Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

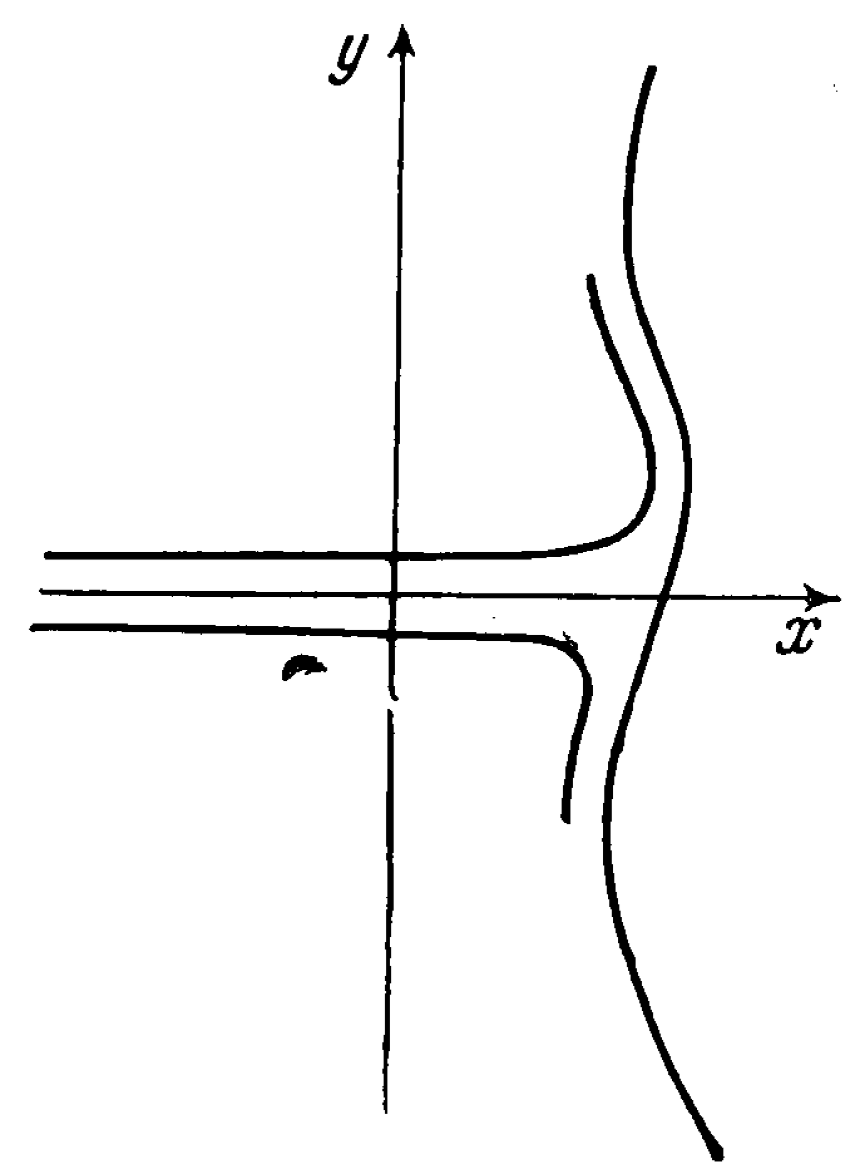
О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ СВОБОДНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

М. А. Лаврентьев

(Новосибирск)

В первой части рассматриваются две схемы обтекания тел струями конечной ширины. Жидкость предполагается идеальной. Основное внимание уделяется плоскому случаю, но также указывается на возможность рассмотрения трехмерных постановок. Во второй части, опираясь на описанные схемы, а также на качественный учет вязкости, дается объяснение двум следующим явлениям.

Легкий шарик (из пробки, шарик от игры в пинг-понг), будучи помещен в тонкую струю (воздуха или жидкости, направленную вертикально вверх), способен устойчиво держаться в этой струе. Это явление известно давно, на нем основаны некоторые игрушки.



Фиг. 1

Представим себе круглый цилиндр (высотой, в несколько раз большей диаметра), способный почти без трения вращаться вокруг своей оси. Расположим цилиндр так, что его ось будет горизонтальна, и направим на цилиндр струю воздуха или воды. Допустим, что ось струи (при ее формировании) горизонтальна и проходит ниже оси цилиндра. Если диаметр струи мал сравнительно с диаметром цилиндра, то раскручивание цилиндра происходит в естественно ожидаемом направлении — скорость нижней части цилиндра будет иметь то же направление, что и направление скорости струи. Однако оказалось, что в определенном диапазоне толщин струи и отклонения оси струи вниз от оси цилиндра нижняя часть цилиндра получит скорость в противоположную сторону.

Этот эффект был впервые обнаружен М. А. Гольштиком, им же экспериментально были выявлены моменты сил воздействия потока на цилиндр.

1. Начнем с некоторых постановок задач движения идеальной жидкости.

Задано тело A (конечное или бесконечное, фиг. 1), ограниченное линией Г, расположенной справа от оси y. Требуется определить течение жидкости, удовлетворяющее следующим условиям.

1°. При $x \to -\infty$ искомое движение есть поступательное движение струи $|y| \leqslant h$ параллельно оси x со скоростью, равной единице.

2°. На свободной поверхности скорость постоянная, т. е. (в силу п. 1°) равна единице.

3°. Движение вне тела A — потенциальное, без особенностей.

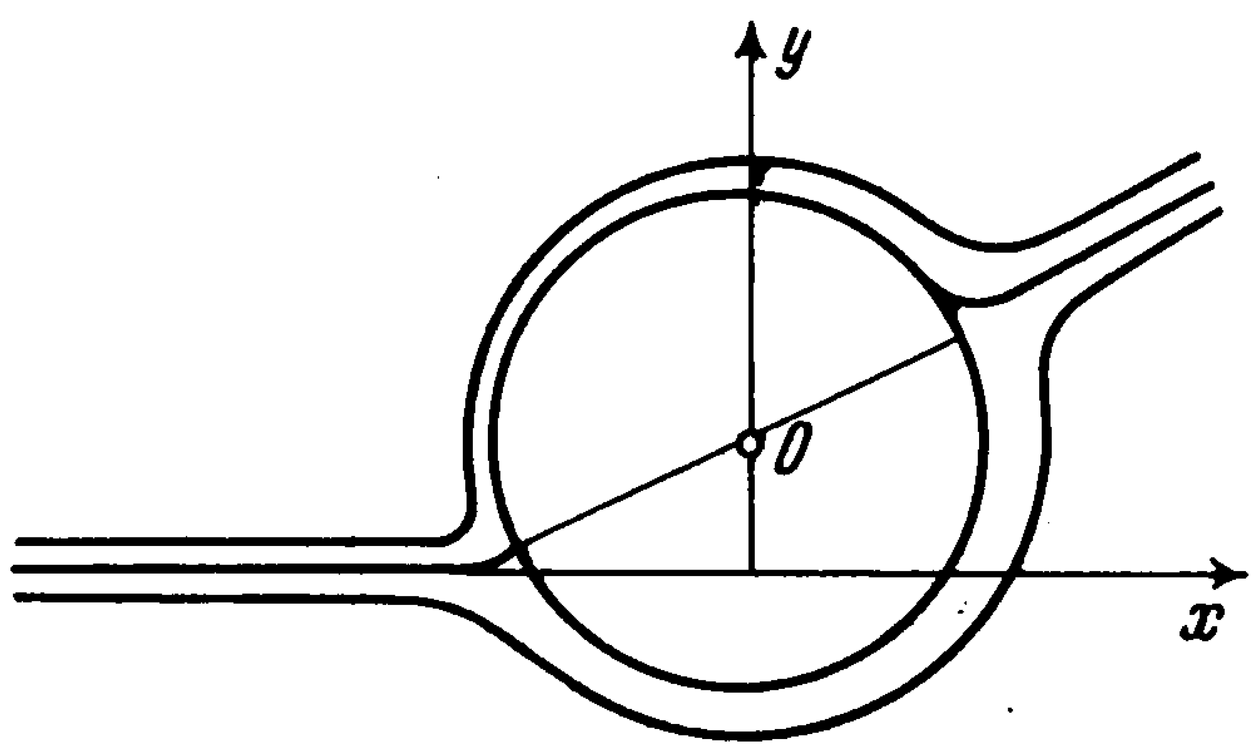
Исследуем устойчивость и существование решения. Рассмотрим случай, когда Г задается уравнением

$$x = x(y), \quad x(y) > 0$$

где $x(y)$ — однозначная, дважды дифференцируемая функция.

Заметим, что при краевом условии $V = 1$ на свободной поверхности решение задачи неустойчиво; именно, можно построить течения, которые на свободной поверхности $|V - 1| < \varepsilon$ будут отклоняться сколь угодно много (ε — сколь угодно мало).

Действительно, пусть линии $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ при $x < -1$ будут границами искомого потока.



Фиг. 2

Рассмотрим поток со скоростью 1 при $x = -\infty$, ограниченный линиями $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ при $|x - 2n| \geqslant n$ и линиями

$$y = y_1(x) + \frac{\sqrt{n}}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{n} + 1\right)$$

$$y = y_2(x) + \frac{\sqrt{n}}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{n} + 1\right)$$

Нетрудно видеть, что при достаточно большом n построенный поток будет удовлетворять условию $V \doteq 1$ на границе сколь угодно точно, а его граница будет сколь угодно сильно отклоняться от границ точного решения.

Устойчивость будет достигнута, если решение искать в классе областей, удовлетворяющих при $x < -A$ условию

$$y_1(x) + h| \leqslant Be^x \quad y_2(x) - h| \leqslant Be^x \quad (B = \mathrm{const})$$

Здесь $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ суть границы струи.

Укажем путь конструкции решения. Комплексный потенциал искомого течения $w = f(z)$ будет, очевидно, реализовать комформное отображение области течения на область Δ, полученную из полосы $|v| < h$ выкидыванием луча

$$v = v_0, \quad u > 0, \quad |v_0| < h \tag{1}$$

При этом границе полосы должны соответствовать свободные границы течения (фиг. 2), луч (1) должен соответствовать линии Г.

Свободные границы Γ_1 и Γ_2 должны быть подобраны так, чтобы на Γ_1 и Γ_2 имели

$$|f'(z)| = 1$$

Пусть $z = \varphi(w)$ — функция, обратная функции f, Рассматриваемая задача сводится к следующей. В области Δ нужно определить функцию

$$F(w) = \log \varphi'(w) = a(u, v) + ib(u, v)$$

так, чтобы удовлетворялись следующие условия.

На прямых $v = \pm h$ функция

$$a(u, v) = a(u, \pm h) = 1$$

На луче $v = v_0$, $u > 0$ функция $b(u, v_0)$ должна быть определена так, чтобы наклон касательной к Г в точке, соответствующей точке u, $u > 0$ луча, был бы равен $b(u, v_0)$.

Величину $b(u, v_0)$ можно задавать «произвольным образом» $b(u, v_0)$ как функцию u; затем, решив смешанную задачу, получить классы движения с различными Г.

Теорему существования и единственности можно получить вариационным методом. Эффективным здесь будет метод последовательных приближений: фиксируя нижнюю свободную границу, можно подобрать верхнюю, затем по верхней границе — подобрать новую нижнюю и т. д.

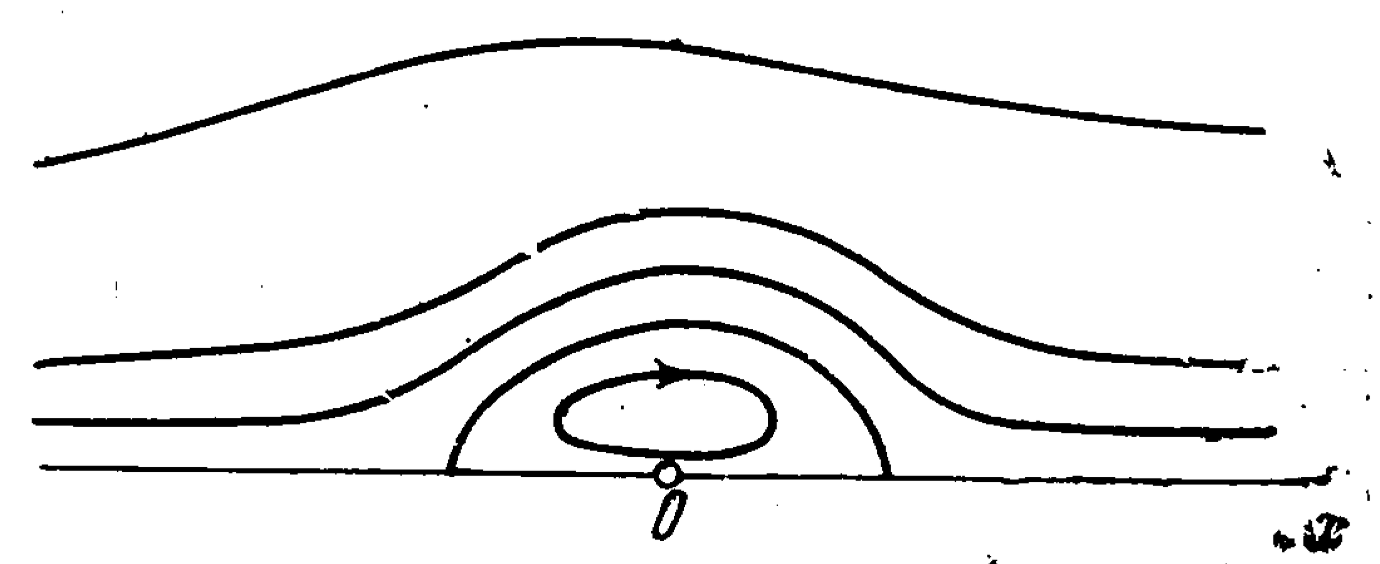
Приведенные выше соображения можно распространить также на случай, когда A имеет конечный размер. В отличие от разобранного ранее случая, решение задачи не будет однозначно определено заданием тела и струи при $x \to -\infty$. При этих данных получится семейство решений, зависящее от одного параметра. Этот параметр можно определить, например, задавая или точку слияния струй за телом или циркуляцию скоростей около тела.

Рассмотрим приближенный метод решения задачи при малом h. За Г примем окружность единичного радиуса с центром на оси y.

При этих условиях с точностью до малых высшего порядка в окрестности точки раздвоения струи (фиг. 2) можно считать прилегающую дугу окружности за прямую, касательную к Г в точке ее пересечения с осью x. Тогда по теореме о количестве движения для толщины h_1 и h_2 верхней и нижней струи легко получить

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}$$

Здесь α — угол, образуемый осью x и окружностью Г.



Фиг. 3

Кроме того, из обратимости движения вытекает, что течение в окрестности точки соединения струй за телом должно быть симметричным с течением в зоне расщепления струи: течение будет симметрично относительно некоторой прямой, проходящей через центр круга.

Опираясь на приближенные формулы конформных отображений узких полос и на условие, что на свободной поверхности скорость должна быть постоянной, нетрудно видеть, что вне окрестностей точки разветвления и слияния струй свободные поверхности раздвоенной струи можно принять за окружности соответственно радиусов $1 + h_1$ и $1 + h_2$.

Приведенное приближенное решение задачи непосредственно переносится на случай тела, ограниченного произвольной достаточно гладкой кривой (кривизна должна удовлетворять условию Гёльдера). Решение может быть уточнено с учетом скорости потока в тонкой полосе в направлении нормали к полосе

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial \alpha}{\partial s} = K$$

Здесь K — средняя кривизна границ полосы.

Используя приближенную теорию движения жидкости между двумя близкими поверхностями, можно построить приближенное решение задачи на обтекание шара (замкнутой поверхности) тонкой струей, имеющей цилиндрическую форму в точке $x = -\infty$.

2. Рассмотрим устойчивость шарика в вертикальной струе. Вернемся к плоской задаче обтекания круга тонкой струей. Физически очевидно, что если ось струи проходит через центр обтекаемого круга, то точка схода струй находится на одном диаметре с точкой разветвления струй. Движение, возможное в схеме идеальной жидкости, когда точка схода смещена, реализоваться не будет, ибо при любой малой вязкости потеря скорости в струе на более длинном участке будет большей, чем на более коротком, а струя с большой скоростью будет сбивать струю с меньшей скоростью в сторону конца диаметра, выходящего из точки разветвления.

Сформулированный принцип можно распространить и на случай, когда ось струи не проходит через центр круга. Как и в симметричном случае, в первом приближении можно считать, что точка схода будет находиться на одном диаметре с точкой разветвления. Если дополнительно учесть, что более толстая часть струи на одной и той же длине пробега будет терять скорость меньше, чем более тонкая, то придем к выводу, что ось струи будет расположена несколько выше конца диаметра, выходящего из точки разветвления струи.

Отсюда, используя схему идеальной жидкости можно сделать следующее заключение: если ось струи будет пересекать обтекаемый контур под углом α, то после обтекания при $x \to +\infty$ ось струи будет образовывать с осью x угол, больший чем 2α; струя будет действовать на круг с силой, пропорциональной α, в направлении, перпендикулярном к диаметру круга, выходящего из точки разветвления струи; сила будет направлена к оси струи; шарик будет устойчив в струе.

Из того, что более толстая часть струи будет занимать больше половины обтекаемой окружности, вытекает второй факт — если ось струи будет проходить ниже центра круга, то круг будет вращаться против часовой стрелки.

3. Рассмотрим несколько схем движения жидкости, когда в области течения имеются завихренные зоны.

Простейшим видом такого движения можно считать движение идеальной жидкости над осью x при следующих условиях. Вне некоторой области D движение потенциально и в бесконечности имеет заданную скорость V_0. В области D течение имеет постоянную завихренность с интенсивностью ω.

Линию раздела — границу D требуется определить так, чтобы при переходе границы скорость потока менялась непрерывно.

Такое движение существует и единственно. В силу принципа подобия при фиксированной скорости V_0, очень малых ω, область D сколь угодно велика, при увеличении ω область D подобно сжимается, и при $\omega \to \infty$ диаметр D стремится к нулю.

Рассмотрим теперь ту же задачу для случая, когда основное движение есть струя конечной ширины h.

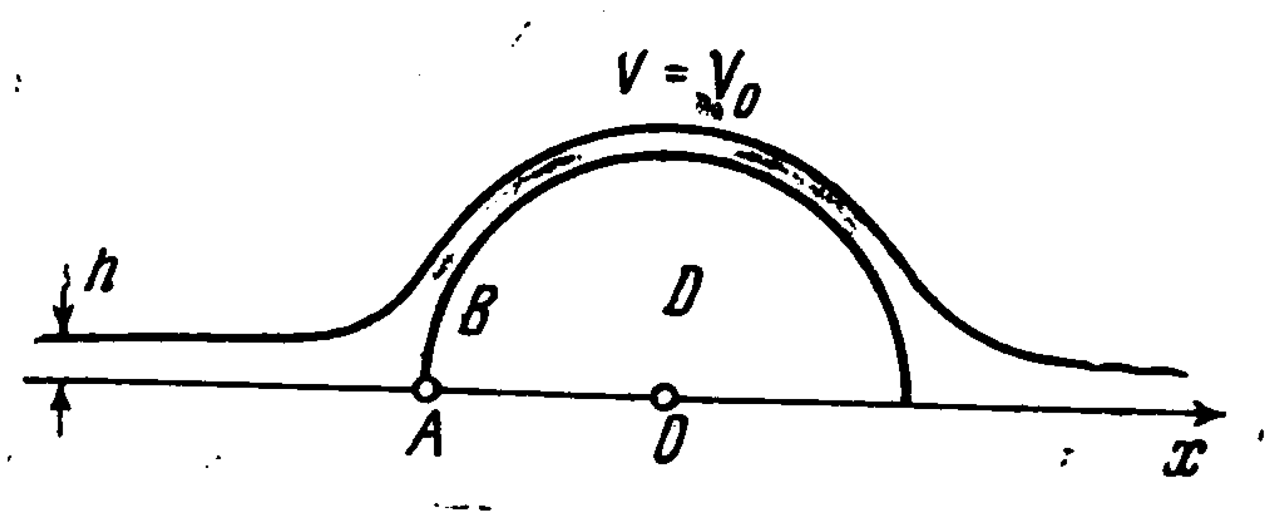
Допустим, что искомое решение задачи есть область D, у которой площадь и диаметр конечны, также конечна (не превосходит определенной константы) кривизна границы. При этих условиях, если $h \leqslant h_0$, где h_0 — некоторая константа, решение задачи не существует.

Приведем качественное обоснование утверждения. Будем предполагать дополнительно, что граница Г области D — выпуклая линия. Допустим теперь противное: h мало сравнительно с диаметром и величиной обратной производной кривизны K границы Г.

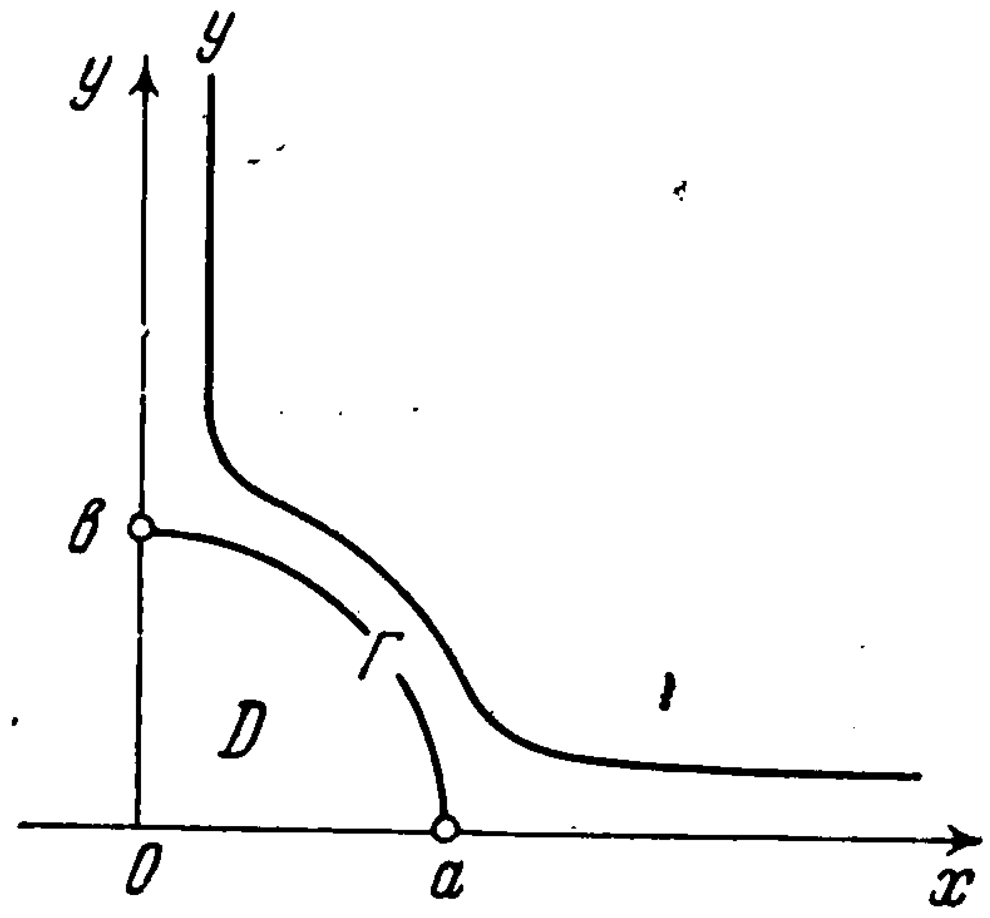
Рассмотрим точку A линии Г, расположенную на оси x, и точку B на Г на расстоянии a от точки A. Пусть a мало, но велико сравнительно с h.

$$a \approx \sqrt{h}$$

Тогда в точке B скорость потока в D будет мала, ибо скорость этого потока в точке A равна нулю, а производная скорости конечна. С другой стороны, из условия, что $a \gg h$, скорость потенциального потока в точке B будет сколь угодно близка V_0.



Фиг. 4



Фиг. 5

Таким же рассуждением можно убедиться в существовании и несуществовании (при достаточно малом h и конечных размерах D) движений следующего вида. Область, занятая жидкостью, состоит из областей D и Δ; область D ограничена отрезком oa оси x, отрезком ob оси y и линией Г; движение жидкости в D есть движение с постоянной завихренностью ω; область Δ есть полоса, ограниченная снизу лучом (a, ∞) оси x, лучом (b, ∞) оси y, линией Г и сверху линией γ с асимптотами $y = h$ и $x = h$; движение в Δ потенциально. На границе Г скорости обоих течений совпадают. Представляет интерес дать оценку для h в зависимости от размеров D, при которых решение существует и не существует.

4. Вернемся к задаче обтекания струей цилиндра. При симметричном обтекании цилиндра струей, конечной или бесконечной ширины, в зоне соединения струй, за телом образуются вихри. Опишем схему в терминах идеальной жидкости, наиболее близкую к действительности. Пусть центр обтекаемого круга (сечения цилиндра) расположен в начале координат, а скорость струи в бесконечности параллельна оси x. Тогда часть течения,

расположенного над осью x, будет состоять из течения с постоянным завихрением ω в области D, ограниченной дугой обтекаемой окружности, отрезком оси x и дугой Γ, соединяющей конец дуги окружности с концом отрезка оси x; вне D течение потенциально.

Если ширина струи $2h$ бесконечна или велика сравнительно с радиусом r обтекаемой окружности, то размер области D может быть любым от нуля до некоторой величины kr ($k < 1$). С уменьшением h постоянная k будет убывать, и при малом $h (h \ll r)$ предельный размер D будет порядка h (так же, как в описанном выше течении внутри координатного угла).

Если допустить жидкость вязкой, то описанного выше установившегося движения не существует: зародившаяся малая вихревая зона будет расти и в некоторый момент отделится от тела; из приведенных выше рассмотрений естественно считать, что при меньших h момент отделения вихревой зоны будет соответствовать меньшим диаметрам вихревой зоны.

Интересно проверить экспериментально, будет ли отрыв соответствовать максимальному размеру D в простейшей схеме идеальной жидкости.

Вернемся к основной физической задаче обтекания цилиндра струей, когда ширина струи соизмерима с размерами тела, а ось струи не проходит через ось цилиндра. В силу изложенного выше, в качестве основного движения примем бесциркуляционное обтекание.

Даже при сколь угодно малой вязкости, при принятом в начальный момент основном движении в зоне соединения струй начнут образовываться две вихревые зоны D_1 и D_2, растущие со временем. Оба вихря по достижении критического размера будут срываться; однако срывающаяся вихревая зона около тонкой струи будет меньше, чем соответствующая зона около толстой среды. В области толстой струи (в среднем), дуга окружности, вдоль которой будет иметь место обратный по отношению к движению струи поток, будет больше соответствующей дуги в области тонкой струи. В силу трения эти обратные потоки будут давать дополнительные моменты. Так как момент в зоне толстой струи будет больше, чем в зоне тонкой, то результирующий момент будет вращать цилиндр в направлении, обратном движению толстой струи.

Поступила 12 X 1965