Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОРОДНЫХ СОСТОЯНИЙ

А. Г. Куликовский

(Москва)

Последнее время много работ посвящается нахождению критериев устойчивости систем слабо зависящих от пространственных переменных (см. [1] и обзорные работы [2,3]). Рассматриваемые в этих работах системы устроены таким образом, что неустойчивость фактически наблюдается в конечной области пространства, а в качестве граничных условий выставляется требование затухания решений на бесконечности. Найденные критерии устойчивости имеют вид условия квантования, которое в случае двух переменных x, t может быть записано в виде [1]

$$\int [k_i(\omega, x) - k_j(\omega, x)]\, dx = \pi n \tag{1}$$

и служит для определения ω. Решения, которые соответствуют найденным таким образом значениям ω, называются квазиклассическими. Здесь k_i и k_j корни дисперсионного уравнения (в котором x рассматривается в качестве параметра), n — целое число, а интегрирование ведется в комплексной плоскости x между точками ветвления x_1 и x_2 многозначной аналитической функции $K(\omega, x)$, в которых $k_i = k_j$. Однако, как показано в работе [4], где детально исследовано одно уравнение второго порядка, выполнение условия (1) не всегда означает наличие собственной функции, затухающей на бесконечности. В работе [4] найдены условия, необходимые для того, чтобы из выполнения уравнения (1) следовало существование собственной функции. Эти условия связаны с топологической структурой линий Стокса на комплексной плоскости x, и часто даже в случае уравнения второго порядка проверить выполнение этих условий очень сложно.

Ниже рассматриваются системы, зависящие от двух переменных x и t. При этом предполагается, что состояние, которое исследуется на устойчивость, однородно и не зависит от времени, а точки $x = \pm L$, в которых выставляются граничные условия, раздвинуты достаточно далеко одна от другой (рассматривается асимптотический вид условия устойчивости при $L \to \infty$). Исследование этого более простого, чем в [1-4], случая может быть проведено для произвольных систем. Ниже показано, что при достаточно большом L, вообще говоря, существуют два типа нетривиальных решений краевой задачи: решения «односторонние», для которых комплексная частота ω определяется граничными условиями на одном из концов, и решения «глобальные», для которых ω не зависит от конкретного вида граничных условий. Глобальные решения аналогичны квазиклассическим, найденным для слабонеоднородного случая, но с вполне определенными i и j в равенстве (1).

Показано, что для глобальной неустойчивости (т. е. для существования глобальных решений с $\operatorname{Im}\omega > 0$) необходимо, но не достаточно, существование таких ω, с $\operatorname{Im}\omega > 0$, что $\operatorname{Im} k(\omega) = 0$, хотя бы для одной ветви многозначной функции $k(\omega)$. Рассмотрена связь глобальной неустойчивости с абсолютной неустойчивостью безграничной задачи.

Для изучения устойчивости однородного не зависящего от времени состояния необходимо рассмотреть линеаризованную систему уравнений. Будем считать, что это система уравнений в частных производных (возможность перенесения результатов на другие случаи будет обсуждаться ниже), коэффициенты которых в рассматриваемом случае постоянны. Запишем эту систему в виде

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u_j = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

где P_{ij} — полиномы относительно $\partial / \partial t$ и $\partial / \partial x$, а $u_j(t, x)$ — неизвестные функции. Граничные условия (однородные) запишем в виде (3)

$$\sum_{j=1}^{n}\left[B_{\alpha j}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u_j(t, x)\right]_{x=-L} = 0, \qquad \sum_{j=1}^{n}\left[B_{\beta j}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u_j(t, x)\right]_{x=L} = 0$$

где $B_{\alpha j}$ и $B_{\beta j}$ — полиномы относительно $\partial / \partial t$ и $\partial / \partial x$.

Будем предполагать, что для системы (2) выполняется условие И. Г. Петровского [5], т. е. что дисперсионное уравнение

$$|P_{ij}(-i\omega, ik)| = 0 \tag{4}$$

(которое получается из требования равенства нулю определителя системы (2), когда решение ищется в виде $\exp i(kx - \omega t)$) таково, что для всех действительных k значения ω, удовлетворяющие уравнению (4), подчиняются неравенству $\operatorname{Im}\omega < M$, т. е. скорость роста синусоидальных возмущений ограничена. Это условие выполняется для всех разумно поставленных задач.

Будем считать, что граничные условия (3) независимы от уравнений и между собой, т. е. ни одно из них не выполняется в силу уравнений и остальных граничных условий (не удовлетворяется тождественно на множестве решений уравнений (2), подчиненных остальным граничным условиям). Волну вида $\exp i[k_m(\omega)x - \omega t]$, задаваемую ветвью $k_m(\omega)$, будем называть идущей в некотором направлении, если при $\operatorname{Im}\omega > M$ она убывает при изменении x в этом направлении. Таким образом, если при $\operatorname{Im}\omega > M$ выполняется неравенство $\operatorname{Im} k_i > 0$, то i-я волна называется идущей вправо, и если $\operatorname{Im} k_j < 0$, то j-я волна называется идущей влево. Тогда условие корректности рассматриваемой краевой задачи, полученное в работе [6], может быть сформулировано следующим образом. Число граничных условий на каждом из концов отрезка равно числу уходящих от него волн, так чтобы существовало M_1 такое, что для ω с $\operatorname{Im}\omega > \max(M, M_1)$ амплитуды уходящих волн однозначно определялись бы амплитудами падающих волн. В силу условия И. Г. Петровского при $\operatorname{Im}\omega > M$ уравнение (4) не имеет действительных корней k, поэтому любая волна распространяется либо вправо, либо влево. При этом общее число граничных условий (3) должно быть равно общему числу волн, которое обозначим через N. Обозначим число волн, идущих вправо, через s, тогда в равенствах (3) имеем $\alpha = 1, \ldots, s$, $\beta = s + 1, \ldots, N$.

Будем разыскивать собственные функции задачи (2), (3). Выбирая некоторое ω, общее решение уравнений (2) запишем в виде

$$u_j(t, x) = v_j(\omega, x)\, e^{-i\omega t}, \qquad v_j(\omega, x) = \sum_{l=1}^{N} C_l w_{jl}(\omega)\, e^{ik_l(\omega)x} \tag{5}$$

где C_l — произвольные постоянные. Подставив эти выражения в граничные условия (3), получим

$$\sum_{l=1}^{N} C_l a_{\alpha l}(\omega)\, e^{-ik_l(\omega)L} = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, s)$$

$$\sum_{l=1}^{N} C_l a_{\beta l}(\omega)\, e^{ik_l(\omega)L} = 0 \qquad (\beta = s+1, \ldots, N) \tag{6}$$

Здесь

$$a_{\alpha l}(\omega) = \sum_{j=1}^{n} B_{\alpha j}\,[-i\omega,\, ik_l(\omega)]\, w_{jl}(\omega), \qquad a_{\beta l}(\omega) = \sum_{j=1}^{n} B_{\beta j}\,[-i\omega,\, ik_l(\omega)]\, w_{jl}(\omega)$$

Для существования собственной функции необходимо обращение в нуль определителя системы (6), служащей для нахождения постоянных C_l.

Рассмотрим асимптотическое поведение корней ω этого определителя при $L \to \infty$. Для каждого ω, не лежащего на какой-либо из кривых $\operatorname{Im}\,[k_i(\omega) - k_j(\omega)] = 0$, пронумеруем $k_i(\omega)$ в порядке убывания их мнимых частей

$$\operatorname{Im} k_1 > \operatorname{Im} k_2 > \cdots \operatorname{Im} k_N \tag{7}$$

При $L \to \infty$ в определителе системы (6) главный член содержит наибольший экспоненциальный множитель

$$E = \exp i \Big[\sum_{l=1}^{s} k_l(\omega) - \sum_{l=s+1}^{N} k_l(\omega)\Big] L \tag{8}$$

умноженный на произведение определителей двух миноров матрицы $A = \|a_{ij}\|$. Один из них A_s имеет порядок s и занимает левый верхний угол матрицы A, другой A_{N-s} имеет порядок $N - s$ и занимает правый нижний угол матрицы A. Член следующего порядка малости имеет по отношению к первому порядок $\exp i\,[-2\,(k_s - k_{s+1})]\,L$, а коэффициент при экспоненте является произведением определителей точно также расположенных миноров A_s' и A_{N-s}' матрицы, получаемой из A перестановкой s-го и $s+1$-го столбцов. Таким образом, сохраняя два главных члена в определителе системы (6), имеем

$$D = |A_s|\,|A_{N-s}| + |A_s'|\,|A_{N-s}'| \exp\{-2i\,[k_s(\omega) - k_{s+1}(\omega)]L\} \tag{9}$$

Здесь через D обозначен определитель системы (6), деленный на E.

Если $\operatorname{Im}(k_s - k_{s+1}) \neq 0$, то равенство нулю определителя D означает, что

$$|A_s|\,|A_{N-s}| = 0 \tag{10}$$

Если краевая задача корректна, то уравнение (9) не удовлетворяется тождественно по ω, так как его тождественное выполнение означало бы, что, в частности, при ω с $\operatorname{Im}\omega > \max(M, M_1)$ амплитуды уходящих от границ волн не могут быть однозначно определены. Учет следующего члена в равенстве (9) может дать только незначительные поправки к ω, найденному из (10). Равенство (10) означает, что при $L \to \infty$ система уравнений (6) распадается на две независимые подсистемы, коэффициенты каждой из которых зависят от граничных условий только на одном из концов. Если равен нулю только один из определителей в равенстве (10), то отличны от нуля только те C_l, которые соответствуют волнам быстрее всего затухающим при удалении от того конца, граничные условия на котором входят в этот определитель. Если равны нулю оба определителя одновременно, то возникают два решения, связанные с граничными условиями на разных концах и независимые одно от другого.

Решения, связанные с обращением в нуль определителей $|A_s|$ и $|A_{N-s}|$ естественно назвать односторонними. Возможность существования односторонних решений, не зависящих от граничных условий на другом конце, может быть объяснена физически тем, что при $\mathrm{Im}\,(k_s - k_{s+1}) \neq 0$ амплитуды волн, отраженных от другого конца, стремятся к нулю при $L \to \infty$ в окрестности рассматриваемого конца.

Наряду с рассмотренным возможен еще случай, когда оба члена в правой части равенства (9) имеют одинаковый порядок и в сумме дают нуль. Это возможно, если в пределе при $L \to \infty$ выполняется равенство

$$\mathrm{Im}[k_s(\omega) - k_{s+1}(\omega)] = 0 \tag{11}$$

Здесь и в дальнейшем рассматривается общий случай, когда произведение $|A_s'|\,|A_{N-s}'|$ не равно нулю тождественно по ω. Этого всегда можно добиться, слегка изменив граничные условия. Так как число s граничных условий при $x = -L$ равно числу волн, идущих вправо, то при $\mathrm{Im}\,\omega > M$ выполняются неравенства $\mathrm{Im}\,k_s(\omega) > 0$, $\mathrm{Im}\,k_{s+1}(\omega) < 0$, так что волна, соответствующая $k_s(\omega)$, идет вправо, а волна, соответствующая $k_{s+1}(\omega)$ — влево. Если уравнение (11) выполняется при каком-либо значении ω, то

$$k_s(\omega) - k_{s+1}(\omega) \neq \mathrm{const} \tag{12}$$

так как при $\mathrm{Im}\omega > M$ уравнение (11) заведомо не выполняется. При этом равенство (11) представляет уравнение некоторой кривой на плоскости ω, так как уравнение (11) не может выполняться ни для какой двумерной части плоскости ω. Действительно, в силу аналитичности функций $k_s(\omega)$ и $k_{s+1}(\omega)$ это означало бы тождественное выполнение равенства (11) при всех ω, что невозможно в силу (12). Если для некоторого ω_0 выполнено уравнение (11), то при достаточно большом L в окрестности этого значения можно найти $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, обращающее в нуль правую часть равенства (9). В самом деле можно считать, что в точке ω_0 не равны нулю величины $|A_s'|\,|A'_{N-s}|$ и $\frac{\partial}{\partial\omega}[k_s - k_{s+1}]$. Если бы это было не так, то всегда можно найти другую сколь угодно близкую точку, где эти условия выполнены. Тогда, пользуясь тем, что L велико и пренебрегая членами порядка $\Delta\omega$ по сравнению с $L\Delta\omega$, получим из условия обращения в нуль правой части равенства (9) уравнение для $\Delta\omega$ (13)

$$\exp\left\{-2iL\Delta\omega\frac{\partial}{\partial\omega}\left[k_s(\omega) - k_{s+1}(\omega)\right]\right\} = -\frac{|A_s|\,|A_{N-s}|}{|A_s'|\,|A_{N-s}'|}\exp\left[2i\left(k_s - k_{s+1}\right)\right]$$

которое имеет множество решений, расположенных около кривой (11) в окрестности точки ω_0. Учет членов следующего порядка малости, не написанных в правой части (9), приведет к несущественным поправкам в значении ω.

Таким образом (11), наряду с (10), можно рассматривать как предельную форму уравнения, служащего для определения собственных значений ω. Так как для получения собственных функций, соответствующих собственным значениям (11), в определителе системы (6) нужно оставить не только миноры, соответствующие минорам A_s и A_{N-s} матрицы A, но и соседние с ними столбцы, то механизм образования собственной функции можно представить себе следующим образом.

При некоторой частоте ω на конце $x = -L$ возбуждаются волны, соответствующие $k_1, \ldots, k_s$. Когда эти волны приходят к концу $x = L$, то одна из них, а именно s-я имеет при больших L амплитуду, значительно превосходящую амплитуду других волн, которые поэтому можно не учитывать при нахождении амплитуд волн, отраженных от $x = L$ и соответствующих $k_{s+1}, \ldots, k_N$. Когда эти волны приходят к точке $x = -L$, то при нахождении амплитуд волн, отраженных от этого конца, по аналогичным причинам можно пренебречь всеми падающими волнами, кроме $(s+1)$-й. Для того чтобы существовала собственная функция, необходимо, чтобы в результате отражения $(s+1)$-й волны в точке $x = -L$ образовывалась s-я волна с амплитудой, которая была взята первоначально. Уравнение (11) и выражает приближенно это условие.

Легко понять физический смысл требования, что $|A_s'|\,|A_{N-s}'| \neq 0$. Он сводится к тому, что в точке $x = L$ при отражении s-й волны образуется $(s+1)$-я волна с ненулевой амплитудой, а в точке $x = -L$ при отражении $(s+1)$-й волны образуется s-я волна с ненулевой амплитудой. Так как рассматриваемые решения связаны с прохождением соответствующих волн через весь отрезок $[-L, L]$, будем называть их глобальными (в отличие от ранее рассмотренных односторонних). Вид уравнения (11) показывает, что критерии устойчивости, основанные на этом уравнении, связаны с существом рассматриваемой системы, а не с конкретным видом граничных условий. Сравнивая это уравнение с (1), можно заключить, что глобальные решения являются аналогом квазиклассических. Отметим только, что в равенстве (11) берутся вполне определенные ветви функции $k(\omega)$.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости в связи с уравнением (11). Для неустойчивости достаточно, чтобы хотя бы часть кривой, задаваемой уравнением (11), на плоскости ω лежала в верхней полуплоскости. В противном случае глобальной неустойчивости нет. Можно показать, что при наличии глобальной неустойчивости найдутся значения ω такие, что

$$\operatorname{Im}\omega > 0, \quad \operatorname{Im} k(\omega) = 0 \tag{14}$$

хотя бы для одной ветви $k(\omega)$, т. е. будет выполнено условие, которое часто рассматривается в качестве условия неустойчивости безграничных систем (см., например, [7]).

Рассмотрим ω с большими значениями $\operatorname{Im}\omega$. При этом корни $k_j(\omega)$ распадаются на две группы — верхнюю $k_1, \ldots, k_s$ с $\operatorname{Im}\omega > 0$ и нижнюю $k_{s+1}, \ldots, k_N$ с $\operatorname{Im}\omega < 0$. Если уменьшать $\operatorname{Im}\omega$, то в случае глобальной неустойчивости для некоторого $\operatorname{Im}\omega = \beta > 0$ найдется точка ω_*, для которой будут выполнены соотношения (II). Поскольку k_s и k_{s+1} первоначально лежали по разные стороны от действительной оси k, то либо один из них должен был при $\operatorname{Im}\omega > \beta$ пересечь действительную ось, либо $\operatorname{Im} k_s = \operatorname{Im} k_{s+1} = 0$ при $\omega = \omega_*$. Таким образом из выполнения (II) при $\operatorname{Im}\omega > 0$ следует (14). Очевидно, что обратное утверждение, вообще говоря, не верно. Такой случай, например, имел место в задаче, рассмотренной в работе [8], где обнаружено отличие критерия устойчивости, полученного для некоторой конкретной системы путем точного удовлетворения граничным условиям краевой задачи при $L \to \infty$, от критерия вытекающего из (14).

Существует важный класс задач, когда выполнение соотношений (14) позволяет сделать заключение о наличии глобальной неустойчивости. Это задачи, связанные с уравнениями, инвариантными относительно замены x на $-x$. В этом случае каждому ω наряду с k соответствует $-k$. При этом из (14) следует выполнение уравнения (11) для того же ω, что и в (14).

Выясним теперь связь глобальной неустойчивости с абсолютной неустойчивостью (безграничной задачи), которая связана с существованием точек ветвления функции $k(\omega)$ в верхней полуплоскости ω, причем для одной из совпадающих в этой точке ветвей должны выполняться условия (14). Очевидно, что если среди совпадающих в точке ветвления ветвей есть ветви, принадлежащие разным группам (k_1, .., k_s и $k_{s+1}, \ldots, k_N$), то уравнения (11) выполнены и имеется неустойчивость.

Развитые выше соображения можно применять не только к системам, связанным с дифференциальными уравнениями в частных производных с двумя независимыми переменными, но и к системам, в которых каждому ω соответствует бесконечное число значений $k_i(\omega)$. Классическим примером такой задачи является задача об устойчивости течения вязкой несжимаемой жидкости в трубе постоянного сечения [7], где зависимость $k(\omega)$ определяется из условия существования нетривиального решения краевой задачи для уравнения Орра-Зоммерфельда. Как и в случае рассмотренном выше, при достаточно больших $\operatorname{Im}\omega$ корни $k(\omega)$ распадаются на две группы — верхнюю с $\operatorname{Im} k > 0$ и нижнюю с $\operatorname{Im} k < 0$. Если при уменьшении $\operatorname{Im}\omega$ до нуля эти две группы остаются разделенными полосой, параллельной действительной оси k, то этого достаточно для отсутствия глобальной неустойчивости. Если же такой полосы не существует, то может найтись ω, для которой выполняется соотношение (11), причем под $k_s(\omega)$ нужно понимать корень из верхней группы с наименьшим $\operatorname{Im} k(\omega)$, а под $k_{s+1}(\omega)$ — корень из нижней группы с наибольшим $\operatorname{Im} k(\omega)$. При этом возникнет глобальная неустойчивость.

Все заключения работы можно применять также к исследованию устойчивости неоднородных по x состояний, когда неоднородность заключена в узких по сравнению с L зонах, например в окрестности концов отрезка. При этом граничные условия на концах отрезка вместе с прилегающими к ним областями неоднородности порождают некоторые эффективные граничные условия, которые можно выставить в точках, лежащих в основной области, где невозмущенное состояние однородно, и которые связывают амплитуды падающих из основной области волн с амплитудами волн, отраженных обратно в основную область.

Автор искренне благодарит С. В. Иорданского за обсуждение затронутых в работе вопросов.

Поступила 16 X 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Силин В. П. Колебания слабонеоднородной плазмы. Ж. эксперим. и техн. физ., 1963, т. 44, N 4, стр. 1271.
2. Галеев А. А., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. Теория устойчивости неоднородной плазмы и аномальная диффузия. Атомная энергия, 1963, т. 15, № 6, стр. 451.
3. Рухадзе А. А., Силин В. П. Метод геометрической оптики в электродинамике неоднородной плазмы. Успехи физ. наук, 1964, т. 82, № 3, стр. 499.
4. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. Об асимптотике собственных значений для несамосопряженных краевых задач. Ж. вычисл. матем. и математ. физ., 1964, т. 4, № 2, стр. 267.
5. Петровский И. Г. О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций. Бюлл. Моск. ун-та, Секция А, Математика и механика, 1938, т. 1, вып. 7, стр. 16.
6. Hersch R. Boundary Conditions for equations of evolution. Arch. Rat. Mech. and Anal. 1964, vol. 16, No 4, p. 243.
7. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд. иностр. лит., 1958.
8. Мовчан А. А. Об устойчивости панели, движущейся в газе. ПММ, 1957, т. 21, вып. 2.