Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

О ТОПОЛОГИИ ТРЕХМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В. И. Арнольд

(Москва)

Рассматриваются вихревые стационарные течения несжимаемой невязкой жидкости в ограниченной области D. Предполагается, что векторы скорости и вихря не всюду коллинеарны. Доказывается, что область течения D разбивается особыми «поверхностями Бернулли» на конечное число ячеек, в каждой из которых линии тока либо замкнуты, либо обвивают всюду плотно поверхности торов.

1. Уравнения движения. Уравнение Эйлера — Ньютона

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p, \quad \operatorname{div} v = 0 \qquad \left(\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} v\right) \tag{1.1}$$

эквивалентно «уравнению Бернулли»

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = [\mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{v}] - \operatorname{grad} \alpha, \quad \operatorname{div} v = 0 \qquad (\alpha = p + {}^1/_2 v^2) \tag{1.2}$$

Для стационарного течения уравнение Бернулли принимает вид

$$[v, \operatorname{rot} v] = \operatorname{grad} \alpha, \quad \operatorname{div} v = 0 \tag{1.3}$$

Воспользуемся известным тождеством векторного анализа

$$\operatorname{rot}[a, b] = \{b, a\} + a \operatorname{div} b - b \operatorname{div} a \tag{1.4}$$

Здесь $\{b, a\}$ — скобка Пуассона

$$\{b, a\}_i = \sum \frac{\partial a_i}{\partial x_j} b_j - \frac{\partial b_i}{\partial x_j} a_j$$

Из формул (1.3) и (1.4) следует, что поле скоростей стационарного течения коммутирует со своим ротором

$$\{v, \operatorname{rot} v\} = 0 \tag{1.5}$$

Предположим, что область течения D связна, конечна и ограничена аналитической поверхностью Γ; граничные условия $(v, n)_\Gamma = 0$ (касание).

2. Теорема. Пусть v — аналитическое стационарное поле скоростей, не всюду коллинеарное своему ротору

$$[v, \operatorname{rot} v] \not\equiv 0 \tag{2.1}$$

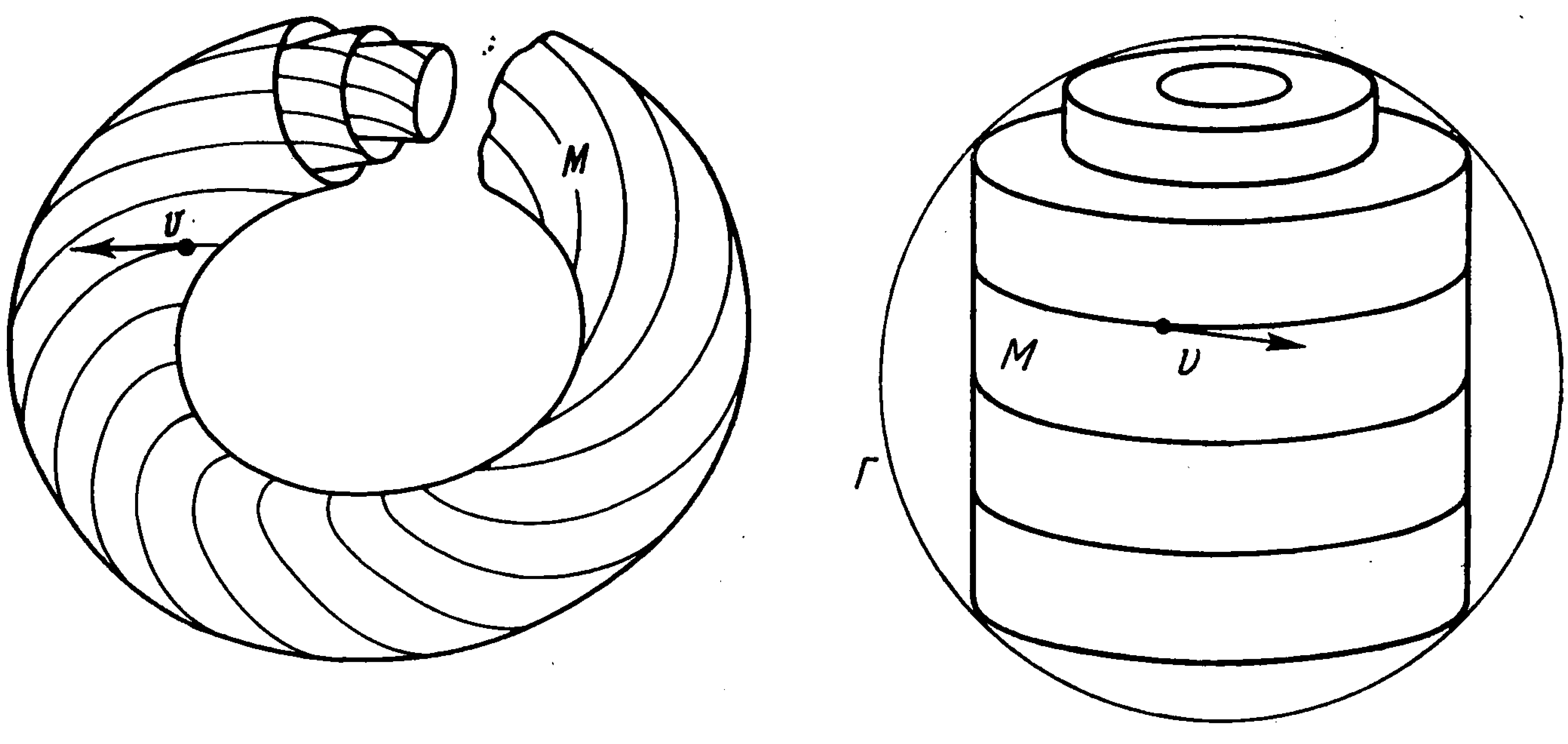
Тогда почти все линии тока замкнуты либо всюду плотны на двумерных торах: все линии тока иного типа заполняют конечное число аналитических подмногообразий D.

Замечание. Снять условие (2.1). вероятно, нельзя, так как течения с $\operatorname{rot} v \equiv \lambda v$ ($\lambda = \mathrm{const}$) могут, по-видимому, иметь линии тока с весьма сложной топологией, характерной для задач небесной механики (см. [1], рис. 6). Столь же запутанные линии тока могут быть у стационарных течений вязкой жидкости, близких к стационарным течениям идеальной жидкости. Отметим еще, что формулы (1.1) — (1.5) и теорема вместе с доказательством легко переносятся на случай течения идеальной жидкости в трехмерном римановом пространстве (ср. [2]).

3. Доказательство. Рассмотрим поверхности уровня функции α (см. (1.3)). Связные компоненты этих поверхностей будем называть поверхностями Бернулли. Линии тока и линии вихря, согласно (1.3), ортогональны $\operatorname{grad}\alpha$ и потому лежат на поверхностях Бернулли. Покажем, что большинство поверхностей Бернулли — торы или кольца.

Назовем значение α_0 *плохим*, если существует точка x в области D, где $\operatorname{grad}\alpha = 0$ и $\alpha(x) = \alpha_0$, или если существует точка x на границе Г, в которой $\operatorname{grad}\alpha$ ортогонален Г и $\alpha(x) = \alpha_0$. Из аналитичности α и Г вытекает, что плохих значений α конечное число. Точки x, в которых функция α принимает плохие значения, образуют конечное число аналитических подмногообразий D размерности не выше 2 (так как функция α — не константа, см. (2.1)). Эти подмногообразия можно назвать плохими, а все остальные поверхности Бернулли — хорошими.

Плохие подмногообразия разбивают область D на ячейки, каждая из которых расслоена на хорошие поверхности Бернулли. Хорошая поверхность Бернулли, не пересекающаяся с границей области Г, будет замкнутой



а *б*

Фиг. 1*а*, *б*

гладкой двумерной поверхностью, так как на ней $\operatorname{grad}\alpha \neq 0$. Оказывается, эта поверхность — тор (см. ниже случай (1) и фиг. 1*а*).

Хорошая поверхность Бернулли, пересекающаяся с границей области Г, пересекается с ней трансверсально (так как на границе $\operatorname{grad}\alpha$ не ортогонален Г). Поэтому такая поверхность — гладкая, с краем, состоящим из конечного числа гладких замкнутых кривых, лежащих на Г. Оказывается, эта поверхность — кольцо (см. ниже случай (2) и фиг. 1*б*).

Случай (1). Пусть M — поверхность Бернулли без края. Построим на M систему угловых координат α, β (mod 2π) так, чтобы линии тока получили уравнение $d\alpha\, /\, d\beta = \lambda = \mathrm{const}$. Тем самым будет показано, что M —

Высказанная гипотеза подтверждена М. Хеноном (M. Hennon) численным экспериментом на машине института астрофизики в Париже.

тор. Но на торе линии $d\alpha / d\beta = \lambda$ замкнуты, если λ — рациональное число, и всюду плотны, если λ — иррационально. Поэтому теорема в случае (1) будет полностью доказана, если будут построены координаты α, β.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $y(\tau, x, \sigma)$

$$\frac{dy}{d\tau} = s \operatorname{rot} v(y) + tv, \quad y(0, x, \sigma) = x, \quad \sigma = (s, t)$$

Здесь параметр x — точка поверхности Бернулли M, а σ — точка плоскости st. Так как вектора v и $\operatorname{rot} v$ касаются M, точка y лежит на той же поверхности Бернулли, что и x. При фиксированном x формула

$$p_x(\sigma) = y(1, x, \sigma) \tag{3.1}$$

определяет отображение плоскости σ на поверхности Бернулли M. Из (1.5) вытекает соотношение коммутативности

$$p_{p_x(\sigma)}(\sigma') = p_x(\sigma + \sigma') = p_{p_x(\sigma')}(\sigma) \tag{3.2}$$

Так как вектора v и $\operatorname{rot} v$ на M линейно независимы, отображение (3.2) есть накрытие (т. е. локально σ можно принять за координаты на M). В целом, однако, существует много точек σ, накрывающих x. Эти точки образуют, согласно (3.2), «решетку» (если $p_x(\sigma) = p_x(\sigma') = x$, то и $p_x(\sigma + \sigma') = x$). Из компактности поверхности Бернулли M следует, что решетка эта имеет две образующие σ_1 и σ_2 (две точки плоскости такие, что любая накрывающая x точка σ имеет вид $m\sigma_1 + n\sigma_2$ с целыми m, n). Сделаем на плоскости σ линейную замену переменных s, t на α, β так, чтобы точки σ_1 и σ_2 получили координаты $(2\pi, 0)$ и $(0, 2\pi)$. Легко видеть, что α, β $(\operatorname{mod} 2\pi)$ — искомые угловые координаты на поверхности Бернулли M. В случае (1) и теорема доказана.

Случай (2). Пусть M — поверхность Бернулли с краем. Край M состоит из нескольких замкнутых линий тока, лежащих на границе Γ (ибо вектор v касается и M и Γ). Пусть x — точка края M. Тогда в обозначениях (3.1), проходящая через x, замкнутая линия тока будет

$$p_x(0, t) = p_x(0, t + T) \quad (\infty < t < +\infty) \tag{3.3}$$

Положим $z = p_x(s, t)$, тогда из соотношений (3.2) и (3.3) вытекает

$$p_z(0, T) = p_x(s, t + T) = p_{p_x(0,T)}(s, t) = p_x(s, t) = z \tag{3.4}$$

т. е. линия тока, проходящая через z, замкнута. Но всякая точка M имеет вид $z = p_x(s, t)$ (ввиду линейной независимости v и $\operatorname{rot} v$ и связности M). Поэтому формула (3.4) доказывает замкнутость всех линий тока на M. Одновременно эта формула вводит на M координаты кольца

$$t \ (\operatorname{mod} T), \ s, \quad 0 \leqslant s \leqslant S \text{ или } S \leqslant s \leqslant 0$$

Доказательство теоремы закончено.

Поступила 16 VIII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. Успехи матем. наук, 1963, т. 18, № 6, стр. 91—192.
2. Arnold V. Sur la topologie des ésoulements stationnaizes des fluides parfaits, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1965, vol. 261, No 1.