Прикладная математика и механика Том 30, 1966

СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ АНИЗОТРОПНО ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЫ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

С. А. Регирер, И. Б. Чекмарев

(Москва, Ленинград)

Простейшая задача о движении анизотропно проводящей среды в полупространстве при наличии магнитного поля рассматривалась Фэем [1] и Э. Г. Сахновским [2], которые установили, что распределение скоростей в жидкости немонотонно. Периодическая структура распределения скоростей, возникающая вследствие анизотропии проводимости, характерна, по-видимому, для многих задач о течении в полуограниченных областях. Некоторые такие задачи рассматриваются ниже.

1. Рассмотрим вначале стационарное течение проводящей среды над бесконечной плоскостью, движущейся поступательно. Внешнее магнитное поле B_0 будем считать однородным и направленным перпендикулярно плоскости. Предположим, что плоскость проницаема и на ней заданы значения всех компонент скорости и температура, а также магнитное поле. На бесконечном удалении от плоскости все величины будем полагать ограниченными, считая, что часть из них (компоненты скорости) известна, а остальные определяются из решения. Закон Ома примем в виде, соответствующем слабоионизованному газу, когда анизотропия проводимости сводится к эффекту Холла. Зависимость физических свойств среды от температуры и давления будем считать известной.

Направим оси x, z вдоль плоскости, ось y — по нормали к ней, и будем считать, что все величины зависят только от y. Тогда из общих уравнений магнитной гидродинамики получим следующую систему [3]:

$$\frac{d}{dy}(\rho v) = 0, \quad \rho v \frac{dv}{dy} = -\frac{dp}{dy} + \frac{4}{3}\frac{d}{dy}\left(\eta \frac{dv}{dy}\right) + \frac{1}{c}(j_z B_x - j_x B_z) \qquad (1.1)$$

$$\rho v \frac{du}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\eta \frac{du}{dy}\right) - \frac{1}{c} j_z B_0, \qquad \rho v \frac{dw}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\eta \frac{dw}{dy}\right) + \frac{1}{c} j_x B_0 \qquad (1.2)$$

$$j_x = \frac{c}{4\pi}\frac{dB_z}{dy}, \quad j_y = 0 \quad j_z = -\frac{c}{4\pi}\frac{dB_x}{dy}, \quad \frac{dE_x}{dy} = 0, \quad \frac{dE_z}{dy} = 0 \qquad (1.3)$$

$$j_x = \sigma\left[E_x + \frac{1}{c}(vB_z - wB_0)\right] + \alpha j_z B_0$$
$$\sigma\left[E_y + \frac{1}{c}(wB_x - uB_z)\right] + \alpha(j_x B_z - j_z B_x) = 0 \qquad (1.4)$$
$$j_z = \sigma\left[E_z + \frac{1}{c}(uB_0 - vB_x)\right] - \alpha j_x B_0$$

$$F(p, \rho, T) = 0, \ \eta = \eta(p, T), k = k(p, T), \sigma = \sigma(p, T), \alpha = \frac{\omega_e \tau_e}{|B|} \equiv \alpha(p, T) \qquad (1.5)$$

$$\rho v c_v \frac{dT}{dy} = \frac{d}{dy}\left(k \frac{dT}{dy}\right) + \frac{1}{\sigma}(j_x^2 + j_z^2) +$$
$$+ \eta\left[\left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dy}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{dv}{dy}\right)^2\right] - T\frac{dv}{dy}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \quad (c_v = c_v(p, T)) \qquad (1.6)$$

Здесь α — коэффициент Холла и остальные обозначения общепринятые. Будем отмечать далее значения функций при $y=0$ и $y\to\infty$ соответственно индексами w и ∞. Из уравнений (1.1), (1.3), (1.4), получим

$$\rho v = \rho_w v_w = \rho_\infty v_\infty \tag{1.7}$$

$$E_x = -\frac{1}{c}(v_\infty B_{z\infty} - w_\infty B_0), \qquad E_z = -\frac{1}{c}(u_\infty B_0 - v_\infty B_{x\infty}) \tag{1.8}$$

Преобразуем уравнение энергии обычным способом, складывая его с уравнениями движения (1.1), (1.2), умноженными на u, v, w. Пользуясь соотношениями (1.7), (1.8) и выражениями для j_x, j_z из (1.2), найдем

$$\begin{aligned}\rho_\infty v_\infty\left[c_v(T-T_\infty)+\frac{1}{2}(\mathrm{v}^2-\mathrm{v}_\infty^2)\right] &= k\frac{dT}{dy}+\frac{\eta}{2}\frac{d\mathrm{v}^2}{dy}+\frac{2}{3}\eta\frac{dv^2}{dy}-\\ &-\frac{1}{B_0}\left\{\left[\rho_\infty v_\infty(w-w_\infty)-\eta\frac{dw}{dy}\right](v_\infty B_{z\infty}-w_\infty B_0)+\right.\\ &+\left.\left[\rho_\infty v_\infty(u-u_\infty)-\eta\frac{du}{dy}\right](v_\infty B_{x\infty}-u_\infty B_0)\right\}+\\ &+\int_y^\infty\left[v\frac{dp}{dy}+T\frac{dv}{dy}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho\right]dy\end{aligned} \tag{1.9}$$

Рассмотрим далее частный случай несжимаемой жидкости с постоянными свойствами[1]: $\eta=\mathrm{const}$, $k=\mathrm{const}$, $\sigma=\mathrm{const}$, $\alpha=\mathrm{const}$, $\rho=\mathrm{const}$, $c_v=\mathrm{const}$. Тогда система (1.1) — (1.6) может быть решена в конечном виде. Введем обозначения (1.10)

$$V^\circ = u+iw, \quad J^\circ = j_x+ij_z, \qquad E^\circ = E_x+iE_z, \quad B^\circ = B_x+iB_z$$

и перепишем исходные уравнения в виде

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{1}{8\pi}\frac{d}{dy}|B^\circ|^2, \qquad E_y = \frac{\alpha c}{8\pi\sigma}\frac{d}{dy}|B^\circ|^2 - \frac{1}{c}\,\mathrm{Im}\,(V^\circ\bar{B}^\circ) \tag{1.11}$$

$$\rho v\frac{dV^\circ}{dy} = \eta\frac{d^2V^\circ}{dy^2}+\frac{iB_0}{c}J^\circ, \qquad J^\circ = \frac{ci}{4\pi}\frac{dB^\circ}{dy}, \qquad \frac{dE^\circ}{dy}=0 \tag{1.12}$$

$$J^\circ = \sigma\left(E^\circ+\frac{iB_0}{c}V^\circ-\frac{iv}{c}B^\circ\right)-i\alpha B_0J^\circ \tag{1.13}$$

$$\rho v c_v\frac{dT}{dy} = k\frac{d^2T}{dy^2}+\frac{1}{\sigma}|J^\circ|^2+\eta\left|\frac{dV^\circ}{dy}\right|^2 \tag{1.14}$$

Согласно (1.7), здесь $v=v_w$. Следуя работе [4], получаем

$$\frac{d^2V^\circ}{dy_1^2}-(R+R_m^\circ)\frac{dV^\circ}{dy_1}+(V^\circ-V_\infty^\circ)(RR_m^\circ-M^{\circ 2})=0 \tag{1.15}$$

$$R=\frac{v\rho L}{\eta}, \quad R_m^\circ=\frac{4\pi v\sigma L}{c^2(1+i\alpha B_0)}, \quad M^{\circ 2}=\frac{\sigma B_0^2L^2}{c^2\eta(1+i\alpha B_0)}, \quad y_1=\frac{y}{L}$$

Здесь L — некоторый условно введенный размер. Очевидно, что общее решение этого уравнения есть (1.16)

$$V^\circ = V_\infty^\circ + C_1e^{\gamma_1y_1}+C_2e^{\gamma_2y_1}$$

$$\gamma_{1,2}=s_{1,2}+i\omega_{1,2}={}^1\!/_2(R+R_m^\circ)\pm{}^1\!/_2\sqrt{(R+R_m^\circ)^2-4(RR_m^\circ-M^{\circ 2})}$$

---

[1] Эта задача впервые рассматривалась И. П. Семеновой (II Всесоюзный съезд по теор. и прикл. механике, М., 1964, Анн. докл., с. 194).

Легко показать далее, что магнитное поле, ток и другие величины, с точностью до констант, определяются формулами

$$B^\circ = B_\infty{}^\circ + \frac{4\pi\eta}{B_0 L}\left[C_1 (R - \gamma_1) e^{\gamma_1 y_1} + C_2 (R - \gamma_2) e^{\gamma_2 y_1}\right]$$

$$J^\circ = -\frac{ic\eta}{B_0 L^2}\left[C_1\gamma_1 (R - \gamma_1) e^{\gamma_1 y_1} + C_2\gamma_2 (R - \gamma_2) e^{\gamma_2 y_1}\right] \qquad (1.17)$$

и соотношениями (1.11), (1.14). Постоянные C_1 и C_2 должны быть определены из условий при $y_1 = 0$ и $y_1 \to \infty$. Рассмотрим в связи с этим величины γ_1, γ_2. После несложных преобразований найдем

$$s_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \left\{\frac{a^2 - d^2 - 4b}{8} + \left[\left(\frac{a^2 - d^2 - 4b}{8}\right)^2 + \left(\frac{ad - 2\alpha B_0 b}{4}\right)^2\right]^{1/2}\right\}^{1/2} \qquad (1.18)$$

$$\omega_{1,2} = -\frac{d}{2} \pm \left\{-\frac{a^2 - d^2 - 4b}{8} + \left[\left(\frac{a^2 - d^2 - 4b}{8}\right)^2 + \left(\frac{ad - 2\alpha B_0 b}{4}\right)^2\right]^{1/2}\right\}^{1/2}$$

$$a = R + R_{me}, \quad b = RR_{me} - M_e{}^2, \quad d = \alpha B_0 R_{me}, \quad M_e = |M^\circ|, \quad R_{me} = |R_m{}^\circ|$$

Легко показать, что $s_{1,2}$ обращаются в нуль только при $b = 0$; $\omega_{1,2}$ — только при $\alpha B_0 = 0$. Знаки $s_{1,2}$ в зависимости от v, b определяются согласно таблице, приведенной слева.

v	<0		>0		$=0$
b	$\geqslant 0$	>0	$\geqslant 0$	<0	$=-M_e{}^2$
s_1	$\leqslant 0$	>0	>0		>0
s_2	<0		$\geqslant 0$	<0	<0

Этот результат не зависит от величины остальных параметров, в том числе от αB_0, и поэтому совпадает с найденным ранее для изотропно проводящей жидкости [5]. Точно так же сохраняются в силе выводы относительно выбора констант C_1, C_2 и их связи со значениями V°, B° при $y = 0$ и $y \to \infty$.

Так, при $v < 0$, $b > 0$ имеем

$$C_1 = \frac{B_0 (B_w{}^\circ - B_\infty{}^\circ) L - 4\pi\eta (V_w{}^\circ - V_\infty{}^\circ)(R - \gamma_1)}{4\pi\eta (\gamma_1 - \gamma_2)}$$

$$C_2 = \frac{4\pi\eta (V_w{}^\circ - V_\infty{}^\circ)(R - \gamma_2) - B_0 (B_w{}^\circ - B_\infty{}^\circ) L}{4\pi\eta (\gamma_1 - \gamma_2)} \qquad (1.19)$$

причем $V_w{}^\circ$, $V_\infty{}^\circ$, $B_w{}^\circ$, $B_\infty{}^\circ$ могут быть заданы произвольно. При $v < 0$, $b \leqslant 0$ или $v > 0$, $b < 0$ получим соответственно

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = V_w{}^\circ - V_\infty{}^\circ, \qquad V_w{}^\circ - V_\infty{}^\circ = \frac{B_0 L}{4\pi\eta}\frac{B_w{}^\circ - B_\infty{}^\circ}{R - \gamma_2}$$

$$C_1 = V_w{}^\circ - V_\infty{}^\circ, \qquad C_2 = 0, \qquad V_w{}^\circ - V_\infty{}^\circ = \frac{B_0 L}{4\pi\eta}\frac{B_w{}^\circ - B_\infty{}^\circ}{R - \gamma_1} \qquad (1.20)$$

т. е. только три величины могут быть заданы произвольно, и осуществимы только такие течения, когда $V_w{}^\circ - V_\infty{}^\circ$ и $B_w{}^\circ - B_\infty{}^\circ$ связаны между собой соотношениями (1.20). Наконец, при $v > 0$, $b \geqslant 0$ получаем $C_1 = C_2 = 0$ и возможно только тривиальное состояние $V^\circ = \text{const}$, $B^\circ = \text{const}$.

Таким образом, распределение $V^\circ(y)$, $B^\circ(y)$, $J^\circ(y)$ носит в общем случае немонотонный характер. Частота периодических изменений этих величин определяется формулой (1.18), и при $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ происходит сложение двух колеблющихся функций с различными периодами ω_1, ω_2. При этом, как известно, сумма может быть как периодической (с периодом, не меньшим $\max(\omega_1, \omega_2)$), так и непериодической функцией.

Из формул (1.18) видно, что для любого нетривиального решения (с двумя или одним экспоненциальным членом) за счет выбора знака внешнего поля B_0 можно получить одну из частот такую, что

$$|\omega| = \frac{|d|}{2} + \left\{ -\frac{a^2 - d^2 - 4b}{8} + \left[\left(\frac{a^2 - d^2 - 4b}{8} \right)^2 + \left(\frac{ad - 2\alpha B_0 b}{4} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}$$

Отсюда $|\omega| > |\,{}^1\!/_2\, d|$. Поэтому, если $\alpha \neq 0$ и знак B_0 выбран так, что $d > 0$ при $v < 0$, $b < 0$ и $d < 0$ при $v > 0$, $b < 0$, то за счет увеличения $|R_m|$ можно добиться сколь угодно больших значений частоты. С другой стороны, при $|\alpha B_0| \to 0$ и $|\alpha B_0| \to \infty$ имеем $\omega_{1,2} \to 0$. Поэтому за счет увеличения параметра Холла возможно только ограниченное и, по-видимому, незначительное изменение частот.

Представляет интерес сопоставление «длины волны» на профиле скорости, т. е. величины $\lambda = 2\pi / \omega$ с толщиной пограничного слоя на стенке δ. Оказывается, что возможны такие течения, когда $\lambda \ll \delta$. В самом деле, пусть, например, $C_2 \equiv 0$ в силу граничных условий ($B_w{}^\circ - B_\infty{}^\circ$ при этом связано с γ_1, γ_2), $v < 0$, $b > 0$, $B_0 > 0$ (т. е. $a < 0$, $d < 0$). Примем также для простоты

$$V_w{}^\circ = 0, \qquad V_\infty{}^\circ = u_\infty \qquad (w_\infty = 0)$$

Тогда

$$u = \operatorname{Re} V^\circ = u_\infty (1 - e^{s_1 y_1} \cos \omega_1 y_1) \tag{1.21}$$

Экстремумы $u(y)$ достигаются в точках, где $\operatorname{tg} \omega_1 y_1 = s_1 / \omega_1$. При близких к нулю значениях b декремент s_1 весьма мал, а частота $\omega_1 \approx {}^1\!/_2 (|a| + |d|)$ может быть велика за счет $|a| \gg |d|$. При этом $|s_1 / \omega_1| \ll 1$ и точки экстремума определяются приближенным соотношением

$$y_1{}^{(k)} \approx \frac{\pi k + s_1/\omega_1}{\omega_1} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Скорость в точке $y_1 = y_1{}^{(k)}$ согласно (1.21)

$$u(y^{(k)}) \approx u_\infty \left[1 - (-1)^k \cos (s_1/\omega_1) \exp \frac{s_1}{\omega_1} \left(\pi k + \frac{s_1}{\omega_1} \right) \right]$$

Пренебрегая квадратом малой величины s_1 / ω_1, получим отсюда

$$u(y^{(k)}) \approx u_\infty \left[1 - (-1)^k \cos \frac{s_1}{\omega_1} e^{\pi k s_1/\omega_1} \right]$$

Таким образом, при $s_1 / \omega_1 \ll 1 / \pi k$ скорость в k-м экстремуме далека от u_∞, и поэтому $\delta > y^{(k)} \gg y^{(2)} > \lambda$. С другой стороны, если ввести обычным образом толщину вытеснения

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_\infty} \right) dy = \frac{L s_1}{s_1{}^2 + \omega_1{}^2} \approx \frac{L s_1}{\omega_1{}^2}$$

то, очевидно, $y_1{}^{(k)} > \delta^* / L$ для всех k. Следовательно, при $\omega_1 \gg s_1$ толщина вытеснения в данном случае не характеризует толщину пограничного слоя в том смысле, что при $y > \delta^*$ значения скорости могут сильно отличаться от u_∞.

Возвращаясь к уравнению энергии (1.14), нетрудно показать, что распределение температуры всегда монотонно, поскольку

$$k\frac{dT}{dy} = e^{\rho v c_v y/k}\int\limits_y^\infty e^{-\rho v c_v y/k}\left(\frac{1}{\sigma}|J^\circ|^2 + \eta\left|\frac{dV^\circ}{dy}\right|^2\right)dy > 0$$

С увеличением параметров s и ω тепловые потоки существенно возрастают. Для рассмотренного выше частного случая, когда u определено формулой (1.21), а $w = -u_\infty e^{s_1 y_1}\sin\omega_1 y_1$, имеем из (1.17)

$$|J^\circ|^2 = \left(\frac{c\eta}{B_0 L^2}\right)^2 u_\infty^2(s_1^2+\omega_1^2)\,[(R-s_1)^2+\omega_1^2]\,e^{2s_1 y_1}$$

т. е. $|k\,dT/dy|$ растет как ω_1^4.

2. Влияние переменных свойств и сжимаемости жидкости на характер профиля скорости можно оценить приближенно, построив, например, решение системы (1.1) — (1.6) для больших значений y. Положим

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty + \mathbf{v}',\quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_\infty + \mathbf{B}',\quad \mathbf{j} = \mathbf{j}',\quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_\infty + \mathbf{E}'$$
$$p = p_\infty + p',\quad \rho = \rho_\infty + \rho',\quad T = T_\infty + T',\quad \sigma = \sigma_\infty + \sigma'$$
$$k = k_\infty + k',\quad \eta = \eta_\infty + \eta',\quad \alpha = \alpha_\infty + \alpha',\quad c_v = c_{v\infty} + c_v'$$

причем все величины с индексом ∞ постоянны. Линеаризованная система (1.1) — (1.6) после отбрасывания штрихов принимает вид

$$\rho_\infty v + \rho v_\infty = 0 \tag{2.1}$$

$$\rho_\infty v_\infty\frac{du}{dy} = \eta_\infty\frac{d^2u}{dy^2} - \frac{1}{c}j_zB_0,\qquad \rho_\infty v_\infty\frac{dw}{dy} = \eta_\infty\frac{d^2w}{dy^2} + \frac{1}{c}j_xB_0 \tag{2.2}$$

$$\rho_\infty v_\infty\frac{dv}{dy} = -\frac{dp}{dy} + \frac{4}{3}\eta_\infty\frac{d^2v}{dy^2} + \frac{1}{c}(j_zB_{x\infty} - j_xB_{z\infty}) \tag{2.3}$$

$$j_x = \frac{c}{4\pi}\frac{dB_z}{dy},\qquad j_z = -\frac{c}{4\pi}\frac{dB_x}{dy} \tag{2.4}$$

$$j_x = \frac{\sigma_\infty}{c}(vB_{z\infty} + v_\infty B_z - wB_0) + \alpha_\infty j_zB_0 \tag{2.5}$$

$$j_z = \frac{\sigma_\infty}{c}(uB_0 - v_\infty B_x - vB_{x\infty}) - \alpha_\infty j_xB_0$$

$$\sigma\left[E_y + \frac{1}{c}(wB_{x\infty} + w_\infty B_x - uB_{z\infty} - u_\infty B_z)\right] = -\alpha_\infty(j_xB_{z\infty} - j_zB_{x\infty}) \tag{2.6}$$

$$l_1p + l_2\rho + l_3T = 0,\qquad \rho_\infty v_\infty c_{v\infty}\frac{dT}{dy} = k_\infty\frac{d^2T}{dy^2} + T_\infty\frac{l_3}{l_1}\frac{dv}{dy} \tag{2.7}$$

Здесь при записи (2.1) использовано равенство (1.7). Постоянные l_1, l_2, l_3 — значения производных от F по p, ρ, T при $y\to\infty$. Заметим, что равенства (1.5) для η, k, σ, α, c_v остались неиспользованными, поскольку возмущения этих величин не входят в уравнения и не оказывают в принятом приближении влияния на асимптотику течения. Следует указать, что слабое влияние переменности свойств обнаруживается и при другом подходе к задаче. Для несжимаемой жидкости, например, при $v\equiv 0$ оказывается, что малым значениям $(d\ln\sigma\,/\,d\ln T)_\infty$ порядка ε соответствует изменение частот ω на величину высшего по ε порядка малости [1].

[1] Этот факт установлен студентами МГУ Л. Е. Пекуровским и И. М. Руткевичем.

Решения системы (2.1) — (2.7) будем искать в виде

$$u = A_u e^{\gamma y_1}, \quad v = A_v e^{\gamma y_1}, \ldots, T = A_T e^{\gamma y_1}$$

требуя, чтобы Re $\gamma < 0$. Для определения γ получим тогда уравнение

$$\left\{\Lambda_2-(\gamma-P)\left[\Lambda_1\left(\frac{4\gamma}{3}-R\right)-1\right]\right\}\left\{\frac{\alpha_\infty^2 B_0^2\gamma^2}{M^4}(R-\gamma)^2+\left[1-\frac{(R-\gamma)(R_m-\gamma)}{M^2}\right]^2\right\}=$$

$$=\Lambda_1\frac{B_\infty^2}{B_0^2}(\gamma-P)(R-\gamma)\left[1-\frac{(R-\gamma)(R_m-\gamma)}{M^2}\right] \qquad (2.8)$$

$$R=\frac{v_\infty\rho_\infty L}{\eta_\infty}, \qquad R_m=\frac{4\pi\sigma_\infty v_\infty L}{c^2}, \qquad P=\frac{v_\infty\rho_\infty c_{v\infty} L}{k_\infty}$$

$$M^2=\frac{B_0^2L^2\sigma_\infty}{c^2\eta_\infty}, \qquad \Lambda_1=\frac{l_1\eta_\infty v_\infty}{l_2\rho_\infty L}, \qquad \Lambda_2=\frac{l_3^2T_\infty v_\infty L}{l_1 l_2\rho_\infty k_\infty}$$

В случае несжимаемой жидкости ($\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$) из (2.8) найдем четыре значения γ, которые, естественно, совпадают с вычисленными в п. 1 величинами $\gamma_{1,\,2}$ и их комплексно сопряженными $\overline{\gamma}_{1,\,2}$. Влияние сжимаемости приводит к появлению двух дополнительных корней. Кроме того, вследствие сжимаемости асимптотическое поведение решения зависит от параметров потока и поля на бесконечности.

Распределение скоростей имеет периодическую структуру, причем с теми же частотами, что и в несжимаемой жидкости, при $B_\infty = 0$ или $\Lambda_1 = 0$ (плотность зависит только от температуры), а также при $M_\infty^2 \ll 1$ в случае совершенного газа, когда

$$M_\infty^2=\frac{v_\infty^2}{\varkappa(\varkappa-1)c_{v\infty}T_\infty}, \quad l_1=1, \quad l_2=-c_{v\infty}(\varkappa-1)T_\infty, \quad l_3=-c_{v\infty}(\varkappa-1)\rho_\infty$$

$$(\varkappa=c_p/c_v)$$

При $\Lambda_1 \neq 0$ и конечных значениях остальных параметров увеличение B_∞^2 / B_0^2 приводит к тому, что все шесть корней уравнения (2.8) становятся вещественными. Четыре из них при $B_\infty^2 / B_0^2 \to \infty$ стремятся к конечным значениям

$$P,\ R,\ {}^1/_2(R+R_m)\pm{}^1/_2\sqrt{(R+R_m)^2-4(RR_m-M^2)}$$

а два другие неограниченно возрастают как

$$\pm\frac{B_\infty}{B_0M^3}\sqrt{{}^4/_3(1+\alpha_\infty^2B_0^2)}$$

Таким образом, в сжимаемом потоке распределение скоростей вдали от границы может быть как периодическим, так и монотонным, причем последнее всегда достигается при надлежащем увеличении продольного магнитного поля на бесконечности.

Заметим, что исходная система уравнений (1.1) — (1.6) совпадает с уравнениями, описывающими структуру ударной волны. Если ограничиться случаем невязкого и нетеплопроводного совершенного газа, то из соотношения (2.8) в пределе получим

$$\left(\frac{\gamma}{N}\right)^2(1+\alpha_\infty^2B_0^2)+\left[2\left(1-\frac{R_m}{N}\right)+\frac{B_\infty^2M_\infty^2}{B_0^2(1-M_\infty^2)}\right]\frac{\gamma}{N}+$$

$$+\left(1-\frac{R_m}{N}\right)\left[\left(1-\frac{R_m}{N}\right)+\frac{B_\infty^2M_\infty^2}{B_0^2(1-M_\infty^2)}\right]=0 \qquad (N=M^2/R)$$

Дискриминант этого уравнения

$$D=\left[2\left(1-\frac{R_m}{N}\right)+\frac{B_\infty^2 M_\infty^2}{B_0^2(1-M_\infty^2)}\right]^2-$$
$$-4(1+\alpha_\infty^2 B_0^2)\left(1-\frac{R_m}{N}\right)\left[\left(1-\frac{R_m}{N}\right)+\frac{B_\infty^2 M_\infty^2}{B_0^2(1-M_\infty^2)}\right]$$

аналогичен выражению (23) работы [6], где исследована структура ударной волны в анизотропно проводящем газе. Условие $D<0$, необходимое и достаточное для существования периодического распределения параметров в потоке над плоскостью, совпадает, таким образом, с условием периодичности структуры. При увеличении B_∞^2 / B_0^2, как указывалось, периодичность исчезает. Это связано с изменением типа особых точек исходной нелинейной системы уравнений [6].

3. Свойства среды могут, вообще говоря, зависеть не только от температуры и давления, но и от других величин. Если, в частности, рассматривать исходные уравнения (1.1) — (1.4), (1.6) и уравнение состояния (1.5) как «одножидкостное приближение» в динамике ионизованного газа, то скалярную проводимость σ можно считать зависящей от концентрации электронов, которая определяется из дополнительных соображений. Очевидно, что и в этом случае изменение проводимости не окажет влияния на периодическую структуру профиля скорости вдали от границы. Однако, в отличие от п. 2, здесь иногда удается построить приближенное решение для всего потока.

Рассмотрим, например, движение слабоионизованного газа при низком давлении, когда можно пренебречь индуцированным магнитным полем и процессами объемной ионизации и рекомбинации. При этом концентрации заряженных частиц вблизи стенки, на которой происходит рекомбинация, регулируются амбиполярной диффузией. Принимая во внимание только столкновения нейтральных частиц с электронами и ионами и пренебрегая, как обычно, инерционными членами, можно записать следующие уравнения движения заряженных частиц [3]:

$$\nabla p_e+en_e\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)+\frac{en_e}{c}\,\mathbf{v}_e\times\mathbf{B}+\frac{m_e n_e}{\tau_e}\,\mathbf{v}_e=0$$
$$\nabla p_i-en_i\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)-\frac{en_i}{c}\,\mathbf{v}_i\times\mathbf{B}+\frac{m_i n_i}{\tau_i}\,\mathbf{v}_i=0 \qquad (3.1)$$

$$\operatorname{div}[n_e(\mathbf{v}+\mathbf{v}_e)]=0 \qquad (3.2)$$

где n_e, n_i — концентрации электронов и ионов, $\mathbf{v}_e$, $\mathbf{v}_i$ — их диффузионные скорости, p_e, p_i — давления. Согласно сказанному выше, $\mathbf{B}=\mathbf{e}_y B_0$ — внешнее магнитное поле. Будем считать, что каждая из компонент — совершенный газ. Тогда для случая равных и постоянных температур компонент (что приближенно имеет место при малых числах Маха и слабых токах) $\nabla p_e=kT\nabla n_e$, $\nabla p_i=kT\nabla n_i$. Замечая, что $n_e\approx n_i$ в силу квазинейтральности, и $v_{ey}=v_{iy}$ из-за отсутствия тока на стенку, получим из (3.1), (3.2)

$$2kT\frac{\partial n_e}{\partial y}=-n_e v_{ey}\left(\frac{m_e}{\tau_e}+\frac{m_i}{\tau_i}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial y}n_e(v+v_{ey})=0$$

Вследствие малого влияния сжимаемости на поток в целом $v=v_w=\mathrm{const}$ и из этих уравнений следует простое уравнение диффузии

$$D_a\frac{d^2 n_e}{dy^2}-v\frac{dn_e}{dy}=0 \qquad \left(D_a=\frac{2kT\tau_e\tau_i}{m_e\tau_i+m_i\tau_e}\approx\frac{2kT\tau_i}{m_i}\right) \qquad (3.3)$$

Решение этого уравнения с учетом условий

$$n_e=0 \quad \text{при } y=0, \qquad n_e=n_\infty \quad \text{при } y\to\infty$$

существует для $v < 0$ (отсос на границе) и имеет вид

$$n_e = n_\infty (1 - e^{Sy_1}) \qquad \left(S = \frac{vL}{D_a}\right)$$

причем безразмерная координата y_1 определена так же, как в п. 1, 2. Принимая во внимание формулу $\sigma = n_e e^2 \tau_e / m_e$, получаем отсюда

$$\sigma = \sigma_\infty (1 - e^{Sy_1}) \tag{3.4}$$

Обратимся теперь к уравнениям (1.12), (1.13), где нужно пренебречь членами vB° по сравнению с $V^\circ B_0$. В этом случае вместо (1.15) получим для V° уравнение

$$\frac{d^2V^\circ}{dy_1^2} - R\frac{dV^\circ}{dy_1} - M^{\circ 2}(1 - e^{Sy_1})(V^\circ - V_\infty^\circ) = 0 \tag{3.5}$$

Параметр $M^{\circ 2}$ включает в себя σ_∞ вместо σ. Решение уравнения (3.5), удовлетворяющее условиям

$$V^\circ(0) = V_w, \qquad V^\circ(\infty) = V_\infty^\circ$$

записывается при помощи цилиндрических функций в виде (3.6)

$$V^\circ = V_\infty^\circ + (V_w^\circ - V_\infty^\circ)\, e^{1/2 Ry_1} \frac{J_\nu(\xi e^{1/2 Sy_1})}{J_\nu(\xi)}, \qquad \xi = -\frac{2M^\circ}{S}, \qquad \nu = -\frac{1}{S}\sqrt{R^2 + S^2\xi^2}$$

Легко видеть, что выражения (3.6) при $S \to -\infty$ и (1.16) при $R_m^\circ \to 0$ совпадают. В другом предельном случае, когда $|S| \ll 1$, решение вблизи стенки ведет себя монотонно, а при $y_1 \gg |S|^{-1}$ снова становится колебательным. Таким образом, увеличение коэффициента диффузии D_a влечет за собой удаление первых экстремумов u, w от границы и соответственно — уменьшение максимальных амплитуд колебаний на профиле скорости, однако немонотонность распределения u, w сохраняется для любых конечных D_a и $S \neq 0$.

4. Немонотонные распределения скоростей возникают также и при более сложных течениях. В некоторых случаях, когда задачу удается свести к обыкновенным дифференциальным уравнениям, доказательство немонотонности легко получается из рассмотрения асимптотического поведения решения вдали от границы. Примером может служить задача о вращении плоскости в несжимаемой жидкости при наличии внешнего однородного магнитного поля, параллельного оси вращения.

Пусть плоскость $z = 0$ вращается с угловой скоростью $\Omega = \text{const}$ и все параметры зависят только от r, z. Введем подстановку Кармана

$$u_r = rf(z), \quad u_\theta = rg(z), \quad u_z = h(z), \quad B_r = rF(z), \quad B_\theta = rG(z), \quad B_z = H(z) \tag{4.1}$$

$$p + {}^1/_8\pi^{-1}\mathbf{B}^2 = {}^1/_2 p_0 r^2 + P(z), \quad p_0 = \text{const}$$

Из общих уравнений магнитной гидродинамики получим уравнения движения в виде

$$\rho(f^2 + hf' - g^2) = -p_0 + \eta f'' + \frac{1}{4\pi}(F^2 + HF' - G^2) \tag{4.2}$$

$$\rho(2fg + hg') = \eta g'' + \frac{1}{4\pi}(2FG + HG') \tag{4.3}$$

$$\rho hh' = -P' + \eta h'' + \frac{1}{4\pi}HH' \tag{4.4}$$

Из закона Ома и уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j}/c$ найдем

$$-rG' = \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{4\pi\sigma}{c}\varphi + \frac{\alpha\mathbf{B}^2}{2}\right) + \frac{4\pi\sigma}{c^2}r(gH - hG) - \alpha r(F^2 + HF' - G^2)$$

$$rF' = \frac{4\pi\sigma}{c^2}r(hF - fH) - \alpha r(2FG + HG') \tag{4.5}$$

$$2G = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{4\pi\sigma}{c}\varphi + \frac{\alpha\mathbf{B}^2}{2}\right) + \frac{4\pi\sigma}{c^2}r^2(fG - gF) - \alpha HH'$$

Здесь φ — электрический потенциал,

$$\mathbf{B}^2 = r^2 (F^2 + G^2) + H^2.$$

Положим

$$\Phi = \frac{\alpha \mathbf{B}^2}{2} - \frac{4\pi\sigma}{c}\varphi = \Phi_0(z) + \Phi_1(z)\frac{r^2}{2}$$

Тогда из (4.5) следует

$$2G = \Phi_0' - \alpha H H' \tag{4.6}$$

$$-G' = \Phi_1 + \frac{4\pi\sigma}{c^2}(gH - hG) - \alpha(F^2 + HF' - G^2) \tag{4.7}$$

$$F' = \frac{4\pi\sigma}{c^2}(hF - fH) - \alpha(2FG + HG') \tag{4.8}$$

$$\frac{1}{2}\Phi_1' + \frac{4\pi\sigma}{c^2}(fG - gF) = 0 \tag{4.9}$$

Кроме того, уравнения $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ показывают, что

$$f = -{}^1/_2\, h', \quad F = -{}^1/_2\, H' \tag{4.10}$$

Уравнения (4.4) и (4.6) служат для вычисления P и Φ_0. Функции f, g, h, F, G, H, Φ_1 определяются из системы (4.2), (4.3), (4.7) — (4.10), которая после исключения f, F, Φ_1 принимает вид

$$\begin{gathered}
\rho\left(\frac{h'^2}{4} - \frac{hh''}{2} - g^2\right) = -p_0 - \frac{\eta}{2}h''' + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{H'^2}{4} - \frac{HH''}{2} - G^2\right) \\
\rho(hg' - gh') = \eta g'' + \frac{1}{4\pi}(HG' - GH') \\
-G'' = \frac{1}{\nu_m}(g'H - hG') - \alpha\left(\frac{H'^2}{4} - \frac{HH''}{2} - G^2\right)' \\
-\frac{H''}{2} = \frac{1}{2\nu_m}(h'H - hH') - \alpha(HG' - GH') \qquad (\nu_m = c^2/4\pi\sigma)
\end{gathered} \tag{4.11}$$

Исследование нелинейных уравнений (4.11) будем проводить так же, как и в п. 2, отыскивая экспоненциальные решения соответствующих линеаризованных уравнений. Полагая $h = h_\infty + A_h e^{\gamma z}$, $H = H_\infty + A_H e^{\gamma z}, \ldots$ и т. д., получим для γ уравнение

$$\begin{gathered}
\gamma^2\left[\left(\gamma - \frac{h_\infty}{\nu_m} + 2\alpha G_\infty\right)\left(\gamma - \frac{h_\infty}{\nu}\right) - \frac{H_\infty^2}{4\pi\eta\nu_m}\right]^2 + \gamma^4\alpha^2 H_\infty^2\left(\gamma - \frac{h_\infty}{\nu}\right)^2 + \\
+ 4\left[\left(\gamma - \frac{h_\infty}{\nu_m} + 2\alpha G_\infty\right)\frac{g_\infty}{\nu} + \frac{H_\infty G_\infty}{4\pi\eta\nu_m}\right]^2 + \frac{4g_\infty\gamma^2}{\nu^2}\alpha H_\infty^2\left(\alpha g_\infty + \frac{H_\infty^2}{4\pi\rho\nu_m}\right) + \\
+ \gamma^2\left(\gamma - \frac{h_\infty}{\nu}\right)\frac{\alpha G_\infty H_\infty^2}{\pi\eta\nu_m} = 0
\end{gathered} \tag{4.12}$$

При $\alpha = 0$, $G_\infty = g_\infty = 0$ отсюда получаем два ненулевых вещественных значения γ, соответствующие монотонным изменениям скорости [7].

Если $\alpha \neq 0$, а $G_\infty = g_\infty = 0$, то уравнение для γ принимает вид

$$\left[\left(\gamma - \frac{h_\infty}{\nu_m}\right)\left(\gamma - \frac{h}{\nu}\right) - \frac{H_\infty^2}{4\pi\eta\nu_m}\right]^2 + \gamma^2\alpha^2 H_\infty^2\left(\gamma - \frac{h_\infty}{\nu}\right)^2 = 0$$

и дает четыре комплексных значения γ, которые с точностью до обозначений совпадают с $\gamma_{1,2}$, $\bar{\gamma}_{1,2}$, найденными в п. 1 для задачи о поступательном течении несжимаемой жидкости над проницаемой плоскостью. Таким образом, если азимутальные компоненты скорости и поля на бесконечности отсутствуют, то геометрия задачи не влияет на асимптотические свойства решения. При нарушении одного из равенств $G_\infty = 0$, $g_\infty = 0$, например в случае $H_\infty = 0$, $g_\infty \neq 0$, из (4.12) следует

$$\gamma_{1,2} = h_\infty / \nu_m - 2\alpha G_\infty, \qquad \gamma_{3-6} = h_\infty / 2\nu \pm \sqrt{(h_\infty/2\nu)^2 \pm 2ig_\infty / \nu} \quad (4.13)$$

Четыре последних корня не зависят от α, ν_m, G_∞ и при всех $g_\infty \neq 0$ являются комплексными.

При $\alpha = 0$, $\rho g_\infty h_\infty = - H_\infty^2 G_\infty / 4\pi$ отличные от нуля корни (4.12)

$$\gamma_{1-4} = \frac{h_\infty}{2}\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu_m}\right) \pm \left[\frac{h_\infty^2}{4}\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu_m}\right)^2 \pm \frac{2ig_\infty}{\nu} - \frac{\rho h_\infty^2 - H_\infty^2/4\pi}{\eta\nu_m}\right]^{1/2} \quad (4.14)$$

также комплексные при $g_\infty \neq 0$.

Таким образом, в отличие от задач п. 1—3, периодическая структура потока над вращающимся диском может создаваться не только за счет анизотропии проводимости, но и при вращении непроводящей жидкости на бесконечности. Этот вывод справедлив, разумеется, в предположении что система (4.1) имеет решение с $g_\infty \neq 0$. Существование таких решений требует особого доказательства. Периодические распределения скоростей при вращении непроводящей и слабопроводящей ($\alpha = 0$, $R_m \ll 1$) жидкости над неподвижной плоскостью были обнаружены соответственно в работах [8, 9], где построены решения уравнений пограничного слоя.

Поступила 9 VIII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Fay J. A. Plasma boundary layers. «Magnetohydrodynamics», Evanston, Northwestern Univ. Press, 1962, p. 337.
2. Сахновский Э. Г. Учет анизотропии проводимости в магнитогидродинамической задаче Рэлея. Ж. техн. физ., 1963, т. 33, вып. 5. стр. 631—635.
3. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
4. Семенова И. П. Стационарное течение анизотропно-проводящей жидкости между параллельными пористыми стенками. ПМТФ, 1964, № 4, стр. 118—121.
5. Регирер С. А. Течение вязкой проводящей жидкости в областях с проницаемыми границами в присутствии магнитного поля. Сб. «Вопросы магнитной гидродинамики», т. 2, Рига, 1962, Изд-во АН ЛатвССР, стр. 107—112.
6. Любимов Г. А. Структура магнитогидродинамической ударной волны в газе с анизотропной проводимостью. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2, стр. 179—186.
7. Сычев В. В. О движении вязкой электропроводной жидкости под действием вращающегося диска в присутствии магнитного поля. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5, стр. 906—915.
8. Bödewadt U. T. Die Drehströmung über festem Grunde. Z. angew. Math. und Phys., 1940, B. 20, H. 3.
9. King W. S., Lewellen W. S. Boundary-layer similarity solutions for rotating flows with and without magnetic interaction. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 10.