Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

О НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ГАЗА, ПРИМЫКАЮЩИХ К ОБЛАСТИ ПОКОЯ

А. Ф. Сидоров

(Свердловск)

Хорошо известно, что одномерное плоское неустановившееся течение баротропного газа, граничащее с областью неподвижного газа, является простой волной (см. [1]). В этом случае область возмущенного газа и область покоя разделяются слабым разрывом плоской формы, вдоль которого первые или более высокие производные плотности и компонент вектора скорости испытывают скачок.

В задачах же о примыкании к области неподвижного газа через произвольный криволинейный слабый разрыв в плоском случае или через слабый разрыв, являющийся некоторой криволинейной поверхностью, в пространственном случае течение возмущенного газа уже не будет, вообще говоря, принадлежать к классу простых волн. Это следует хотя бы из того факта, что поверхностями уровня основных газодинамических величин в случае простых волн могут быть либо прямые (в плоском случае), либо плоскости (в пространственном случае, см. [2,3]).

Попытка использовать для описания течений за произвольным слабым разрывом теорию двойных и тройных волн (см. [4,7]), как увидим дальше, также в общем случае не приводит к цели. О течении, примыкающем к области покоя через произвольный слабый разрыв (в дальнейшем будем всегда считать его достаточно гладким), в самом общем случае можно сказать лишь, что оно будет потенциальным. Свойство потенциальности можно легко вывести, например, из кинематических условий совместности, которые должны выполняться вдоль поверхности разрыва.

Однако, если в плоском случае рассматривать течения, удовлетворяющие в окрестности слабого разрыва некоторым условиям гладкости, то можно при помощи потенциальных двойных волн получить приближенные решения в некоторой окрестности произвольного криволинейного слабого разрыва. Исследование задач для уравнений двойных волн, возникающих при таком примыкании, а также вопросов применения решений, полученных при помощи двойных волн, для построения картины течения в окрестности произвольного слабого разрыва и является целью данной работы. При этом будет рассмотрен случай, когда производные от плотности ρ и от компонент вектора скорости u_i на слабом разрыве немалы, и, следовательно, акустического приближения недостаточно.

Заметим, что в пространственном случае двойные волны заведомо не годятся, так как поверхностями уровня ρ и u_i в классе двойных волн могут быть лишь линейчатые поверхности, а рассмотрение тройных волн затруднено тем, что они описываются переопределенной системой нелинейных уравнений в частных производных сложной структуры.

В дальнейшем будем изучать плоские изэнтропические течения политропного газа с уравнением состояния

$$p = A\rho^\gamma, \qquad A = \mathrm{const}$$

которые описываются уравнениями

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + \frac{2}{\gamma - 1} c \frac{\partial c}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{0.1}$$

$$\frac{2}{\gamma - 1}\left(\frac{\partial c}{\partial t} + u_1 \frac{\partial c}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial c}{\partial x_2}\right) + c\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) = 0 \tag{0.2}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \qquad \left(c^2 = \frac{dp}{d\rho}\right) \tag{0.3}$$

Здесь p — давление, γ — показатель адиабаты, c — скорость звука.

Будем считать, что в области покоящегося газа ($u_i = 0$) $c = 1$, а в возмущенно области u_i отнесены к невозмущенной скорости звука, t измеряется в секундах и для x_i выбраны соответствующие единицы.

1. Для исследования поведения решений уравнений двойных волн в окрестности точки $u_i = 0$ ($i = 1, 2$) запишем систему уравнений, описывающую двойные волны [4, 5] в полярных координатах

$$\frac{\gamma-1}{2}\theta\left[\theta_{rr}\left(1-\frac{\theta_\varphi^2}{r^2}\right)+\frac{1-\theta_r^2}{r^2}\theta_{\varphi\varphi}+2\frac{\theta_r\theta_\varphi}{r^2}\theta_{r\varphi}+\right. \tag{1.1}$$

$$\left.+\frac{\theta_r}{r}(1-\theta_r^2)-2\frac{\theta_r\theta_\varphi^2}{r^3}\right]+\frac{\gamma-3}{2}\left(\theta_r^2+\frac{\theta_\varphi^2}{r^2}\right)+2=0$$

$$\Phi_{rr}\left(1-\frac{\theta_\varphi^2}{r^2}\right)+\frac{1-\theta_r^2}{r^2}\Phi_{\varphi\varphi}+2\frac{\theta_r\theta_\varphi}{r^2}\Phi_{r\varphi}+\frac{\Phi_r}{r}(1-\theta_r^2)-2\frac{\theta_r\theta_\varphi}{r^3}\Phi_\varphi=0 \tag{1.2}$$

$$x_1=\left[r\cos\varphi+\frac{\gamma-1}{2}\theta\left(\theta_r\cos\varphi-\theta_\varphi\frac{\sin\varphi}{r}\right)\right]t+\Phi_r\cos\varphi-\Phi_\varphi\frac{\sin\varphi}{r} \tag{1.3}$$

$$x_2=\left[r\sin\varphi+\frac{\gamma-1}{2}\theta\left(\theta_r\sin\varphi+\theta_\varphi\frac{\cos\varphi}{r}\right)\right]t+\Phi_r\sin\varphi+\Phi_\varphi\frac{\cos\varphi}{r}$$

$$\left(u_1=r\cos\varphi,\quad u_2=r\sin\varphi,\quad \theta=\frac{2}{\gamma-1}c,\quad \varphi\in[-\pi,\pi]\right)$$

Здесь Φ — потенциал скоростей, а нижние индексы r и φ обозначают дифференцирование по r и по φ соответственно.

Уравнения (1.1) и (1.2) могут быть легко получены из системы (0.1) — (0.3) при помощи интеграла Коши (см., например, [7]) в предположении, что существует зависимость $c = c(u_1, u_2)$, а u_1 и u_2 функционально независимы (в [4,5] потенциальность течения не предполагалась). Уравнения (1.3) служат для построения течения в физическом пространстве x_1, x_2, t после того, как определены функции θ и Φ.

Точке $u_1 = u_2 = 0$ в плоскости годографа u_1, u_2 соответствует в координатах r и φ отрезок оси $r = 0$. Переход к полярным координатам в уравнениях двойных волн удобен тем, что если бы проводилось рассмотрение непосредственно в плоскости u_1, u_2, в которой уравнениям (1.3) соответствуют уравнения

$$x_i=\left(u_i+\frac{\gamma-1}{2}\theta\theta_i\right)t+\Phi_i \qquad \left(\theta_i=\frac{\partial\theta}{\partial u_i},\ \Phi_i=\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}\right)$$

то необходимо было бы искать решения уравнений двойных волн с многозначными в точке (0, 0) θ_i или Φ_i.

Предельные значения θ_i и Φ_i зависели бы от закона приближения (u_1, u_2) к точке (0, 0), так как в противном случае точке $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $\theta = 2/(\gamma - 1)$ не соответствовала бы некоторая поверхность слабого разрыва $\omega(x_1, x_2, t) = 0$ в физическом пространстве.

Будем искать решения системы (1.1), (1.2), удовлетворяющие некоторым условиям при $r = 0$ так, чтобы формулы (1.3) в пространстве x_1, x_2, t определяли какую-либо не невырожденную поверхность $x_1 = x_1(t, \varphi)$,

$$x_2 = x_2(t, \varphi) \qquad \text{при } r=0,\ \theta=2/(\gamma-1)$$

Из кинематических условий совместности (см. [8]) для функции $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, первые производные которой терпят разрыв при переходе через поверхность $S(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial\xi_k}\right]=h_f\frac{\partial S}{\partial\xi_k}$$

Здесь h_f множитель пропорциональности. Подставляя вместо f функции u_i и c, полагая $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2$, $\xi_3 = t$, получим, что ранг матрицы R для рассматриваемого случая

$$R = \begin{Vmatrix} \partial u_1 / \partial x_1 & \partial u_1 / \partial x_2 & \partial u_1 / \partial t \\ \partial u_2 / \partial x_1 & \partial u_2 / \partial x_2 & \partial u_2 / \partial t \\ \partial c / \partial x_1 & \partial c / \partial x_2 & \partial c / \partial t \end{Vmatrix} \tag{1.4}$$

на поверхности разрыва равен единице. Таким образом, в точках поверхности слабого разрыва $\omega(x_1, x_2, t) = 0$ величины c, u_1 и u_2 попарно зависимы.

Везде далее будем предполагать, что вне поверхности слабого разрыва u_1 и u_2 функционально независимы, т. е. окрестность точки (0, 0) в плоскости годографа, отвечающая в классе двойных волн области течения в пространстве x_1x_2t вблизи поверхности разрыва, однозначно отображается (кроме точки (0, 0)) на плоскость $r\varphi$.

Считая, что уравнения (1.3) при $r = 0$ определяют некоторую поверхность, а x_i в (1.3) непрерывно зависят от r и φ (и при $r = 0$), из (1.3) при $r = 0$ сразу же получим условия

$$\lim \frac{\theta_\varphi}{r} = l_1(\varphi), \qquad \lim \frac{\Phi_\varphi}{r} = l_2(\varphi) \quad (l_1(\varphi) \text{ и } l_2(\varphi) \text{ — непрерывны}) \tag{1.5}$$

Можно показать, что если производные u_i и c испытывают на поверхности слабого разрыва $\omega(x_1, x_2, t) = 0$ конечный скачок, а течение через слабый разрыв примыкает к покою, то в любой момент времени $t = t_0$ касательные к мгновенным линиям тока течения в точках поверхности слабого разрыва ортогональны к этой поверхности. Этот факт не зависит от принадлежности течения к классу двойных волн.

Для доказательства уравнение линий тока в момент $t = t_0$ запишем в виде

$$\frac{dx_1}{u_1} = \frac{dx_2}{u_2} \tag{1.6}$$

Вдоль линии тока $x_1 = x_1(\xi, t_0)$, $x_2 = x_2(\xi, t_0)$ (ξ — параметр) имеем $u_1 = u_1(\xi, t_0)$, $u_2 = u_2(\xi, t_0)$. Пусть $\xi = \xi_0$ отвечает точке на поверхности слабого разрыва и

$$\lim_{\xi\to\xi_0} \frac{u_1}{u_2} = \lim_{\xi\to\xi_0} \frac{u_1'}{u_2'} = \lim_{\xi\to\xi_0} \frac{dx_1}{dx_2} = \left(\frac{dx_1}{dx_2}\right)_{\xi=\xi_0} = a \tag{1.7}$$

где штрих обозначает дифференцирование по ξ. Из (1.7) получим при помощи кинематических условий совместности для производных u_1 и u_2

$$\frac{u_1'}{u_2'} = \frac{x_1' \partial u_1 / \partial x_1 + x_2' \partial u_1 / \partial x_2}{x_1' \partial u_2 / \partial x_1 + x_2' \partial u_2 / \partial x_2} \to \frac{a h_1 \partial\omega / \partial x_1 + h_1 \partial\omega / \partial x_2}{a h_2 \partial\omega / \partial x_1 + h_2 \partial\omega / \partial x_2} \qquad (\xi \to \xi_0) \tag{1.8}$$

Отсюда $a = h_1 / h_2$. Но из условия потенциальности течения (0.3) следует, что

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\partial\omega / \partial x_1}{\partial\omega / \partial x_2}$$

на поверхности слабого разрыва, и, таким образом, высказанное утверждение доказано для случая, когда мгновенная линия тока подходит к поверхности разрыва, не касаясь ее. Случай же касания, когда $a(\partial\omega / \partial x_1) + \partial\omega / \partial x_2 = 0$ не может реализоваться, так как если вдоль траектории $u_1 \not\equiv 0$ и $u_2 \not\equiv 0$, то всегда имеем

$$a = \lim \frac{u_1'}{u_2'} = \frac{h_1}{h_2}$$

При $a = 0$ и $a = \infty$ рассмотрение проводится аналогично.

Для нормальной скорости V распространения слабого разрыва, движение которого подчиняется (1.3), имеем

$$V = \left| \frac{\partial x_1}{\partial t} \cos\varphi + \frac{\partial x_2}{\partial t} \sin\varphi \right| = \left| \frac{\gamma - 1}{2} \theta\theta_r \right| = 1 \tag{1.9}$$

так как слабый разрыв распространяется со скоростью звука, равной в нашем случае единице, и вектор $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ нормален к поверхности разрыва. Из (1.9) немедленно при $r = 0$ получим

$$|\theta_r| = 1 \tag{1.10}$$

Таким образом, для уравнения (1.1) на линии $r = 0$ имеем начальные данные Коши

$$\theta = \frac{2}{\gamma - 1}, \quad \theta_\varphi = 0, \quad |\theta_r| = 1 \quad \text{при } r = 0 \tag{1.11}$$

Величина θ_r непрерывна при $r = 0$, и поэтому всегда необходимо рассматривать два случая: $\theta_r = 1$ и $\theta_r = -1$.

Рассмотрим класс решений уравнений двойных волн, для которых в окрестности $r = 0$ непрерывны все четвертые производные функции θ, содержащие дифференцирование дважды по r и дважды по φ. Изучим поведение решений этого класса при $r = 0$.

Отметим, что этот класс включает в себя все автомодельные цилиндрические течения с автомодельной переменной $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,/\,t$, поведение которых в окрестности слабого разрыва, оставляющего за собой при распространении область покоя, изучено, например, в [9]. В отличие от одномерного сферического движения, когда на слабом разрыве (см. [9]) в такой ситуации (при движении слабого разрыва за нормальной детонационной волной — на фронте волны выполнено условие Чепмена — Жуге) остаются непрерывными первые производные u_i и ρ, а вторые и все остальные производные обращаются в бесконечность, в цилиндрическом случае терпят разрыв первого рода уже первые производные, так же как и в случае одномерного плоского движения[1].

Рассмотрим окрестность $r = 0$, $\Delta r = h$, $h < 1$. В соответствии со сделанными предположениями в этой окрестности

$$\theta(r, \varphi) = \theta(0, \varphi) + \theta_r(0, \varphi) r + \theta_{rr}(r_0, \varphi) r^2 / 2 \quad (0 < r_0 < r) \tag{1.12}$$

Пользуясь непрерывностью $\theta_{rr\varphi\varphi}$ при $r = 0$, получим оценки

$$\frac{\theta_\varphi}{r} \sim O(h), \quad \frac{1 - \theta_r^2}{r} \sim O(1), \quad \frac{\theta_{\varphi\varphi}}{r} \sim O(h), \quad \frac{\theta_{r\varphi}}{r} \sim O(1) \tag{1.13}$$

Отбрасывая в (1.1) слагаемые порядков $O(h)$ и $O(h^2)$ и оставляя члены порядка $O(1)$, будем для θ иметь уравнение

$$\frac{\gamma - 1}{2} \theta \left[\theta_{rr} + \frac{\theta_r (1 - \theta_r^2)}{r} \right] + \frac{\gamma - 3}{2} \theta_r^2 + 2 = 0 \tag{1.14}$$

---

[1] В работе [10] указан метод построения ряда точных решений за двумерными нормальными детонационными волнами таких, что на некотором расстоянии за волной движется криволинейный слабый разрыв, оставляя за собой область покоя. Из-за арифметической ошибки при определении поведения выражения $\theta_r^2 - 1$ в окрестности $r = 0$ (вместо $\theta_r^2 - 1 \sim Br$ берется $\theta_r^2 - 1 \sim B\sqrt{r}$, $B = \mathrm{const}$) в работе неверно сказано, что первые производные u_i и c непрерывны на слабом разрыве. Однако все основные дальнейшие результаты и поставленные краевые задачи остаются верными. Все выкладки проводятся совершенно аналогично.

Условия (1.11) определяют в окрестности $r = 0$ некоторое семейство решений уравнения (1.14), а следовательно, и у уравнения (1.1) имеется семейство решений, удовлетворяющих (1.11), так как уравнение (1.14) можно получить из (1.1), просто предположив, что θ не зависит от φ.

Действительно, рассмотрим вначале случай $\theta_r = 1$. Полагая $y = \theta_r$ и проведя в (1.14) линеаризацию в окрестности $r = 0$, для $y(r)$ получим

$$y_r + \frac{2(1-y)}{r} + \frac{\gamma+1}{2} = 0 \tag{1.15}$$

Откуда $y = 1 + {}^1/_2(\gamma+1)r + C(\varphi)r^2$, а

$$\theta = \frac{2}{\gamma-1} + r + \frac{\gamma+1}{4}r^2 + \frac{1}{3}C(\varphi)r^3 \tag{1.16}$$

Здесь $C(\varphi)$ — произвольная функция φ.

Аналогично для $\theta_r = -1$ получим

$$\theta = \frac{2}{\gamma-1} - r + \frac{\gamma+1}{4}r^2 + \frac{1}{3}C(\varphi)r^3 \tag{1.17}$$

Из (1.16), (1.17) следует, что с точностью $O(h)$ однозначно определяется в окрестности $r = 0$ выражение

$$\frac{1-\theta_r^2}{r} = 2A \qquad \left(A = \pm\frac{\gamma+1}{2} \quad \text{при } \theta_r = \mp 1\right) \tag{1.18}$$

Знаки предполагаются в соответствии. Кроме того, всегда $\theta_{rr} = {}^1/_2(\gamma+1)$ при $r = 0$. Считая, что в (1.2) Φ дважды непрерывно дифференцируема по r и по φ, пользуясь оценками при малых r

$$r^{-1}\theta_\varphi \sim O(h^2), \qquad \Phi_\varphi \sim O(h), \qquad \Phi_{\varphi\varphi} \sim O(h)$$

и соотношением (1.18) и пренебрегая в (1.2) слагаемыми порядков $O(h)$ и $O(h^2)$, окончательно для Φ получим

$$r\Phi_{rr} + 2A\Phi_{\varphi\varphi} + 2Ar\Phi_r = 0 \tag{1.19}$$

В зависимости от знака A уравнение (1.19) в полуплоскости $r > 0$ может быть эллиптического или гиперболического типа. Если плотность газа с удалением от поверхности слабого разрыва возрастает $\theta_r = 1$ (например, слабый разрыв за нормальной детонационной волной), $A < 0$ и уравнение (1.19) при $r > 0$ — гиперболического типа. Наоборот, при убывании плотности (когда слабый разрыв движется по покоящемуся газу, захватывая новые массы газа) $\theta_r = -1$, $A > 0$ и уравнение (1.19) будет эллиптического типа. В обоих случаях линия $r = 0$, на которой $\Phi_\varphi = 0$ ($\Phi = \mathrm{const}$), будет линией параболического вырождения для уравнения (1.19), одновременно являясь характеристикой, так как при $dr = 0$, $d\Phi_\varphi = 0$ условия характеристической полоски (см. [8]) для уравнения (1.19) выполнены. Отметим, что данные Коши (1.11) также определяют характеристическую полоску, а линия $r = 0$ является линией параболичности для уравнений (1.1) и (1.2).

Делая замену $r = \mp z / 2A$, уравнение (1.19) в гиперболическом случае приведем к виду

$$z\Phi_{zz} - \Phi_{\varphi\varphi} - z\Phi_z = 0 \qquad (z > 0) \tag{1.20}$$

а в эллиптическом — к виду

$$z\Phi_{zz} + \Phi_{\varphi\varphi} + z\Phi_z = 0 \qquad (z > 0) \tag{1.21}$$

Рассмотрим вопрос об определении начальных данных при $r = 0$ для функции Φ так, чтобы формулы (1.3) определяли движение слабого разрыва произвольной формы. Заметим, что форма поверхности слабого разрыва в пространстве x_1, x_2, t определяется сразу же, как только задана форма линии пересечения этой поверхности плоскостью $t = 0$. Не умаляя общности, будем считать, что движение слабого разрыва определяется уравнением

$$t = \Psi(x_1, x_2) \tag{1.22}$$

функция Ψ удовлетворяет уравнению

$$\Psi_1^2 + \Psi_2^2 = 1, \qquad \Psi_i = \partial\Psi / \partial x_i \tag{1.23}$$

так как фронт слабого разрыва двигается с постоянной нормальной скоростью, равной скорости звука. Уравнение (1.23) может быть легко проинтегрировано при любых начальных данных, и, следовательно, закон движения слабого разрыва будет определен.

Положим $\Phi_r = \Pi(\varphi)$ при $r = 0$. Тогда, в силу сделанных предположений, $\lim (r^{-1}\Phi_\varphi) = l_2(\varphi) = \Pi'(\varphi)$ при $r \to 0$ (см. (1.5)), и из (1.3) следует, что фронт слабого разрыва при $t = 0$ задается параметрически уравнениями

$$x_1 = \Pi(\varphi)\cos\varphi - \Pi'(\varphi)\sin\varphi, \qquad x_2 = \Pi(\varphi)\sin\varphi + \Pi'(\varphi)\cos\varphi \tag{1.24}$$

Если линия слабого разрыва при $t = 0$ задана уравнением $F(x_1, x_2) = 0$, то для $\Pi(\varphi)$ будем иметь обыкновенное дифференциальное уравнение

$$F(\Pi(\varphi)\cos\varphi - \Pi'(\varphi)\sin\varphi, \ \Pi(\varphi)\sin\varphi + \Pi'(\varphi)\cos\varphi) = 0 \tag{1.25}$$

Задавая из геометрических соображений при $\varphi = 0$ какую-либо точку $(x_1, x_2) = (a, b)$, начальное условие для (1.25) можно брать в виде $\Pi(0) = a$.

Таким образом, для уравнения (1.19) имеем начальные данные

$$\Phi = 0, \quad \Phi_\varphi = 0, \quad \Phi_r = \Pi(\varphi) \quad \text{при } r = 0 \tag{1.26}$$

так как аддитивная константа в Φ несущественна.

Отметим, что, находя из (1.3) при $r = 0$, $t = t_0$ касательный вектор к линии слабого разрыва $(\partial x_1 / \partial\varphi, \ \partial x_2 / \partial\varphi)$ при помощи (1.24), получим

$$\begin{aligned} \partial x_1 / \partial\varphi &\to \sin\varphi\,(-t_0\theta_r - \Pi(\varphi) - \Pi''(\varphi)) \\ \partial x_2 / \partial\varphi &\to \cos\varphi\,(t_0\theta_r + \Pi(\varphi) + \Pi''(\varphi)) \end{aligned} \quad \text{при } r \to 0 \tag{1.27}$$

т. е. вектор $(\cos\varphi, \sin\varphi)$, в соответствии с вышеизложенным, является единичным вектором нормальным к линии разрыва.

2. Исследуем задачу Коши при $z = 0$ для уравнений (1.20), (1.21). Вообще говоря, задача с начальными данными на линии параболичности не корректна ни в гиперболическом, ни в эллиптическом случаях [11].

Рассмотрим вначале гиперболический случай и, используя теорему работы [12], покажем, что существует дважды непрерывно дифференцируемое решение поставленной задачи для уравнения (1.20), и такое решение единственно.

Вводя функции

$$\Phi_z = u, \qquad \Phi_\varphi = -v \tag{2.1}$$

преобразуем уравнение (1.20) к системе двух уравнений первого порядка

$$u_\varphi + v_z = 0, \qquad zu_z + v_\varphi - zu = 0 \tag{2.2}$$

Начальными данными для u и v будут

$$u = \frac{1}{\gamma+1}\Pi(\varphi), \qquad v = 0 \quad \text{при } z = 0 \tag{2.3}$$

Пусть область D ограничена отрезком $[M, N]$ оси φ (точки M и N принадлежат интервалу $[-\pi, \pi]$) и характеристиками

$$\varphi - 2\sqrt{z} = C_1 = \text{const}, \qquad \varphi + 2\sqrt{z} = C_2 = \text{const} \tag{2.4}$$

проходящими через точки M и N соответственно. Коэффициенты системы (2.2) непрерывны в прямоугольнике $\varphi \in [M, N]$, $z \in [0, \delta)$, где δ такое что этот прямоугольник содержит область D, включая ее границы.

Вычисляя функцию (начальные условия теоремы 1 [12] имеют вид $v(\varphi, 0) = \nu(\varphi)$, $\eta^{-1}(u - P) = \tau(\varphi)$ на MN, где P — некоторая фиксированная функция (см. [12]), а ν и τ — достаточно гладкие)

$$\eta(\varphi, z) = \exp\int_z^\delta b(\varphi, \tau)\tau^{-1}d\tau$$

где b — коэффициент при u во втором уравнении (2.2), будем иметь $\eta = \exp(z - \delta)$, т. е. $\eta = \text{const} \neq 0$ при $z = 0$. По теореме 1 работы [12], условия которой в данном случае выполнены, считая, что $\Pi(\varphi)$ имеет четыре непрерывные производные, получаем существование единственного дважды непрерывно дифференцируемого решения системы (2.2) с начальными данными (2.3).

Полагая в (1.20) $\Phi = \chi(z)\psi(\varphi)$, для χ и ψ получим обыкновенные уравнения

$$\psi'' + \lambda\psi = 0 \tag{2.5}$$

$$z\chi'' - z\chi' + \lambda\chi = 0 \tag{2.6}$$

где λ — неопределенный параметр. Так же как в [10], легко показать, что два линейно независимых решения уравнения (2.6) в окрестности $z = 0$ имеют вид

$$\chi_1 = A_1 z + o(z), \qquad A_1 = \text{const} \neq 0$$

$$\chi_2 = A_2 + o(1), \qquad A_2 = \text{const} \neq 0$$

Из (1.26) вытекает, что $\chi(0) = 0$ и χ_2 не годится в качестве решения. Для χ_λ при $z = 0$ можно брать следующие начальные данные

$$\chi_\lambda(0) = 0, \qquad \chi_\lambda'(0) = 1 \tag{2.7}$$

Будем рассматривать случай слабого разрыва замкнутой формы и $\varphi \in [-\pi, \pi]$, из (2.5) для λ получим $\lambda = k^2$ $(k = 0, 1, 2 \ldots)$. Полагая $\chi = zy$, из (2.6) для $y(z)$ имеем уравнение

$$zy'' + (2 - z)y' + (k^2 - 1)y = 0 \tag{2.8}$$

Считая, что y'' непрерывна при $z = 0$, из (2.8) при z, близких к нулю, будем иметь

$$y = \exp[-{}^1/_2(k^2 - 1)z] \tag{2.9}$$

и, таким образом, выражение для Ф в некоторой малой окрестности $z = 0$ следующее:

$$\Phi = z \sum_k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \exp\left(-\frac{k^2-1}{2} z\right) \tag{2.10}$$

где

$$\sum_k a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi = \frac{1}{\gamma+1} \Pi(\varphi) \tag{2.11}$$

Ясно, что при достаточной гладкости функции П (φ) применение метода Фурье корректно.

Рассмотрим эллиптический случай. Задача с данными Коши (2.3) для уравнения (1.21) некорректна в классическом смысле.

Уравнение (1.21) принадлежит к классу уравнений, краевые задачи для которых были изучены М. В. Келдышем в [13]. При этом краевые задачи рассматривались в области ограниченной отрезком MN оси φ и гладкой кривой Г, опирающейся на отрезок MN и расположенной в полуплоскости $z > 0$. Существование непрерывного решения задачи Дирихле и задачи E (когда отрезок MN свободен от задания краевого условия) зависит от поведения при $z = 0$ коэффициента $b(\varphi, z)$ при Φ_z. Так как в нашем случае $b(\varphi, 0) = 0$, то по теореме М. В. Келдыша существует непрерывное решение задачи Дирихле, при этом контур Г можем выбирать произвольно (лишь бы он был гладким), а также можно произвольно задавать Ф на Г ($\Phi = 0$ на MN). Каждое такое решение порождает некоторую функцию П (φ) и, следовательно, некоторую поверхность слабого разрыва.

Таким путем можно получить семейство решений, зависящее от указанных выше произвольных функций, и затем попытаться приблизить с их помощью заданную функцию П (φ). Можно и непосредственно решать задачу Коши (2.3) для уравнения (1.21) методом Фурье, точно так же как и в гиперболическом случае, взяв небольшое число членов ряда, т. е. используя простейший метод регуляризации некорректной задачи. Вопрос о существовании точного решения поставленной задачи остается открытым.

До сих пор рассматривалось поведение двойных волн лишь в окрестности линии $r = 0$ и введены уравнения, описывающие движение газа в малой окрестности слабого разрыва.

Однако уравнение (1.14), как отмечалось выше,— точное в том смысле, что оно может быть получено из уравнений двойных волн лишь в предположении, что $\theta = \theta(r)$. Это уравнение может быть получено и из уравнений цилиндрического автомодельного движения с независимой переменной $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} / t$ (см. [14]).

Для такой функции θ уравнение (1.2) будет иметь вид

$$r^2\Phi_{rr} + (1 - \theta_r^2)\Phi_{\varphi\varphi} + r(1 - \theta_r^2)\Phi_r = 0 \tag{2.12}$$

(это уравнение было рассмотрено в [10], но для других целей).

При помощи системы уравнений (1.14), (2.12), решения которой удовлетворяют указанным выше начальным условиям, можно найти семейство решений уравнений газовой динамики (например методом Фурье), принадлежащее к классу двойных волн, за поверхностью слабого разрыва, вообще говоря, произвольной формы. Эти решения уже не локальные в окрестности слабого разрыва, а действуют в общем случае до появления в течение предельных линий (см. [10]). В окрестности же разрыва эти течения ведут себя так же, как и течения, полученные при помощи системы уравнений (1.20), (1.21).

В п. 3 показано, что при некоторых условиях течение за поверхностью произвольного слабого разрыва в общем случае с определенного момента времени можно приближенно считать двойной волной. Таким образом, аппарат двойных волн дает эффективную возможность получить приближенную картину течений в некоторой окрестности произвольного слабого разрыва описанного типа.

3. Будем считать, что поверхность слабого разрыва, распространяющегося по покоящемуся газу, задана уравнением (1.22), где функция Ψ удовлетворяет (1.23). Поверхность (1.22) будет характеристической поверхностью системы уравнений (0.1), (0.2) на ней $u_i = 0$ и $c = 1$.

Скачок выводящих производных $u_{i\psi}$ и c_ψ при переходе через характеристическую поверхность (1.22) удовлетворяет (см. [15]) соотношению

$$(u_{1\psi},\ u_{2\psi},\ c_\psi) = \sigma\,(c\Psi_1,\ c\Psi_2,\ {}^1/_2\,(\gamma - 1)) \tag{3.1}$$

где $u_{i\psi}$ и c_ψ — скачки производных по нормали к поверхности (1.22), вектор $(c\Psi_1,\ c\Psi_2,\ {}^1/_2\,(\gamma-1))$ — правый нуль-вектор характеристической матрицы системы (0.1), (0.2), а σ — некоторый скалярный множитель. Характеристическую поверхность (1.22) можно покрыть семейством бихарактеристических лучей, удовлетворяющих уравнениям

$$t^{\cdot} = 1,\quad x_1^{\cdot} = c^2\Psi_1,\qquad x_2^{\cdot} = c^2\Psi_2 \tag{3.2}$$

В данном случае за параметр на бихарактеристическом луче, вдоль которого происходит дифференцирование (обозначенное точкой в (3.2)), берется время t. Поверхность слабого разрыва (1.22), определяемая уравнением (1.23), в рассматриваемом случае будет развертывающейся поверхностью x_1x_2t, а бихарактеристики, являющиеся характеристиками уравнения (1.23), в данном случае — прямые линии в пространстве x_1x_2t. Вдоль бихарактеристик $\Psi_1 = \mathrm{const}$ и $\Psi_2 = \mathrm{const}$.

Это следует из соотношения

$$\Psi_1x_1^{\cdot} + \Psi_2x_2^{\cdot} = 1$$

показывающего, что поверхность $t = \Psi\,(x_1,\ x_2)$ является интегралом системы (3.2).

В [15] для систем линейных уравнений первого порядка получено обыкновенное дифференциальное уравнение (уравнение переноса), в соответствии с которым скаляр σ распространяется по бихарактеристическим лучам, и указано на возможность получения уравнения переноса для квазилинейных систем. Подробно уравнение переноса для случая системы двух квазилинейных уравнений с двумя независимыми переменными (когда σ распространяется вдоль характеристик) изучено в работе [16]. Ниже выведем уравнение переноса для системы (0.1), (0.2) в случае примыкания к покою. Оно будет существенно использовано в дальнейшем.

Перейдем в уравнениях (0.1), (0.2) к новым независимым переменным

$$\xi_1 = x_1,\qquad \xi_2 = x_2,\qquad \xi_3 = \Psi\,(x_1,\ x_2) - t \tag{3.3}$$

После замены получим

$$(-1 + u_1\Psi_1 + u_2\Psi_2)\,\frac{\partial u_i}{\partial\xi_3} + u_1\frac{\partial u_i}{\partial\xi_1} + u_1\frac{\partial u_i}{\partial\xi_2} + \frac{2}{\gamma-1}\,c\left(\frac{\partial c}{\partial\xi_i} + \frac{\partial c}{\partial\xi_3}\,\Psi_i\right) = 0\quad (i = 1, 2) \tag{3.4}$$

$$\frac{2}{\gamma-1}(-1 + u_1\Psi_1 + u_2\Psi_2)\,\frac{\partial c}{\partial\xi_3} + \frac{2}{\gamma-1}\left(u_1\,\frac{\partial c}{\partial\xi_1} + u_2\,\frac{\partial c}{\partial\xi_2}\right) + $$
$$+ c\left(\frac{\partial u_1}{\partial\xi_1} + \frac{\partial u_2}{\partial\xi_2} + \frac{\partial u_1}{\partial\xi_1}\,\Psi_1 + \frac{\partial u_2}{\partial\xi_3}\,\Psi_2\right) = 0 \tag{3.5}$$

Для системы (3.4), (3.5) уравнение характеристических поверхностей $R(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ имеет вид

$$\frac{2}{\gamma-1}[R_3(-1+u_1\Psi_1+u_2\Psi_2)+u_1R_1+u_2R_2]\{[R_3(-1+u_1\Psi_1+u_2\Psi_2)+$$
$$+u_1R_1+u_2R_2]^2-c^2(R_3\Psi_1+R_1)^2-c^2(R_3\Psi_2+R_2)^2\}=0 \quad \left(R_i=\frac{\partial R}{\partial \xi_i}\right) \tag{3.6}$$

и поверхность $R = \xi_3 = 0$ соответствует поверхности слабого разрыва.

Уравнениями бихарактеристик будут

$$\xi_1^{\cdot} = c^2\Psi_1, \qquad \xi_2^{\cdot} = c^2\Psi_2, \qquad \xi_3^{\cdot} = 0 \tag{3.7}$$

Обозначим через L_1, L_2, L_3 левые части уравнений, полученных дифференцированием по ξ_3 уравнений (3.4) и (3.5) соответственно. Умножая L_1, L_2, L_3 на $c\Psi_1$, $c\Psi_2$, 1 и складывая соответственно, будем иметь на характеристической поверхности

$$\begin{gathered}
c\Psi_1L_1+c\Psi_2L_2+L_3=\frac{2}{\gamma-1}c^2\left(\frac{\partial^2c}{\partial\xi_1\partial\xi_3}\Psi_1+\frac{\partial^2c}{\partial\xi_2\partial\xi_3}\Psi_2\right)+\\
+c\left(\frac{\partial^2u_1}{\partial\xi_1\partial\xi_3}+\frac{\partial^2u_2}{\partial\xi_2\partial\xi_3}\right)+c\Psi_1\left(\Psi_1\frac{\partial u_1}{\partial\xi_3}+\Psi_2\frac{\partial u_2}{\partial\xi_3}\right)\frac{\partial u_1}{\partial\xi_3}+\\
+\frac{2}{\gamma-1}c\Psi_1\frac{\partial c}{\partial\xi_3}\left(\frac{\partial c}{\partial\xi_1}+\frac{\partial c}{\partial\xi_3}\Psi_1\right)+c\Psi_2\left(\Psi_1\frac{\partial u_1}{\partial\xi_3}+\Psi_2\frac{\partial u_2}{\partial\xi_3}\right)\frac{\partial u_2}{\partial\xi_3}+\\
+\frac{2}{\gamma-1}c\Psi_2\frac{\partial c}{\partial\xi_3}\left(\frac{\partial c}{\partial\xi_2}+\frac{\partial c}{\partial\xi_3}\Psi_2\right)+\frac{2}{\gamma-1}\left(\Psi_1\frac{\partial u_1}{\partial\xi_3}+\Psi_2\frac{\partial u_2}{\partial\xi_3}\right)+\\
+\frac{\partial c}{\partial\xi_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\xi_1}+\frac{\partial u_2}{\partial\xi_2}+\frac{\partial u_1}{\partial\xi_3}\Psi_1+\frac{\partial u_2}{\partial\xi_3}\Psi_2\right)=0
\end{gathered} \tag{3.8}$$

Дифференцирование по ξ_1 и ξ_2 будет внутренним на характеристической поверхности $\xi_3 = 0$. Так как перед фронтом слабого разрыва все производные от функций u_i и c равны нулю, то из соотношения (3.1) для скачков выводящих производных в данном случае получим

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial\xi_3}, \frac{\partial u_2}{\partial\xi_3}, \frac{\partial c}{\partial\xi_3}\right)=\sigma\left(c\Psi_1, c\Psi_2, \frac{\gamma-1}{2}\right) \tag{3.9}$$

Используя (1.23), (3.9) и соотношение

$$f^{\cdot} = c^2\Psi_1\frac{\partial f}{\partial\xi_1}+c^2\Psi_2\frac{\partial f}{\partial\xi_2}$$

для дифференцирования функции f вдоль бихарактеристики (3.7), окончательно для σ из (3.8) получаем следующее уравнение переноса:

$$\sigma^{\cdot}+\frac{\gamma+1}{2c}\sigma^2+\frac{c^2(\Psi_{11}+\Psi_{22})}{2}\sigma=0 \quad \left(\Psi_{ik}=\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi_i\,\partial\xi_k}\right) \tag{3.10}$$

В данном случае (3.10) будет уравнением Риккати, в отличие от случая линейной системы, когда уравнение переноса — также линейное обыкновенное. Вместо ξ_1 и ξ_2 в коэффициентах (3.10) следует подставить значения $\xi_1 = a_1t + b_1$, $\xi_2 = a_2t + b_2$, $a_i = \mathrm{const}$, $b_i = \mathrm{const}$, $c = 1$. Это следует из (3.7) после интегрирования уравнений бихарактеристик.

Если слабый разрыв имеет плоскую форму, т. е. $\Psi_{11} + \Psi_{22} = 0$, из (3.10) получим уравнение

$$\sigma^{\cdot} + {}^1/_2(\gamma+1)\sigma^2 = 0 \tag{3.11}$$

общим решением которого будет

$$\sigma = \frac{1}{{}^1/_2(\gamma+1)t+A} \qquad (A = \mathrm{const}) \tag{3.12}$$

Этот результат находится в соответствии с теорией простых волн, к классу которых всегда принадлежит плоское одномерное течение, примыкающее к покою через слабый разрыв. Действительно, записав уравнение простых волн в виде (см. [9])

$$x - [{}^1/_2(\gamma+1)u \pm 1]t = F(u)$$

где u — скорость, x — пространственная координата, $F(u)$ — произвольная функция ($F(0) = 0$), и разложив $F(u)$ в окрестности $u = 0$ в ряд Тейлора, для $\partial u / \partial x$ получим на слабом разрыве

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{{}^1/_2(\gamma+1)t+F_0}, \qquad F_0 = \frac{\partial F}{\partial u} \quad \text{при } u=0$$

Рассмотрим одномерный цилиндрический случай, когда движение слабого разрыва определяется уравнением $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = t$. В данном случае $\Psi_{11} + \Psi_{22} = 1 / t$ и уравнение (3.10) принимает вид

$$\sigma^{\cdot} + \frac{\gamma+1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2t}\sigma = 0 \tag{3.13}$$

Пользуясь тем, что $\sigma = 1 / (\gamma+1)t$ есть частное решение, общее решение (3.13) запишем в виде

$$\sigma = \frac{1}{(\gamma+1)t} + \frac{1}{At^{3/2} - (\gamma+1)t} \qquad (A = \mathrm{const}) \tag{3.14}$$

Будем рассматривать некоторую окрестность Δ_k слабого разрыва (1.22), характеризуемую тем, что при любом $t \geqslant t_k$ для любой точки (x_1, x_2, t), принадлежащей этой окрестности, найдется на поверхности (1.22) точка $(x_1^\circ, x_2^\circ, t)$ такая, что

$$|x_1 - x_1^\circ| \leqslant k, \qquad |x_2 - x_2^\circ| \leqslant k$$

Из (3.14) следует, что если в некоторый момент времени $t = t_0$ слабый разрыв занимал положение $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = t_0$ и два разных течения за ним характеризовались двумя различными скалярами σ_1 и σ_2, которым соответствовали константы $A_1 < \infty$ и $A_2 = \infty$ (т. е. автомодельное течение с независимой переменной $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} / t$), то при больших t

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \sim O(t^{-3/2}) \tag{3.15}$$

Таким образом, если в одномерном цилиндрическом течении имеется слабый разрыв, распространяющийся по покоящемуся газу, и в момент $t = t_0$ известно, что производные всех газодинамических величин испытывают конечный скачок, а радиус кривизны слабого разрыва увеличивается при увеличении t, то в окрестности Δ_k через интервал времени $t_k \sim O(k^{-2/3})$ с точностью $O(k^2)$ для $t > t_k$ $(k < 1)$ можно приблизить заданное течение при помощи автомодельного течения с автомодельной переменной $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} / t$. Точность $O(k^2)$ имеется в виду по отношению к определению функций u_1, u_2 и c.

Можно показать, что аналогичный результат имеет место и в случае слабого разрыва произвольной формы, если радиус его кривизны со временем увеличивается. Только вместо автомодельных течений в данном случае необходимо рассматривать класс двойных волн. При этом всегда, конечно, предполагается, что течение в окрестности слабого разрыва достаточно гладкое.

Действительно, дифференцируя (1.23) по u_1 и u_2, получим

$$\Psi_{11}+\Psi_{22}=-\frac{\Psi_{21}}{\Psi_1\Psi_2} \tag{3.16}$$

Введя в рассмотрение кривизну K плоской кривой $\Psi(x_1, x_2)=t_0$, лежащей в плоскости $t=t_0$, при помощи (1.23) уравнение (3.10) приведем к виду

$$\sigma^{\cdot}+{}^1/_2\,(\gamma+1)\,\sigma^2+{}^1/_2\,K\sigma=0 \tag{3.17}$$

Вдоль фиксированной бихарактеристики с $\Psi_1=\mathrm{const}$, $\Psi_2=\mathrm{const}$ величину K можно представить в данном случае в виде

$$K=\frac{1}{t+B}\qquad (B=\mathrm{const}) \tag{3.18}$$

Действительно, находя вдоль бихарактеристики производную

$$\left(\frac{1}{\Psi_{21}}\right)^{\cdot}=-\frac{\Psi_{211}\Psi_1+\Psi_{212}\Psi_2}{\Psi_{21}{}^2},\qquad \Psi_{ikj}=\frac{\partial^3\Psi}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_k} \tag{3.19}$$

при помощи равенства

$$\Psi_{112}\Psi_1+\Psi_{11}\Psi_{22}+\Psi_{122}\Psi_2+\Psi_{12}\Psi_{22}=0$$

полученного дифференцированием (1.23) по x_1 и x_2, будем иметь

$$\left(\frac{1}{\Psi_{21}}\right)^{\cdot}=-\frac{1}{\Psi_1\Psi_2} \tag{3.20}$$

Интегрируя (3.20), для Ψ_{21} получим

$$\Psi_{21}=\frac{1}{-t/\Psi_1\Psi_2+B}\qquad (B=\mathrm{const}) \tag{3.21}$$

Окончательно уравнение (3.10) в общем случае запишем в виде

$$\sigma^{\cdot}+\frac{\gamma+1}{2}\sigma^2+\frac{1}{2(t+B)}\sigma=0 \tag{3.22}$$

Общее решение его таково:

$$\sigma=\frac{1}{(\gamma+1)(t+B)}+\frac{1}{A\,(t+B)^{3/2}-(\gamma+1)(t+B)}\qquad (A=\mathrm{const}) \tag{3.23}$$

Из соотношений (1.3), которые в соответствии с вышеизложенным в окрестности слабого разрыва имеют вид

$$\begin{aligned} x_1&=[r+{}^1/_2\,(\gamma-1)\,\theta\theta_r]\cos\varphi t+\Phi_r\cos\varphi-r^{-1}\Phi_\varphi\sin\varphi\\ x_2&=[r+{}^1/_2\,(\gamma-1)\,\theta\theta_r]\sin\varphi t+\Phi_r\sin\varphi+r^{-1}\,\Phi_\varphi\cos\varphi\end{aligned} \tag{3.24}$$

для скаляра σ_d, соответствующего классу двойных волн, при помощи условий на слабом разрыве для функций θ и Φ (1.11), (1.26) получаем следующий закон распространения вдоль бихарактеристик:

$$\sigma_d=\frac{1}{(\gamma+1)(t+B_1)}\qquad (B_1=\mathrm{const}) \tag{3.25}$$

Пусть радиус кривизны слабого разрыва возрастает со временем, возмущения в течении за разрывом не догоняют разрыв (течение в окрестности разрыва достаточно гладкое) и, кроме того, в момент времени $t=t_0>|B_1|$ скаляр σ в (3.23) вдоль некоторой дуги слабого разрыва определяется значениями постоянных A, B, $a_0\leqslant A\leqslant a_1$, $b_0\leqslant B\leqslant b_1$, a_0, a_1, b_0, $b_1=\mathrm{const}$ так, что при возрастании t скаляр σ не обращается в бесконечность. Тогда на части поверхности слабого разрыва ($t>t_0$), образованной бихарактеристиками, проходящими через точки упомянутой дуги, для достаточно больших t

$$|\sigma_d-\sigma|\sim O(t^{-3/2}) \tag{3.26}$$

Таким образом, и в случае произвольного слабого разрыва при вышеуказанных ограничениях в окрестности Δ_k для достаточно больших $t_k\sim O\,(k^{-2/3})$ с точностью $O\,(k^2)$ можно при малых k приближенно считать решение двойной волной, и задача сводится, следовательно, к решению уравнений (1.14), (2.12) с поставленными выше начальными условиями. Более грубое приближение можно получить, рассматривая вместо системы (1.14), (2.12) уравнения (1.20), (1.21) с соответствующими начальными данными и $h = O(k)$.

Высказанные утверждения дают возможность строить приближенную картину течений в окрестности слабого разрыва в ряде задач, например, когда слабые разрывы возникают при выдвижении по произвольному закону из некоторого объема покоящегося газа криволинейных поршней произвольной формы, и течения таковы, что никакие возмущения из области течения до слабого разрыва не доходят.

Замечание 3.1. Задачи, рассмотренные в классе двойных волн для системы уравнений (1.14), (2.12), дают возможность построить ряд течений газа за слабым разрывом не только, когда при $t \to \infty$ слабый разрыв превращается в звуковую волну, но и ряд течений, существование которых ограничено во времени, и справедливых до момента начала формирования ударной волны. Сделать это можно, например, как в [17], при помощи зеркальных отражений рассмотренных течений относительно осей координат. Всего возможно четыре таких типа течения аналогично одномерному случаю центрированной простой волны, когда имеются бегущие «вперед» и «назад» волны разрежения и сжатия (см. [17]).

Замечание 3.2. При применении двойных волн для приближенного построения течений в окрестности произвольного слабого разрыва полезным может оказаться тот факт, что скачки производных u_1, u_2 и c в каждый момент времени обратно пропорциональны радиусу кривизны линии слабого разрыва. Факт этот легко получается из формул (3.24), задающих параметрически при $t = \text{const}$, $r = 0$ линию слабого разрыва.

Поступила 15 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
2. Никольский А. А. Обобщение волн Римана на случай пространства. Кн. «Сб. теор. работ по аэродинамике», М., Оборонгиз, 1957.
3. Яненко Н. Н. Бегущие волны системы квазилинейных уравнений. Докл. АН СССР, 1956, т. 109, № 1.
4. Погодин Ю. Я., Сучков В. А., Яненко Н. Н. О бегущих волнах уравнений газовой динамики. Докл. АН СССР, 1958, т. 119, № 3.
5. Сидоров А. Ф., Яненко Н. Н. К вопросу о нестационарных плоских течениях политропного газа с прямолинейными характеристиками. Докл. АН СССР, 1958, т. 123, № 5.
6. Рыжов О. С. О течениях с вырожденным годографом. ПММ, 1957, т. 21, вып. 4.
7. Сидоров А. Ф. О нестационарных потенциальных движениях политропного газа с вырожденным годографом. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
8. Смирнов В. И. Курс высшей метематики, изд. 2-е, т. IV. Гостехиздат, 1951.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред, изд. 2-е, гл. XIV. М., Гостехиздат, 1954.
10. Сидоров А. Ф. Некоторые точные решения нестационарной двумерной газовой динамики. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
11. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. Изд-во АН СССР, 1959.
12. Терсенов С. А. О задаче с данными на линии вырождения для систем уравнений гиперболического типа. Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 2.
13. Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области. Докл. АН СССР, 1951, т. 77, № 2.
14. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике, изд. 4-е. М., Гостехиздат, 1957.
15. Курант Р. Уравнения с частными производными, гл. VI. М., Изд. «Мир», 1964.
16. Nitsche J. Über Unstetigkeiten in den Ableitungen von Lösungen quasilinearer hyperbolischer Differentialgleichungssusteme. J. Rat. Mech. and Analysis, 1953, vol. 2, № 2.
17. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М., Изд. иностр. лит., 1961.