Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

О СИММЕТРИЧНОМ ДАВЛЕНИИ КРУГЛОГО ШТАМПА НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО ПРИ НАЛИЧИИ СЦЕПЛЕНИЯ

Б. Л. Абрамян, Н. Х. Арутюнян, А. А. Баблоян

(Ереван)

Задача о симметричном давлении плоского круглого штампа на упругое полупространство при наличии сцепления между штампом и основанием рассматривалась в работе В. И. Моссаковского [1]. Пользуясь методом интегральных преобразований, В. И. Моссаковский сводит решение задачи к смешанной плоской задаче теории потенциала для двух аналитических функций, которую затем решает, сведя ее к одной задаче линейного сопряжения.

Более общая задача о вдавливании жесткого, круглого в плане штампа в упругое полупространство при наличии сцепления рассматривалась в работе Я. С. Уфлянда [2,3]. Задача здесь была решена в тороидальных координатах при помощи интегрального преобразования Мелера — Фока.

В настоящей работе для простоты рассматривается осесимметричная задача о давлении жесткого, круглого в плане штампа на упругое полупространство при наличии сцепления. Задача решается в цилиндрической системе координат. Бигармоническая функция напряжений А. Лява ищется в виде интеграла Ханкеля. Определение произвольных функций интегрирования сведено к системе из двух «парных» интегральных уравнений, содержащих бесселевые функции первого рода.

Решение этой системы применением преобразования Фурье сведено к краевой задаче Привалова и выражено при помощи квадратур. Решение задачи о контакте круглого штампа со сцеплением без осевой симметрии может быть получено аналогичным способом.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о симметричном давлении круглого штампа на упругое полупространство $r \geqslant 0$ при наличии сцепления между штампом и основанием. Полагаем, что на круговой области под штампом заданы нормальные и касательные перемещения. Остальную часть поверхности полупространства для простоты полагаем свободной от внешних усилий.

Для решения задачи пользуемся цилиндрической системой координат. Граничные условия задачи будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned}\sigma_z(r,0)&=0\\ \tau_{rz}(r,0)&=0\end{aligned}\right\}\quad (r>a),\qquad \left.\begin{aligned}u_r(r,0)&=f_1(r)\\ u_z(r,0)&=f_2(r)\end{aligned}\right\}\quad (r<a) \tag{1.1}$$

Здесь $f_1(r)$ и $f_2(r)$ — гладкие функции, определяющие форму поверхности штампа и характер контакта.

Кроме условий (1.1), пользуемся также условиями осесимметричности

$$u_r(0,z)=0,\quad \tau_{rz}(0,z)=0 \qquad (0\leqslant z<\infty) \tag{1.2}$$

Предполагаем также, что в бесконечно удаленных от штампа точках полупространства отсутствуют напряжения и перемещения.

Бигармоническую функцию А. Лява для этой задачи берем в виде интеграла Ханкеля

$$\varphi(r, z) = \int_0^\infty \lambda \left[A(\lambda) + zB(\lambda)\right] e^{-\lambda z} J_0(\lambda r)\, d\lambda \tag{1.3}$$

Здесь $J_i(x)$ — функция Бесселя действительного аргумента первого рода; а функции $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ подлежат определению из граничных условий.

Пользуясь обычными формулами, выражающими напряжения и перемещения через функцию $\varphi(r, z)$, будем иметь

$$\sigma_z(r, z) = \int_0^\infty \left[(1-2\nu) B + \lambda A + \lambda z B\right] \lambda^3 e^{-\lambda z} J_0(\lambda r)\, d\lambda$$

$$\tau_{rz}(r, z) = \int_0^\infty (\lambda A - 2\nu B + \lambda z B) \lambda^3 e^{-\lambda z} J_1(\lambda r)\, d\lambda$$

$$u_z(r, z) = -\frac{1}{2\mu}\int_0^\infty \left[2(1-2\nu) B + \lambda A + \lambda z B\right] \lambda^2 e^{-\lambda z} J_0(\lambda r)\, d\lambda \tag{1.4}$$

$$u_r(r, z) = -\frac{1}{2\mu}\int_0^\infty (\lambda A - B + \lambda z B) \lambda^2 e^{-\lambda z} J_1(\lambda r)\, d\lambda$$

где μ — модуль сдвига, а ν — коэффициент Пуассона.

Выражения (1.4) тождественно удовлетворяют условиям (1.2).

Удовлетворив условиям (1.1), для определения неизвестных функции $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ получим систему из двух «парных» интегральных уравнений

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \lambda (A^* + B^*) J_0(\lambda r)\, d\lambda = 0 \qquad (r > a) \\ &\int_0^\infty (A^* + B^*) J_0(\lambda r)\, d\lambda = F_1(r) \qquad (r < a) \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \lambda (A^* - \alpha B^*) J_1(\lambda r)\, d\lambda = 0 \qquad (r > a) \\ &\int_0^\infty (A^* - \alpha B^*) J_1(\lambda r)\, d\lambda = F_2(r) \qquad (r < a) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь использованы обозначения

$$(1-2\nu)\lambda^2 B(\lambda) = B^*(\lambda), \qquad \lambda^3 A(\lambda) = A^*(\lambda), \qquad \alpha = \frac{2\nu}{1-2\nu} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} F_1(r) &= -2\mu f_1(r) - \int_0^\infty B^*(\lambda) J_0(\lambda r)\, d\lambda \\ F_2(r) &= -2\mu f_2(r) + \int_0^\infty B^*(\lambda) J_1(\lambda r)\, d\lambda \end{aligned} \tag{1.8}$$

§ 2. Решение системы «парных» интегральных уравнений (1.5) и (1.6). Парные интегральные уравнения вида (1.5) и (1.6) исследованы в работах Е. Титчмарша [4], И. Снеддона [5, 6], Н. И. Ахиезера [7], Б. Нобля [8], Дж. Бурлака [9] и других.

Решение этих уравнений можно представить в виде

$$A^*(\lambda) + B^*(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^a \cos\lambda t\,dt\,\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{rF_1(r)\,dr}{(t^2-r^2)^{1/2}} \tag{2.1}$$

$$A^*(\lambda) - \alpha B^*(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^a \sin\lambda t\,dt\,\frac{d}{dt}\left[t\int_0^t \frac{F_2(r)\,dr}{(t^2-r^2)^{1/2}}\right] \tag{2.2}$$

Вычтя из первого равенства второе, получим (2.3)

$$(1+\alpha)B^*(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^a \cos\lambda t\,dt\,\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{rF_1(r)\,dr}{(t^2-r^2)^{1/2}} - \frac{2}{\pi}\int_0^a \sin\lambda t\,dt\,\frac{d}{dt}\left[t\int_0^t \frac{F_2(r)\,dr}{(t^2-r^2)^{1/2}}\right]$$

Подставив сюда выражения (1.8), будем иметь

$$B^*(\lambda) = -\frac{4\mu(1-2\nu)}{\pi}\left\{\int_0^a \cos\lambda t\,dt\,\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{rf_1(r)\,dr}{(t^2-r^2)^{1/2}} - \right. \tag{2.4}$$

$$\left. - \int_0^a \sin\lambda t\,dt\,\frac{d}{dt}\left[t\int_0^t \frac{f_2(r)\,dr}{(t^2-r^2)^{1/2}}\right]\right\} -$$

$$-\frac{2(1-2\nu)}{\pi}\left\{\int_0^a \cos\lambda t\,dt\,\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{r\,dr}{(t^2-r^2)^{1/2}}\int_0^\infty B^*(\lambda)J_0(\lambda r)\,d\lambda + \right.$$

$$\left. + \int_0^a \sin\lambda t\,dt\,\frac{d}{dt}\left[t\int_0^t \frac{dr}{(t^2-r^2)^{1/2}}\int_0^\infty B^*(\lambda)J_1(\lambda r)\,d\lambda\right]\right\}$$

Здесь использовано также значение $1+\alpha = (1-2\nu)^{-1}$.

Меняя порядок интегрирования в интегралах второго слагаемого в правой части выражения (2.4) и пользуясь значениями

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{rJ_0(\xi r)\,dr}{(t^2-r^2)^{1/2}} = \cos\xi t, \qquad \frac{d}{dt}\left[t\int_0^t \frac{J_1(\xi r)\,dr}{(t^2-r^2)^{1/2}}\right] = \sin\xi t \tag{2.5}$$

из (2.4) для определения $B^*(\lambda)$ получим интегральное уравнение

$$B^*(\lambda) = \int_0^\infty K(\lambda-\xi)B^*(\xi)\,d\xi + \varphi(\lambda) \tag{2.6}$$

Здесь

$$K(\lambda-\xi) = M\,\frac{\sin a(\lambda-\xi)}{\lambda-\xi}, \qquad M = -\frac{2(1-2\nu)}{\pi} \tag{2.7}$$

$$\varphi(\lambda) = -\frac{4\mu(1-2\nu)}{\pi}\left\{\int_0^a \cos\lambda t\,dt\,\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{rf_1(r)\,dr}{(t^2-r^2)^{1/2}} - \right. \tag{2.8}$$

$$\left. - \int_0^a \sin\lambda t\,dt\,\frac{d}{dt}\left[t\int_0^t \frac{f_2(r)\,dr}{(t^2-r^2)^{1/2}}\right]\right\}$$

Решением уравнений вида (2.6) занимались Е. Титчмарш [4], И. М. Рапопорт [10], Ф. Д. Гахов [11] и другие. Случай системы таких уравнений рассматривался в работе М. Г. Крейна и И. Ц. Гохберга [12]. В их работах рассмотренное интегральное уравнение сведено к задаче Привалова. При решении уравнения (2.6) будем пользоваться результатами И. М. Рапопорта.

Так как ядро интегрального уравнения (2.7) — четная функция, то преобразование фурье-ядра (2.7) будет действительной функцией, вследствие чего индекс интегрального уравнения (2.6) $n = 0$. При этом интегральное уравнение имеет в классе L^2 единственное решение при любой правой части $\varphi(\lambda) \in L^2$.

Условимся считать $B^*(\lambda) = \varphi(\lambda) = 0$ при $-\infty < \lambda < 0$ и введем обозначения

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B^*(\lambda) e^{ix\lambda} d\lambda, \qquad G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) e^{ix\lambda} d\lambda \quad (2.9)$$

Тогда из решения соответствующей задачи Привалова нетрудно получить для функции $F(x)$ выражение

$$F(x) = G(x)[1 - \chi(x)] + \frac{1 - \sqrt{3-4\nu}}{2\pi i W(x)} \left| \frac{x-a}{x+a} \right|^{i\alpha} \int_{-a}^{a} \frac{G(t)}{t-x} \left(\frac{a+t}{a-t} \right)^{i\alpha} dt \quad (2.10)$$

где

$$\chi(x) = \begin{cases} \gamma & |x| < a, \\ 0 & |x| > a, \end{cases} \qquad W(x) = \begin{cases} 3-4\nu, & |x| < a \\ 1 & |x| > a \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\beta}{2\pi}, \qquad \beta = \ln(3-4\nu), \qquad \gamma = \frac{5-8\nu-\sqrt{3-4\nu}}{2(3-4\nu)} \quad (2.11)$$

а интеграл в формуле (2.10) берется в смысле главного значения по Коши.

Пользуясь теперь обратным преобразованием Фурье, из (2.9) — (2.11) для неизвестной функции $B^*(x)$ получим

$$B^*(x) = \varphi(x) - \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} G(t) e^{-ixt} dt + \frac{1-\sqrt{3-4\nu}}{2\pi i \sqrt{2\pi}} \left[\frac{\pi i}{\sqrt{3-4\nu}} \int_{-a}^{a} G(t) e^{-ixt} dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\sqrt{3-4\nu}}{3-4\nu} \int_{-a}^{a} G(y) \left(\frac{a+y}{a-y} \right)^{i\alpha} dy \int_{-a}^{a} \left(\frac{a-t}{a+t} \right)^{i\alpha} \frac{e^{-ixt}}{t-y} dt \right]$$

Это выражение можно привести к виду

$$B^*(x) = \varphi(x) - \frac{4-6\nu-\sqrt{3-4\nu}}{\pi(3-4\nu)} \int_0^{\infty} \frac{\sin a(x-y)}{x-y} \varphi(y) dy +$$

$$+ \frac{2(1-\nu)-\sqrt{3-4\nu}}{2\pi^2(3-4\nu)} \int_0^{\infty} F(x, y) \varphi(y) dy \quad (2.12)$$

где введено обозначение

$$F(x, y) = -i \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \left[\frac{(a+z)(a-t)}{(a-z)(a+t)} \right]^{i\alpha} \frac{e^{i(yz-xt)}}{t-z} dz\, dt =$$

$$= \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \sin \left[\frac{\beta}{2\pi} \ln \frac{(a-z)(a-t)}{(a+z)(a+t)} - (tx+yz) \right] \frac{dz\, dt}{t+z} \quad (2.13)$$

Здесь также в правой части интегралы берутся в смысле главного значения.

В частном случае, когда $\nu = 0.5$ или же $a = 0$, из (2.12) получаем

$$B^*(x) = \varphi(x)$$

Если же $a \to \infty$, то в силу формул [4]

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a(x-y)}{x-y} \varphi(y)\, dy = \varphi(x), \qquad \lim_{a\to\infty} F(x, y) = 2\pi^2 \delta(y-x)$$

из (2.12) получается

$$B^*(x) = \frac{\varphi(x)}{3-4\nu}$$

Неизвестная функция $A^*(\lambda)$ определяется из уравнения (2.1) при помощи (2.12). И, наконец, функции $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ определяются соотношениями (1.7).

Пользуясь найденными значениями для $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$, можно при помощи квадратур определить напряжения, возникающие под штампом.

Система из двух парных уравнений вида (1.5) и (1.6) рассматривалась также в недавней работе Г. Шефера [13]. Однако при исследовании этой системы автор допустил некоторые неточности и свел решение к системе из двух интегро-дифференциальных уравнений, решение которой не дается.

Поступила 12 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Моссаковский В. И. Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2, стр. 187—196.
2. Уфлянд Я. С. Контактная задача теории упругости для кругового в плане штампа при наличии сцепления. ПММ, 1956, т. 20, вып. 5, стр. 578—587.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд-во АН СССР, 1963.
4. Титчмарш Е. Введение в теорию интеграла Фурье. Изд. иностр. лит., 1948.
5. Снеддон И. Преобразование Фурье. Изд. иностр. лит., 1955.
6. Lowengrub M., Sneddon I. N. The solution of a pair of dual integral equations. Proc. Glasgow Math. Assoc., 1963, vol. 6, p. 14—18.
7. Ахиезер Н. И. К теории спаренных интегральных уравнений. Зап. матем. отд. физ-мат. факультета Харьк. мат. об-ва, 1957, т. 25, сер. 4, стр. 5—31.
8. Noble B. Certain dual integral equations. J. Math. and Phys., 1958, vol. 37, No. 2, p. 128—136.
9. Burlak J. On the solution of certain dual integral equations. Proc. Glasgow Math. Assoc., 1963, vol. 6, p. 39—44.
10. Рапопорт И. М. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений. Докл. АН СССР, 1948, т. 59, № 8, стр. 1403—1406.
11. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.
12. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов. Успехи матем. наук, 1958, т. 13, № 2 (80), стр. 3—72.
13. Szefer G. On the Solution of Certain System of Dual Iintegral Equations and its Application in the Theory of Elasticity. Bull. Acad. polon. Sci. Ser. Sci. techn., 1965. Vol. 13, No. 2, p. 79—87.