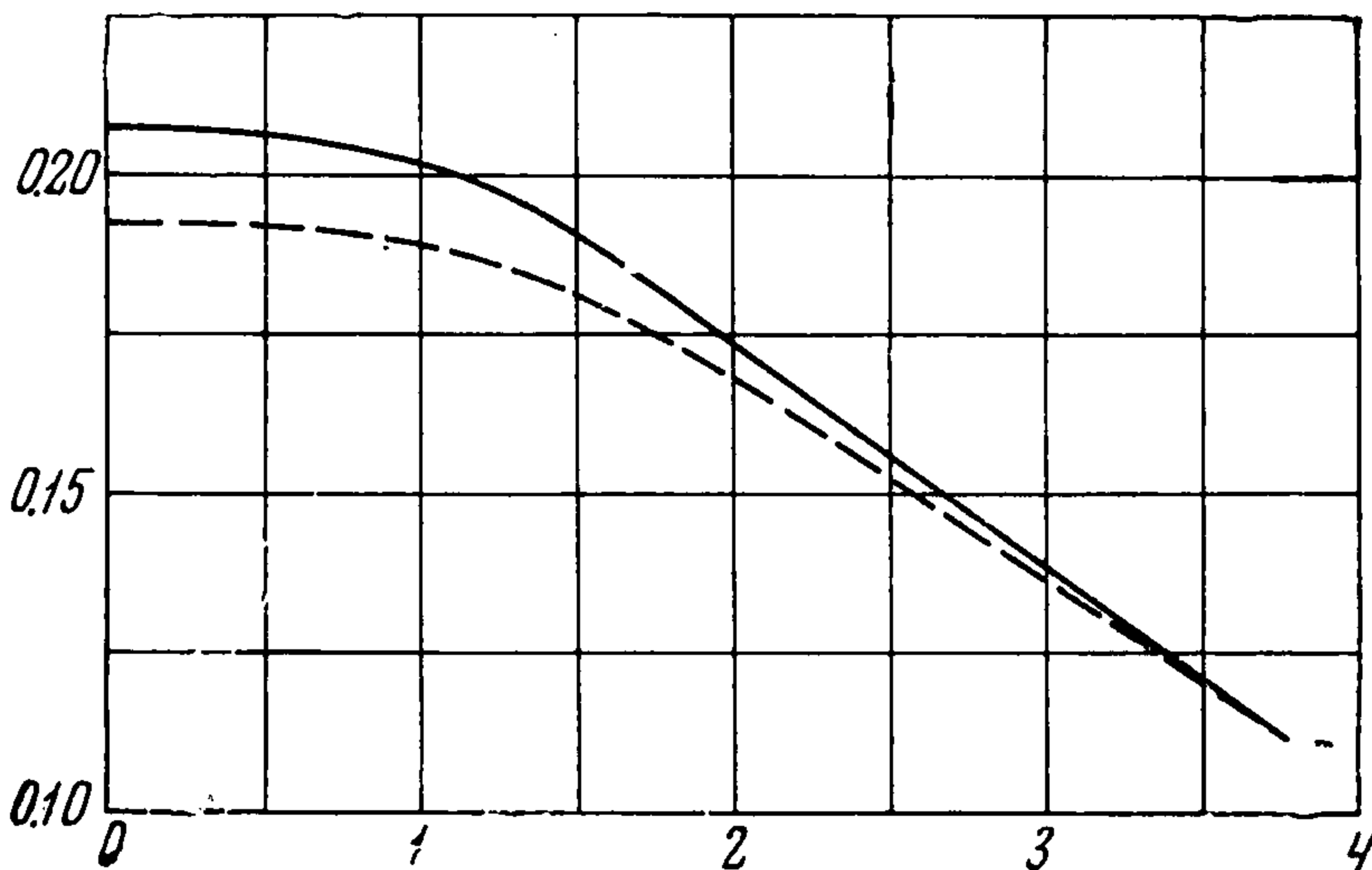
$$3I_2\lambda (x_2 - x_1) \gg 1$$

$$z \sim [(x_2 - x_1)^{3/2} - (x_2 - x)^{3/2}]$$

$$3I_2\lambda (x_2 - x_1) \ll 1$$

$$z \sim (x - x_1)$$

т. е. все возможные профили крыла с максимальным аэродинамическим качеством и заданным объемом заключены между клином и профилем



Фиг. 3

1 — $(1 - \xi)^{3/2}$ (фиг. 2). Для определения профиля (7) необходимо вычислить интегралы

$$I_1 = \frac{4(I_3 + X_0)}{27I_2^2\lambda} \iint \{ [1 + 3I_2\lambda(x_2 - x_1)]^{3/2} - [1 + 3I_2\lambda(x_2 - x)]^{3/2} \} dx dy$$

$$I_2 = \left(\frac{I_3 + X_0}{3I_2} \right)^2 \iint \sqrt{1 + 3I_2\lambda(x_2 - x)} dx dy \quad (10)$$

$$I_3 = 2 \left(\frac{I_3 + X_0}{3I_2} \right)^3 \iint \{ [1 + 3I_2\lambda(x_2 - x)]^{3/2} + 3 \sqrt{1 + 3I_2\lambda(x_2 - x)} \} dx dy$$

В качестве примера доведем до конца вычисления для случая треугольного крыла, т. е. $x_2(y) - x_1(y) = k(l - y)$, где l — полуразмах крыла.

$$I_1 = \frac{8l\lambda(I_3 + X_0)}{15(3I_2\lambda)^3} \left[(1 + 3I_2\lambda kl)^{5/2} - \frac{(1 + 3I_2\lambda kl)^{7/2} - 1}{7/4 \cdot 3I_2\lambda kl} + 1 \right] \quad (11)$$

$$I_2 = \frac{8l}{9I_2\lambda} \left(\frac{I_3 + X_0}{3I_2} \right)^2 \left[\frac{(1 + 3I_2\lambda kl)^{5/2} - 1}{5/2 \cdot 3I_2\lambda kl} - 1 \right]$$

$$I_3 = \frac{4l}{15I_2\lambda} \left(\frac{I_3 + X_0}{3I_2} \right)^3 \left[\frac{(1 + 3I_2\lambda kl)^{7/2} - 1}{7/2 \cdot 3I_2\lambda kl} + \frac{(1 + 3I_2\lambda kl)^{5/2} - 1}{1/2 \cdot 3I_2\lambda kl} - 6 \right]$$

Удобно ввести безразмерные величины: $i_2 = 3I_2\lambda kl$, $i_3 = I_3 / l^2$, $x_0 = X_0 / l^2$, $i_1 = I_1 / l^3 k^{5/3}$, $m = \lambda l^3 k^{4/3}$. Подставляя их в (11), получим

$$8(x_0 + i_3)^2 m^3 = \frac{5/2 i_2^5}{(1 + i_2)^{5/2} - 5/2 i_2 - 1} \quad (12)$$

$$\frac{5i_3}{4(x_0 + i_3)^3 m^3} = \frac{(1 + i_2)^{7/2} + 7(1 + i_2)^{5/2} - 21i_2 - 8}{7/2 i_2^5}$$

$$\frac{15i_1}{8(x_0 + i_3) m} = \frac{1}{i_2^3} \left[1 + (1 + i_2)^{5/2} - \frac{(1 + i_2)^{7/2} - 1}{7/4 i_2} \right]$$

При помощи формул (12) не представляет труда построить графики зависимости i_2 , i_3 , m от заданных параметров x_0 , i_1 .

Для крыла с клиновидным профилем

$$Kv = \frac{1}{\sqrt{27 + v^{-3}\xi}}, \quad v = \frac{V}{k^{2/3}l^3}, \quad \xi = \frac{X_0}{kl^2} \quad (13)$$

кривая Kv , как функция $v^{-1}\xi^{1/3}$ приведена на фиг. 3 (пунктир) для сравнения с крылом с максимальным качеством. Для значений параметра $v^{-1}\xi^{1/3}$ больших, чем приведенные на фиг. 3, оптимальный профиль, по-видимому, должен включать участок с $p_2 = 0$.

Из формулы (3) видно, что существует оптимальный размер крыла

$$v = 1/3 \left(\frac{\xi}{2}\right)^{1/3}, \quad K = 1/3 \left(\frac{2}{\xi}\right)^{1/3}$$

Поступила 12 X 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. М а й к а п а р Г. И. О волновом сопротивлении неосесимметричных тел в сверхзвуковом потоке. ПММ, 1959, т. 23, вып. 2.
2. М а й к а п а р Г. И. О построении сверхзвукового течения обтекания твердых тел при помощи плоских скачков уплотнения. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 5.
3. М а й к а п а р Г. И. Тела, образованные поверхностями тока конических течений. Механика жидкости и газа, 1966, № 1.
4. H u l l D., M i e l e A. Three-dimensional wings of minimum total drag in Newtonian flow. J. Astron. Sci., 1965, vol. 12, No 2.

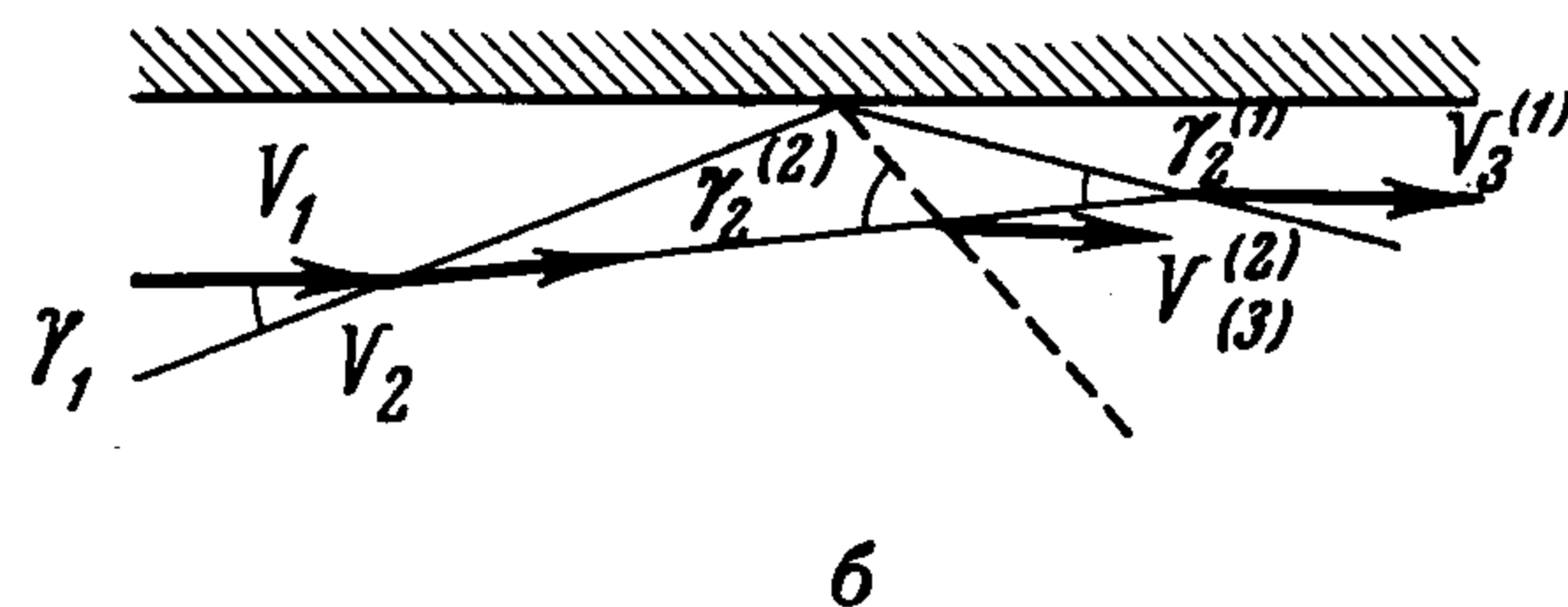
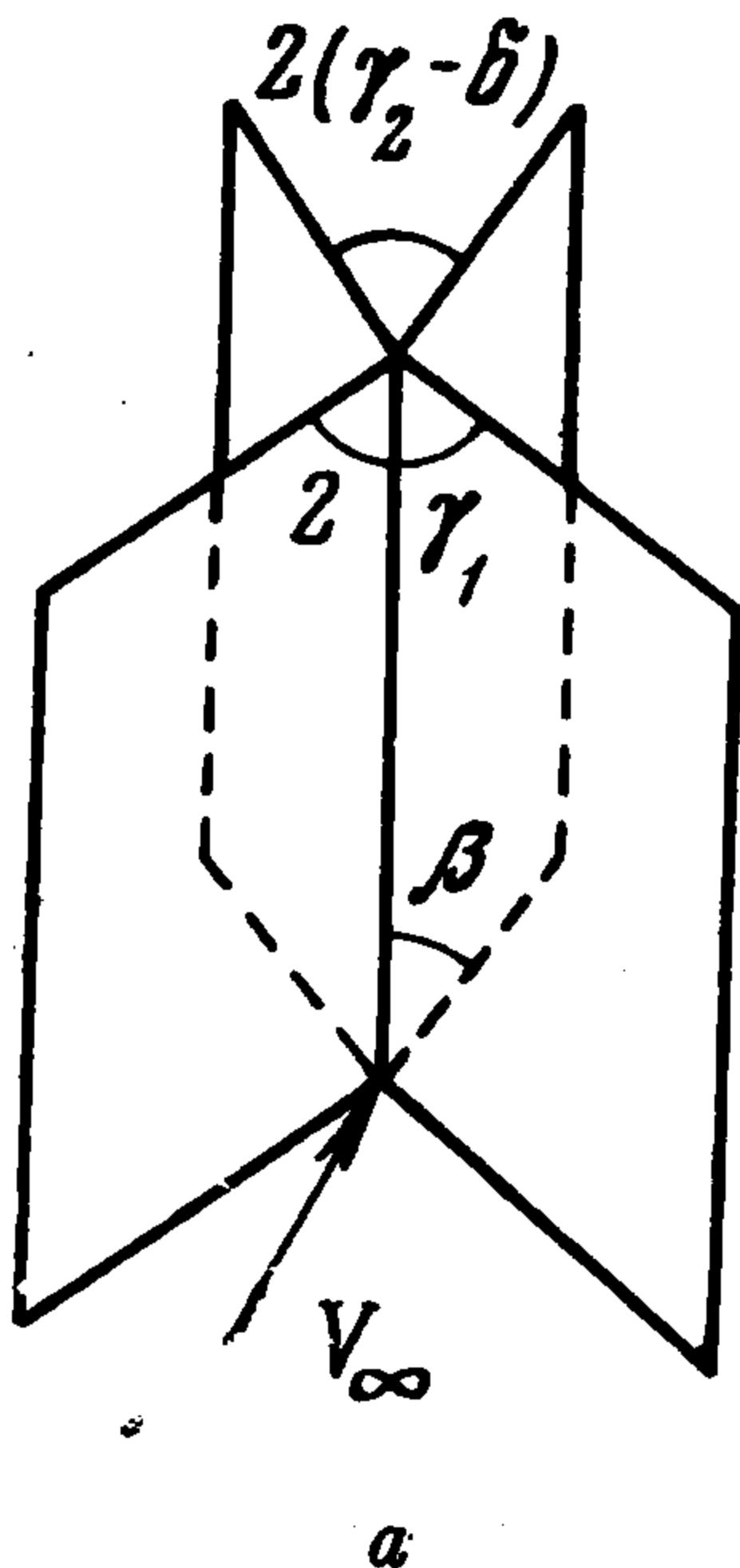
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ДВУХ ПЛОСКИХ СКАЧКОВ УПЛОТНЕНИЯ

В. В. Келдыш
(Москва)

Рассматривается задача о пересечении в пространстве двух плоских скачков уплотнения. Показано, что, в отличие от двумерного случая, где решение этой задачи единственно, в пространстве существует область изменения параметров, определяющих задачу, где имеются два решения со сверхзвуковой скоростью за соответствующими системами скачков уплотнения.

Рассмотрим два плоских пересекающихся скачка уплотнения. Из условия равновесия потока за ними следует, что после пересечения плоскости скачков, вообще говоря, повернутся, и угол между ними изменится.

Только при одном частном значении угла между плоскостями скачков величина его после их пересечения остается неизменной [1]. В симметричном случае, когда скорость невозмущенного потока параллельна плоскости, делящей угол между скачками уплотнения пополам, эта задача эквивалентна отражению скачка от стенки. В настоящей работе ограничимся рассмотрением симметричного случая. Случай пересечения несимметричных скачков уплот-



Фиг. 1 а, б

нения не имеет принципиальных отличий, и в качественном отношении результаты должны быть аналогичными.

По аналогии с отражением скачка от стенки, назовем скачки до их пересечения «падающими», а после пересечения — «отраженными». Наложим условие, что как падающие, так и отраженные скачки уплотнения являются «слабыми». Под термином «слабый» понимается косой скачок уплотнения, скорость за которым сверхзвуковая.