Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

# НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ НАДЕЖНОСТИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

**В. В. Токарев**

(Москва)

Формулируется задача оптимального управления с учетом надежности системы регулирования (под надежностью понимается вероятность бесперебойной работы).

В первой части (п.п. 1—3) рассматривается случай заданной надежности. Учитывается влияние режима работы системы на вероятность отказа. Дается формулировка вариационной проблемы для случая нестационарного пуассоновского потока отказов. Проводится исследование сформулированной проблемы (методом Л. С. Понтрягина) в приложении к задаче о доставке максимального полезного груза при движении тела переменной массы с ограниченной мощностью реактивной струи (п. 2) и ограниченной скоростью истечения (п. 3). Получены аналитические решения модельных задач для случая ограниченной мощности (п. 2).

Во второй части (п.п. 4, 5) рассматривается задача определения оптимальной вероятности безотказной работы реактивного двигателя. В качестве критерия оптимальности используются осредненные характеристики (математические ожидания): максимум полезного груза (п. 4) или минимум стоимости выполнения маневра (п. 5). Такая постановка относится к случаю, когда маневр нужно совершать многократно. Даны примеры решения для двигателя ограниченной мощности. Проведено сравнение весового критерия и критерия стоимости (п. 5).

**1. Формулировка вариационной проблемы.** В процессе реализации оптимальной программы управления на систему регулирования могут действовать случайные факторы, вызывающие отказы системы. Вероятность отказов может зависеть от времени, фазовых координат, управляющих параметров и управляющих функций. В таких случаях задачу о построении оптимальной программы управления нужно решать, привлекая требование заданной надежности. При этом может существенно измениться характер оптимального управления.

В работе автора [1] рассматривалась одна из задач оптимального управления с учетом случайных процессов повреждения системы. Однако там не фигурировало в явном виде требование заданной надежности — минимизировались осредненные определенным образом [1] характеристики. Кроме того, вероятность повреждения считалась не зависящей явно от управляющих функций.

В работе [3] исследована задача с заданным временем действия управления. Если считать известной зависимость вероятности безотказной работы от продолжительности работы, то заданное время работы можно трактовать и как заданную надежность. При этом, однако, нельзя учесть влияние на вероятность отказа переменных по времени величин: фазовых координат и управляющих функций.

---

[1] В [1] дан нестрогий, с точки зрения теории вероятности, вывод формул для осредненных моментов повреждений. Автор благодарен Р. В. Студневу, отметившему этот недостаток. В обзоре [2] он устранен, при этом вид формул не изменился.

Здесь задача ставится следующим образом. Пусть имеется динамическая система, поведение которой описывается уравнениями вида:

$$x_i^{\cdot} = f_i(t, x_j, u_k, w_l) \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, r;\ l = 1, \ldots, q) \qquad (1.1)$$

где $x_i$ — фазовые координаты системы, $u_k$ — управляющие функции, $w_l$ — постоянные управляющие параметры, точка обозначает дифференцирование по времени $t$.

Заданы граничные условия относительно $x_i$ в фиксированные начальный ($t = 0$) и конечный ($t = T$) моменты времени. Нужно обеспечить максимальное (минимальное) значение контрольного функционала задачи $x_0(T)$. Эту вариационную задачу назовем исходной.

Динамическая система (1.1) в отношении повреждений рассматривается как одно целое — повреждение одного элемента вызывает прекращение работы всей системы. Считается, что при отказе системы в любой момент времени задача не выполняется. После отказа система не восстанавливается. Требуется построить такую программу управления и выбрать такие значения параметров, чтобы наряду с удовлетворением всех условий, перечисленных выше, была обеспечена заданная вероятность безотказной работы системы (заданная надежность).

Предполагается, что повреждения образуют ординарный поток без последействия [4]. Ординарность потока означает, что вероятность одновременного появления двух или большего числа отказов равна нулю. Смысл условия отсутствия последействия состоит в том, что вероятность повреждения за некоторый отрезок времени определяется длиной этого отрезка и не зависит от предыдущих отказов.

Считается заданным среднее число отказов $\lambda$ в единицу времени (интенсивность потока)

$$\lambda = \lambda(t, x_j, u_k, w_l) \geqslant 0 \qquad (1.2)$$

в зависимости от времени, фазовых координат, управляющих функций и управляющих параметров.

Тогда вероятность $R$ отсутствия отказов на интервале [0, T] равна [4]

$$R = \exp\left(-\int_0^T \lambda\, dt\right) \qquad (1.3)$$

где $\lambda$ вычисляется вдоль траектории $\lambda = \lambda(t, x_j(t), u_k(t), w_l)$.

Соотношение (1.3) есть условие заданной надежности $0 < R < 1$. Его надо присоединить к уравнениям исходной вариационной задачи. Если используется классический подход, то это удобно сделать в виде условия изопериметричности

$$\int_0^T \lambda(t, x_j, u_k, w_l)\, dt = -\ln R \qquad (1.4)$$

Если применять принцип максимума, то (1.3) нужно записать в виде дифференциального уравнения с граничными условиями

$$\Lambda^{\cdot} = \lambda(t, x_j, u_k, w_l), \qquad \Lambda(0) = 0, \qquad \Lambda(T) = -\ln R \qquad (1.5)$$

Переменная $\Lambda$ будет фигурировать в качестве дополнительной фазовой координаты системы (1.1). Значение $\Lambda_1 = \Lambda(T)$ назовем условно допустимым средним числом отказов за все время движения. Если задать надежность $R = 1$, то $\Lambda_1 = 0$, что невыполнимо. При уменьшении надежности допустимое число отказов возрастает (так, например, изменению $R$ в диапазоне [1,0.5] отвечает изменение $\Lambda_1$ в диапазоне [0, 0.7]).

Обозначим через $x_j^*(t)$, $u_k^*(t)$, $w_l^*$ решение исходной вариационной задачи. Если на этом решении окажется

$$\Lambda_1^* = \int_0^T \lambda(t, x_j^*, u_k^*, w_l^*)\, dt \leqslant -\ln R \tag{1.6}$$

то надежность $R$ будет заведомо обеспечена, и вводить условие (1.3) не нужно. Тем более этого не нужно делать при $T\lambda_{\max} \leqslant -\ln R$.

Считая, что условие (1.6) не выполняется, выпишем систему уравнений задачи оптимального управления с заданной надежностью ((1.1) + (1.5))

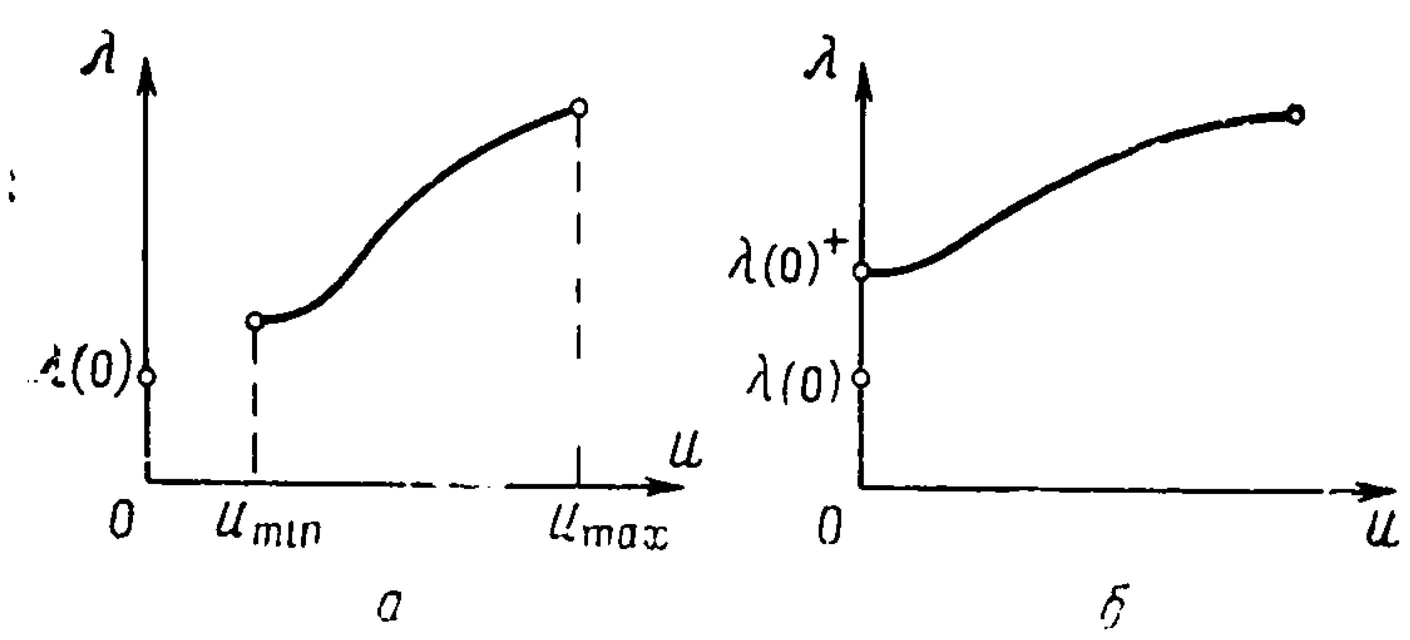
$$\begin{aligned} &x_i^{\cdot} = f_i(t, x_j, u_k, w_l), \quad x_i(0) = x_{i0}, \quad x_i(T) = x_{i1}, \\ &\Lambda^{\cdot} = \lambda(t, x_j, u_k, w_l), \quad \Lambda(0) = 0, \quad \Lambda(T) = -\ln R, \end{aligned} \qquad x_0(T) = \max(\min) \tag{1.7}$$

В такой записи — это обычная вариационная задача Майера. Сделаем два замечания по обобщению (1.7).

1°. Пусть интенсивность потока отказов $\lambda$ зависит еще и от времени работы системы $t_\mu$ ($t_\mu \leqslant t$, ср. (1.2)). Тогда, следуя [3], нужно присоединить к (1.7) дифференциальное уравнение с граничными условиями[1]

$$t_\mu^{\cdot} = \delta, \qquad t_\mu(0) = 0, \qquad t_\mu(T) = \mathrm{opt}$$

где $\delta(t) = 1$ или $0$ — релейная управляющая функция, равная единице, когда система включена, и нулю, когда система выключена. Функцию $\delta(t)$ надо присоединить множителем к управлениям $u$ в (1.7), принимающим нулевые значения при выключении системы.




Фиг. 1

2°. Пусть управление $u$ может принимать значения из диапазона $[u_{\min}, u_{\max}]$ и обращаться в нуль (при выключении). Интенсивность потока отказов равна соответственно $\lambda(u)$ и $\lambda(0)$ (см. фиг. 1, *а*). Чтобы представить в этом случае правую часть последнего уравнения (1.7) как функцию, не меняющую своего вида, можно снова воспользоваться релейным управлением $\delta(t)$:

$$\Lambda^{\cdot} = \lambda(0) + [\lambda(u) - \lambda(0)]\,\delta$$

При этом в остальных уравнениях нужно заменить $u$ на $u\delta$. Этим же приемом можно воспользоваться, когда интенсивность потока отказов при выключенной системе $\lambda(0)$ не равна пределу интенсивности $\lambda(0)^+$ при $u \to 0$ (см. фиг. 1, *б*).

Описанная постановка применяется ниже к задаче о доставке максимального полезного груза при движении тела переменной массы в гравитационном поле (см. [2]). Рассматриваются два случая: ограниченная мощность реактивной струи и ограниченная скорость истечения.

---

[1] Конечное значение $t_\mu(T)$, в отличие от основной задачи [3], не задано и должно выбираться из соображений оптимальности траектории.

**2. Ограниченная мощность реактивной струи.** Для оптимальных (без учета надежности) режимов работы двигательной системы ограниченной мощности характерно максимальное использование мощности на активных участках. Кроме того, если двигательная система — идеально регулируемая (тяга и скорость истечения не ограничены), то оптимальная траектория не содержит пассивных участков (см. обзор [2]).

Зададим теперь вероятность (1.3) успешного выполнения маневра. Интенсивность потока отказов (1.2) будем считать зависящей от режима работы источника мощности

$$\lambda = \lambda(t, N) \qquad (\partial\lambda/\partial N \geqslant 0,\ 0 \leqslant N(t) \leqslant 1) \tag{2.1}$$

где $N$ — мощность, отнесенная к максимальной.

Ограничимся рассмотрением случая идеально регулируемой двигательной системы. Тогда задача о доставке максимального полезного груза, как и прежде, разделяется на весовую и динамическую части; вид решения весовой части задачи сохраняется, например, для одноступенчатого варианта

$$G_\pi = (1 - \sqrt{\Phi})^2, \qquad G_\nu = \sqrt{\Phi} - \Phi, \qquad G_\mu = \sqrt{\Phi} \tag{2.2}$$

Здесь $G_\pi$, $G_\nu$, $G_\mu$ — веса полезной нагрузки, источника мощности и запаса рабочего вещества, отнесенные к начальному весу тела; под $\Phi$ надо понимать

$$\Phi = \frac{\alpha}{2g}\int_0^T \frac{a^2}{N}\,dt \qquad \left(J = \int_0^T \frac{a^2}{N}\,dt\right) \tag{2.3}$$

($\alpha$ — удельный вес источника мощности, $g$ — земное ускорение, $a$ — реактивное ускорение — тяга, деленная на текущую массу).

Динамическая часть задачи сводится к минимизации интеграла $J$ в (2.3). Без учета надежности можно до решения динамической задачи делать вывод об оптимальности $N(t) \equiv 1$, поскольку $N$ не входит в уравнение движения $\mathbf{r}^{\cdot\cdot} = a\mathbf{i} + \mathbf{g}$ ($\mathbf{r}$ — радиус-вектор, $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$ — вектор гравитационного ускорения, $\mathbf{i}$ — единичный вектор направления тяги). Сейчас этого сделать нельзя, так как к уравнению движения добавляется уравнение (1.5) для допустимого числа отказов, где $\lambda$ определяется соотношением (2.1). При увеличении мощности $N$ уменьшается расход рабочего вещества (см. интеграл в (2.3)) для той же самой программы реактивного ускорения $a(t)$. Вместе с этим растет интенсивность потока отказов (2.1), поэтому можно ожидать получение оптимальной программы $N(t)$, отличной от $N(t) \equiv 1$.

Уравнения (1.7) вариационной проблемы о построении оптимальной траектории при заданной вероятности $R$ выполнения маневра складываются из уравнения, описывающего изменение интеграла (2.3), уравнений движения и уравнения для допустимого числа отказов с соответствующими граничными условиями

$$\begin{array}{lll}
J^{\cdot} = a^2 / N, & J(0) = 0, & J(T) = \min \\
\mathbf{r}^{\cdot} = \mathbf{v}, & \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, & \mathbf{r}(T) = \mathbf{r}_1 \\
\mathbf{v}^{\cdot} = a\mathbf{i} + \mathbf{g}, & \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0, & \mathbf{v}(T) = \mathbf{v}_1 \\
\Lambda^{\cdot} = \lambda(t, N), & \Lambda(0) = 0, & \Lambda(T) = -\ln R
\end{array} \tag{2.4}$$

$$(0 \leqslant a(t) < \infty,\ 0 \leqslant N(t) \leqslant 1,\ |\mathbf{i}(t)| \equiv 1)$$

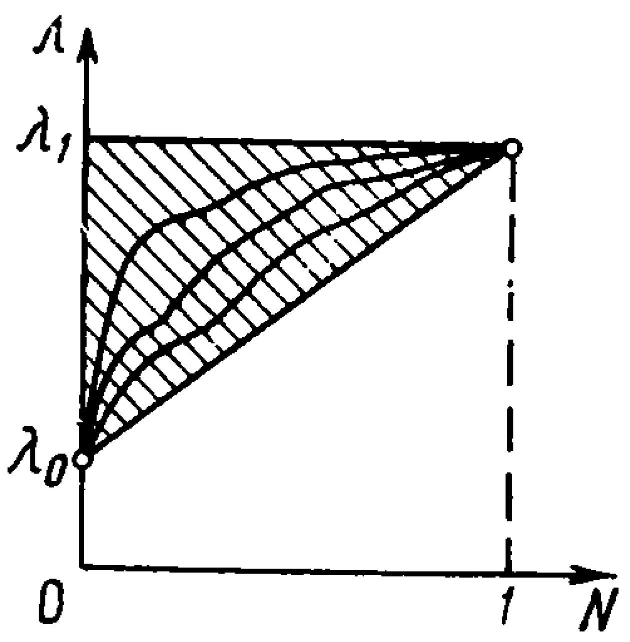
Оптимальные законы изменения реактивного ускорения $a\ (t)$, мощности $N(t)$ и направления вектора тяги $\mathbf{i}\ (t)$, согласно принципу максимума, должны обеспечивать в каждый момент времени абсолютный максимум функции $H$ (ищется минимум $J\ (T)$)

$$H = -a^2 / N + a\,(\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{i}) + \lambda\,(t, N)p_\lambda + (\mathbf{p}_r \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{g}) \tag{2.5}$$

где импульсы $\mathbf{p}_r$, $\mathbf{p}_v$, $p_\lambda$ удовлетворяют уравнениям

$$\mathbf{p}_r^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{g}), \quad \mathbf{p}_v^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} = -\mathbf{p}_r, \quad p_\lambda^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial \Lambda} = 0 \tag{2.6}$$

Импульс, соответствующий фазовой координате $J$, положен тождественно равным минус единице, так как ищется минимум $J\ (T)$ и $J$ не входит в правые части уравнений $(\partial H / \partial J = 0)$.




Фиг. 2

Максимум $H$ по $\mathbf{i}$ и $a$ достигается при

$$\mathbf{i} = \mathbf{p}_v / p_v, \qquad a = {}^1/_2 p_v N \qquad (p_v = |\mathbf{p}_v|) \tag{2.7}$$

После этого часть функции $H$, зависящая от $N$, принимает вид

$$H_N = {}^1/_4 p_v^2 N + \lambda\,(t, N)p_\lambda \tag{2.8}$$

Из рассмотрения (2.8) можно сделать вывод относительно знака импульса $p_\lambda = \text{const}$ (см. (2.6)). Предположим, что $p_\lambda \geqslant 0$, тогда максимум $H$ имеет место при $N = 1$ (так как по (2.1) $\partial\lambda / \partial N \geqslant 0$). Значит, оптимальная траектория получится такой же, как и без учета надежности. При формулировке общей задачи (1.7) предполагалось, что условие (1.6) не выполняется, и заданная надежность $R$ на такой траектории не может быть обеспечена. Следовательно,

$$p_\lambda < 0 \tag{2.9}$$

Отметим два свойства оптимальных с учетом надежности траекторий, следующие из условия максимума (2.8) по $N$.

1°. Для всех функций $\lambda\ (t, N)$ из (2.1), удовлетворяющих условиям

$$\lambda\,(t, N) \geqslant \lambda_0 + (\lambda_1 - \lambda_0)N, \qquad \lambda\,(t, 0) = \lambda_0\,(t), \qquad \lambda\,(t, 1) = \lambda_1\,(t) \tag{2.10}$$

(см. заштрихованную область на фиг. 2) управление $N\ (t)$ граничное, оптимальные траектории и значения функционала $J\ (T)$ одинаковы.

В самом деле, если подставить линейную функцию $\lambda(N)$ из неравенства (2.10) в (2.8), то полученная функция $H_N$

$$H_{N\,\mathrm{maj}} = \lambda_0 p_\lambda + [{}^1/_4 p_v^2 + (\lambda_1 - \lambda_0)p_\lambda]N$$

в силу (2.9) будет мажорирующей для всех $H_N$ с $\lambda\ (t, N)$, удовлетворяющими (2.10)

$$H_N\,(N) \leqslant H_{N\,\mathrm{maj}}\,(N), \qquad H_N\,(0) = H_{N\,\mathrm{maj}}\,(0), \qquad H_N\,(1) = H_{N\,\mathrm{maj}}\,(1)$$

Следовательно, и $\max H_N \leqslant \max H_{N\,\mathrm{maj}}$, но $H_{N\,\mathrm{maj}}$ — линейная функция $N$ и ее максимум достигается в граничных точках

$$N = 1 \ \text{ при } p_v^2 > -4\,(\lambda_1 - \lambda_0)\,p_\lambda, \qquad N = 0 \ \text{ при } p_v^2 < -4\,(\lambda_1 - \lambda_0)\,p_\lambda \tag{2.11}$$

В этих точках функции $H_N$ и $H_{N\,\mathrm{maj}}$ совпадают, поэтому максимум $H_N$ для всех $\lambda$ из (2.10) будет иметь место в этих же точках. Таким образом, оптимальное управление $N(t)$ оказывается граничным (2.11), и промежуточные значения $\lambda$ не будут фигурировать в задаче. В точках $N=1$ и $N=0$ все $\lambda(t, N)$ из (2.10) принимают одинаковые значения $\lambda_1(t)$ и $\lambda_0(t)$. Значит, оптимальные траектории и величины функционалов $J(T)$ будут одни и те же.

2°. Если $\partial\lambda / \partial N = 0$ при $N=0$, то оптимальная траектория не содержит пассивных участков. В этом случае частная производная (2.8) по $N$

$$\partial H_N / \partial N = {}^1/_4 p_v^2 + p_\lambda \partial\lambda / \partial N$$

в точке $N=0$ всегда положительна (кроме изолированных моментов времени, когда $p_v = 0$). Следовательно, оптимальное значение $N$, которое должно обеспечивать максимум (2.8), всегда больше нуля, т. е. пассивные участки отсутствуют.

Рассмотрим теперь частный вид зависимости (2.1)

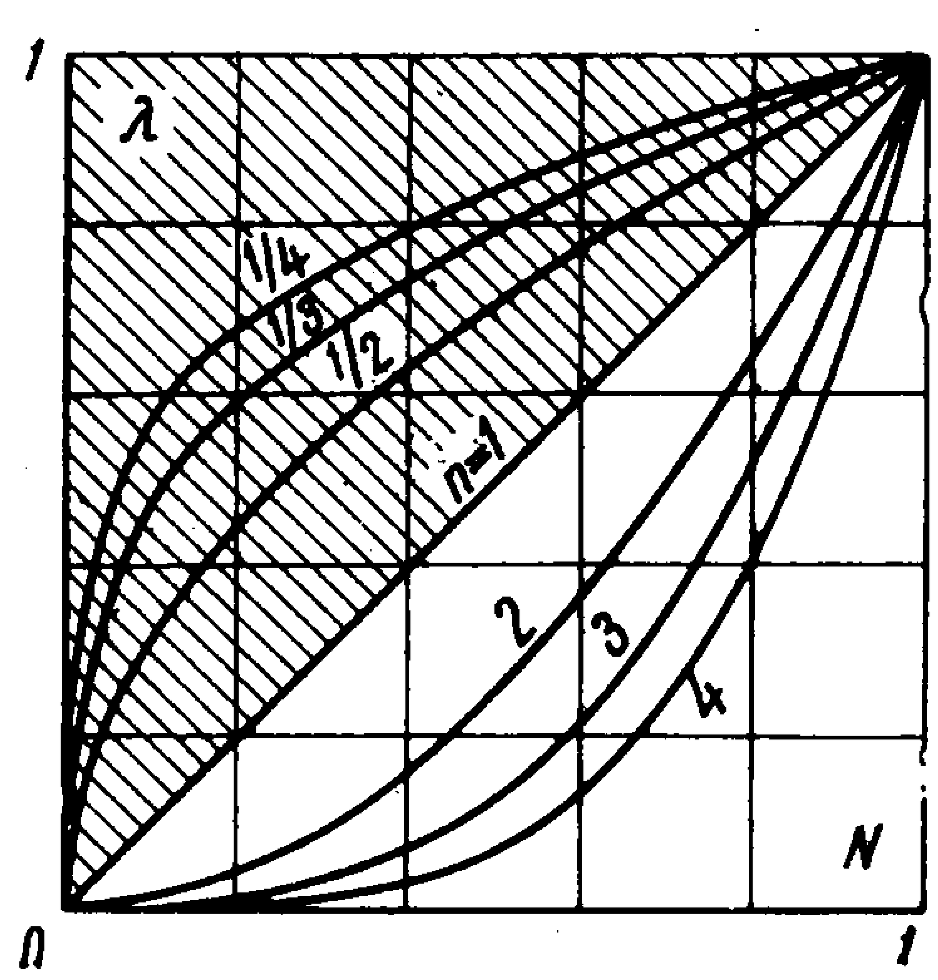
$$\lambda = \lambda(N) = \lambda_{\max} N^n \qquad (\lambda_{\max} = \mathrm{const},\ n > 0) \tag{2.12}$$

(см. фиг. 3). Для всех $0 < n \leqslant 1$ (заштрихованная область на фиг. 3) оптимальное управление $N(t)$ определяется (2.11), где $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_{\max}$, и справедливо свойство 1°. Для $n > 1$ имеет место свойство 2°, а оптимальное управление $N(t)$ таково:

$$N = 1 \ \text{при}\ p_v^2 \geqslant -4np_\lambda\lambda_{\max}, \quad N = \left(-\frac{p_v^2}{4np_\lambda\lambda_{\max}}\right)^{1/(n-1)} \ \text{при}\ p_v^2 \leqslant -4np_\lambda\lambda_{\max} \tag{2.13}$$

т. е. здесь появляются участки с переменной мощностью, меньшей максимальной.

Все полученные выше результаты не зависят от типа динамического маневра (т. е. от $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$). Чтобы решить вариационную задачу (2.4) до конца, зададим простейшие маневры — одномерные движения в бессиловом поле ($\mathbf{g} = 0$): перемещение между двумя точками покоя и набор заданной скорости.



Фиг. 3

При отсутствии гравитационных сил уравнения (2.6), как известно, просто интегрируются

$$p_r = \mathrm{const}, \qquad p_v = p_{v0} - p_r t \tag{2.14}$$

Для задачи о перемещении между двумя точками покоя граничные условия следующие:

$$r(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad r(T) = l, \quad v(T) = 0$$

Эта задача симметрична относительно $t = {}^1/_2 T$ (с точностью до перемены направления тяги на обратное), поэтому можно ограничиться рассмотрением первой половины движения $(0 \leqslant t \leqslant {}^1/_2 T)$, записав граничные условия в виде

$$r(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad r({}^1/_2 T) = {}^1/_2 l, \quad v\cdot({}^1/_2 T) = 0$$

и удвоив полученное значение функционала: $J(T) = 2J({}^1/_2 T)$.

Поскольку $v\cdot({}^1/_2 T) = 0$, то $p_v({}^1/_2 T) = 0$, т. е. $p_v = p_{v0}(1 - 2t / T)$.

Подставив в (2.4) соотношения (2.7), (2.11) или (2.13) для оптимальных управлений с полученной функцией $p_v(t)$, можно проинтегрировать (2.4) по участкам. Неизвестные постоянные $p_{r0}$ и $p_\lambda$ определяются из конечных условий

$$r({}^1/_2 T) = {}^1/_2 l, \quad \Lambda({}^1/_2 T) = -{}^1/_2 \ln R$$

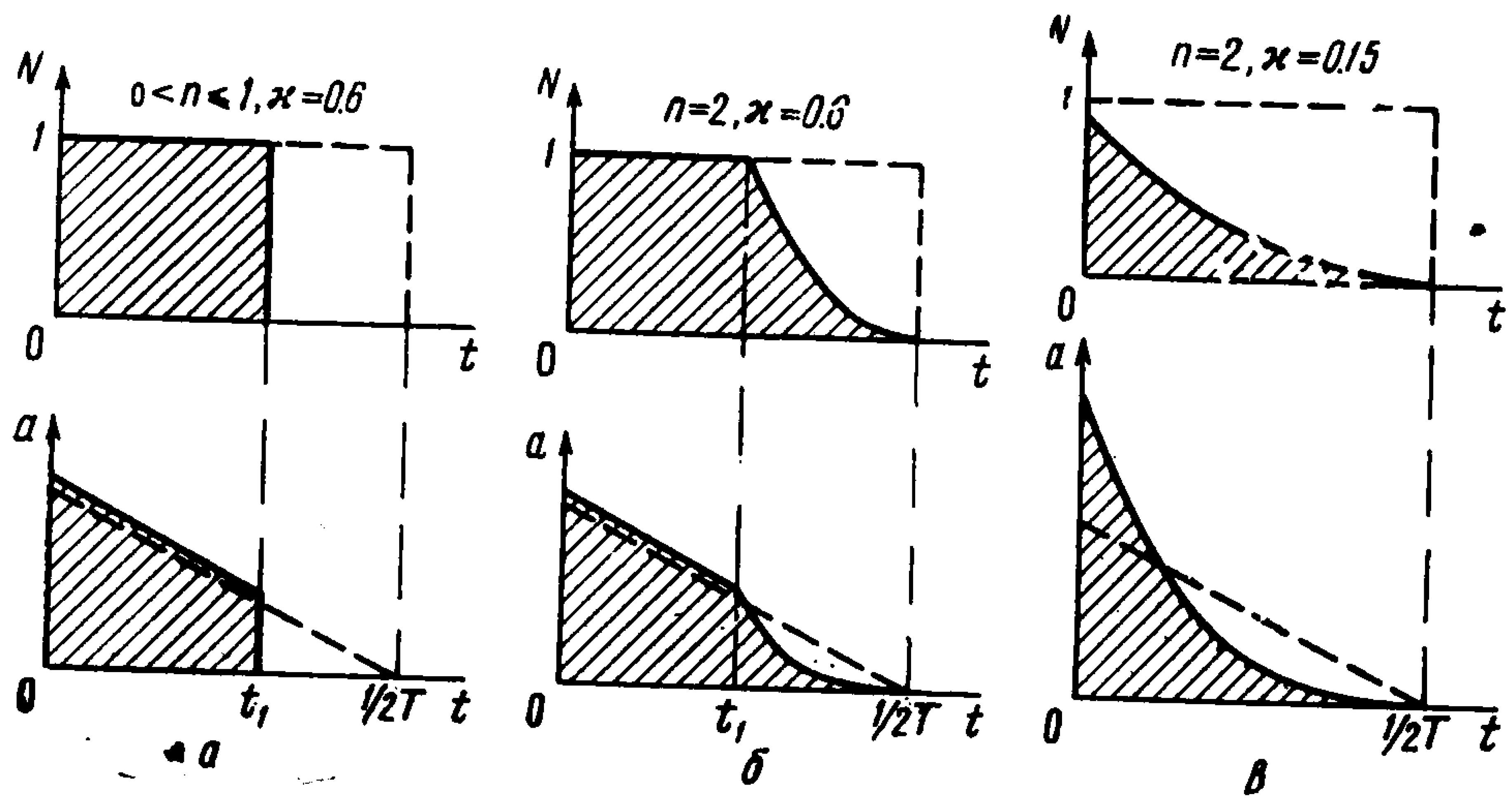
Если не задавать надежность ($\Lambda(T) = \mathrm{opt}$), то $p_\lambda = 0$, и решение получается следующее (см. [2]):

$$N^*(t) = 1, \qquad a^*(t) = 6\,(l / T^2)\,(1 - 2t / T), \qquad J^*(T) = 12\,(l^2 / T^3) \tag{2.15}$$

При заданной надежности $R$ решение будет зависеть от параметра

$$\varkappa = -\ln R / T\lambda_{\max} \qquad (0 < \varkappa \leqslant 1) \tag{2.16}$$

который представляет собой отношение допустимого числа отказов $\Lambda(T) = -\ln R$ к максимально возможному $\Lambda_{\max} = T\lambda_{\max}$.




Фиг. 4

Окончательно решение записывается следующим образом.

При $0 < n \leqslant 1$, $0 < \varkappa \leqslant 1$ (фиг. 4, *а*, ср. [3])

для $0 \leqslant t \leqslant t_1$

$$N(t) = 1, \qquad a(t) = a_0(1 - 2t/T)$$

для $t_1 \leqslant t \leqslant {}^1/_2 T$

$$N(t) = 0, \qquad a(t) = 0$$

$$a_0 = \frac{6l}{T^2}\left[1 - \left(1 - 2\frac{t_1}{T}\right)^3\right]^{-1}, \quad t_1 = \frac{1}{2}\varkappa T$$

$$J(T) = 12\,(l^2 / T^3)\,[1 - (1 - \varkappa)^3]^{-1}$$

При $n > 1$, $(n-1)/(3n-1) \leqslant \varkappa \leqslant 1$ (фиг. 4, *б*) (2.17)

для $0 \leqslant t \leqslant t_1$

$$N(t) = 1, \qquad a(t) = a_0(1 - 2t/T), \qquad a_0 = \frac{6l}{T^2}\left[1 - \frac{2}{3n-1}\left(1 - 2\frac{t_1}{T}\right)^3\right]^{-1}$$

для $t_1 \leqslant t \leqslant {}^1/_2 T$

$$N(t) = \left(\frac{1 - 2t/T}{1 - 2t_1/T}\right)^{2/(n-1)}, \quad a(t) = a_0\frac{(1 - 2t/)T^{(n+1)/(n-1)}}{(1 - 2t_1/T)^{2/(n-1)}}, \quad t_1 = \frac{3n-1}{4n}\left(\varkappa - \frac{n-1}{3n-1}\right)T$$

$$J(T) = 12\left(\frac{l^2}{T^3}\right)\left[1 - \frac{1}{4}\,\frac{(3n-1)^2}{n}(1 - \varkappa)^3\right]^{-1}$$

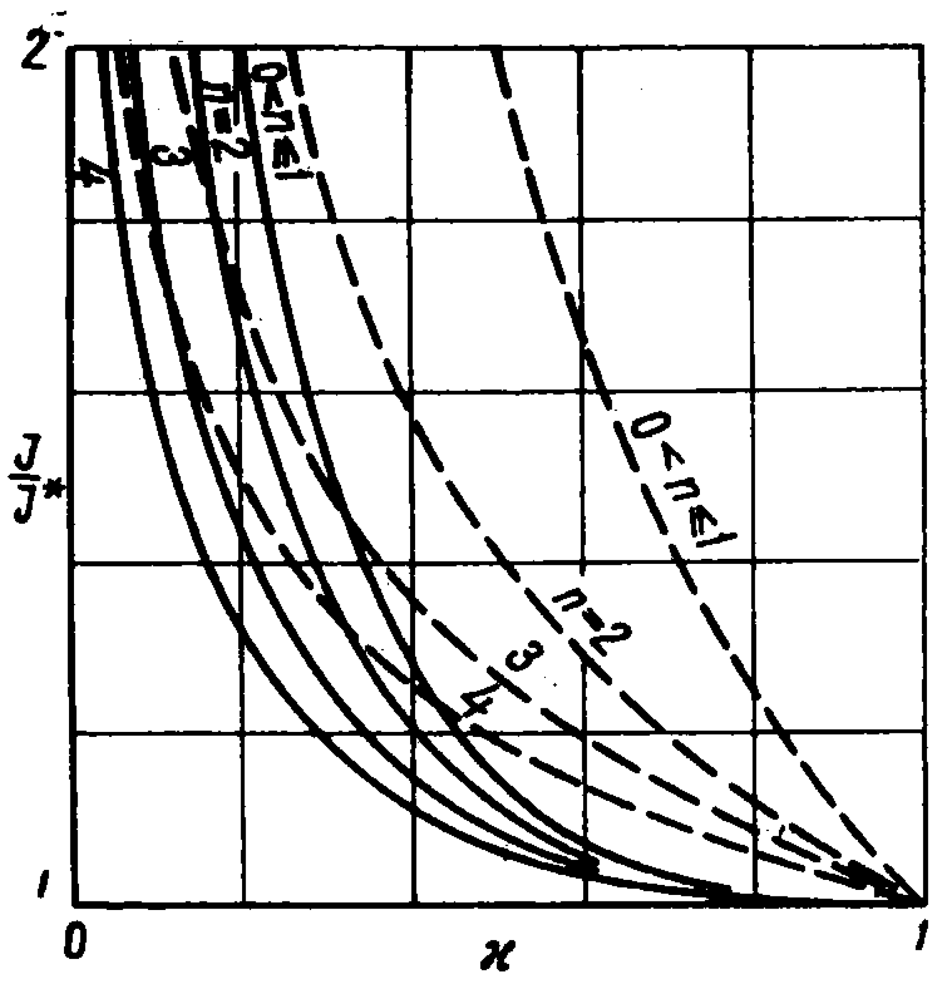
При $n > 1$, $0 < \varkappa \leqslant (n-1)/(3n-1)$ (фиг. 4, *в*)

$$N(t) = \left(\varkappa\frac{3n-1}{n-1}\right)^{1/n}\left(1 - 2\frac{t}{T}\right), \qquad a(t) = \frac{6l}{T^2}\,\frac{3n-1}{3(n-1)}\left(1 - 2\frac{t}{T}\right)^{(n+1)/(n-1)}$$

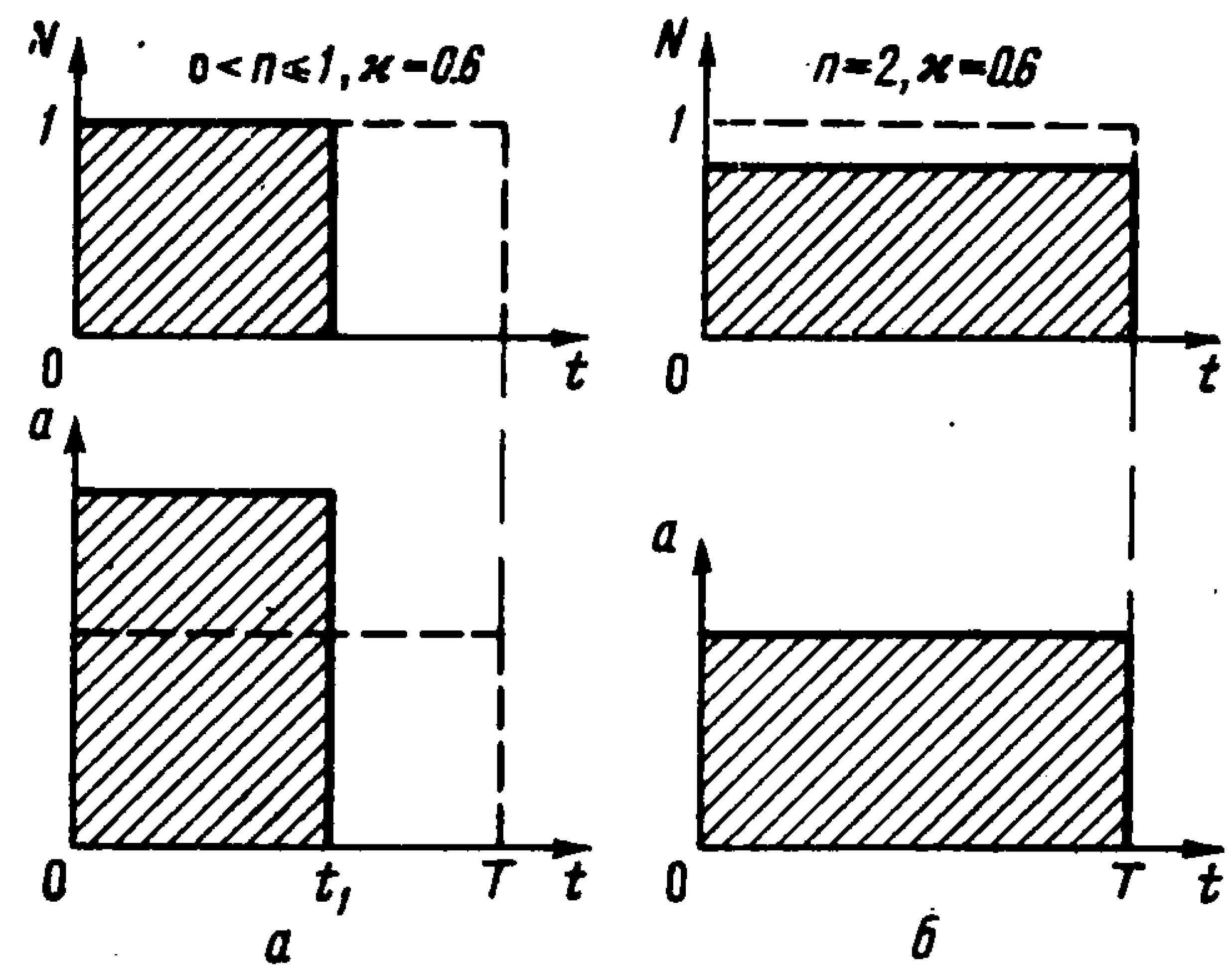
$$J(T) = 12\,\frac{l^2}{T^3}\,\frac{1}{3}\left(\frac{3n-1}{n-1}\right)^{(n-1)/n}\varkappa^{-1/n}$$

Для сравнения с полученными оптимальными законами (2.17) изменения мощности $N$ и реактивного ускорения $a$ на фиг. 4, *а*—*в*, пунктирными линиями показаны старые законы (2.15), оптимальные при отсутствии отказов.

На фиг. 5 сплошными линиями показана величина функционала $J$ из (2.17), отнесенная к $J^*$ из (2.15), в зависимости от параметра (2.16) для различных значений показателя степени в (2.12). Увеличение надежности (уменьшение параметра $\varkappa$) при прочих равных условиях приводит к увеличению функционала $J$. Соответствующее уменьшение полезной нагрузки может быть вычислено по формулам (2.2), (2.3). Разница между кривыми $0 < n \leqslant 1$ и $n = 2, 3, 4$, дает представление о выигрыше от использования промежуточных значений мощности. Если бы при $n > 1$ условие




Фиг. 5




Фиг. 6

заданной надежности удовлетворялось только за счет выключения источника мощности (2.11), то функционал для всех $\lambda(N)$ был бы одинаков (кривая $0 < n \leqslant 1$). Переход на программу (2.13) позволяет существенно уменьшить функционал.

Для задачи о наборе скорости граничные условия такие:

$$r(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad r(T) = \mathrm{opt}, \quad v(T) = \Delta v$$

Здесь не задано значение $r(T)$, поэтому $p_r(T) = 0$ и, в соответствии с (2.14), $p_v(t) = p_{v0}$. Отсюда следует, что мощность $N$ и ускорение $a$ на активных участках постоянны (см. (2.13), (2.11), (2.7)). Без учета надежности ($p_\lambda = 0$) пассивные участки на траектории отсутствуют, и получается следующее решение (см. [2]):

$$N^*(t) = 1, \qquad a^*(t) = \Delta v / T, \qquad J^*(T) = \Delta v^2 / T \tag{2.18}$$

Если показатель степени в формуле (2.12) для интенсивности потока отказов лежит в диапазоне $0 < n \leqslant 1$, то появляются пассивные участки. Их число и расположение не влияет на функционал задачи, а суммарная протяженность выбирается из условия заданной надежности $\Lambda(T) = -\ln R$. При $n > 1$, согласно свойству 2°, пассивные участки отсутствуют, условие $\Lambda(T) = -\ln R$ удовлетворяется за счет уменьшения $N$. Проделав все выкладки, получим

при $0 < n \leqslant 1$, $0 < \varkappa \leqslant 1$ (фиг. 6, *а*, ср. [3])

$$\begin{array}{lll} N(t) = 1, & a(t) = \Delta v / t_1 & \text{для } 0 \leqslant t \leqslant t_1 \\ N(t) = 0, & a(t) = 0 & \text{для } t_1 \leqslant t \leqslant T \end{array} \qquad (t_1 = \varkappa T)$$

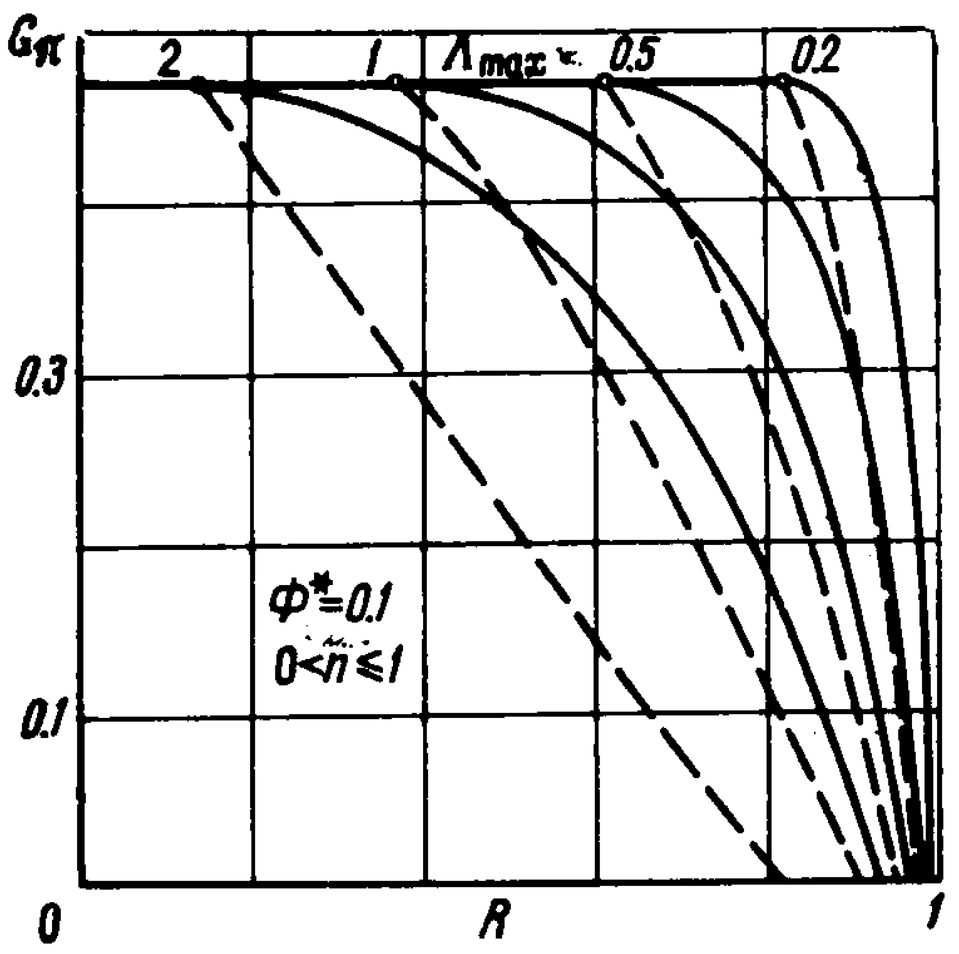
$$J(T) = (\Delta v^2 / T)\,\varkappa^{-1} \tag{2.19}$$

при $n > 1$, $0 < \varkappa \leqslant 1$ (фиг. 6, *б*)

$$N(t) = \varkappa^{1/n}, \qquad a(t) = \Delta v / T, \qquad J(T) = (\Delta v^2 / T)\,\varkappa^{-1/n}$$

Отношение функционалов (2.19) и (2.18) в зависимости от $\varkappa$ и $n$ показано на фиг. 5 пунктирными линиями. Видно, что для задачи о перемещении между точками покоя (сплошные кривые) требование заданной надежности приводит к значительно меньшему увеличению функционала, чем для задачи о наборе скорости. Чтобы оценить, какой при этом получается проигрыш в полезной нагрузке, нужно воспользоваться первым соотношением (2.2). На фиг. 7 приведен пример ($\Phi^* = (\alpha / 2g)\, J^* = 0.1$, $0 < n \leqslant 1$) зависимости полезной нагрузки от надежности для различных значений максимально возможного числа отказов $\Lambda_{\max} = T\lambda_{\max} = 0.2,\ 0.5,\ 1,\ 2$ (сплошные линии — задача о перемещении между точками покоя, пунктирные — задача о наборе скорости). Горизонтальные участки на фиг. 7 отвечают таким значениям надежности $R$, когда еще выполняется неравенство (1.6).

**3. Ограниченная скорость истечения.** В задаче о максимальной полезной нагрузке для двигательных систем ограниченной скорости истечения (тепловых реактивных двигателей) на активных участках выгодно (без учета надежности) использовать максимальную скорость истечения.




Фиг. 7

Предположим, что с увеличением скорости истечения (т. е. с увеличением температуры) интенсивность потока отказов (1.2) возрастает (ср.(2.1))

$$\lambda = \lambda\,(t,\ V) \qquad (\partial\lambda\,/\,\partial V \geqslant 0,\ 0 \leqslant V \leqslant 1) \quad (3.1)$$

(здесь и ниже скорость истечения $V$ отнесена к максимальной $V_0$).

При обеспечении заданной надежности (аналогично случаю ограниченной мощности — п.2) могут стать оптимальными промежуточные значения скорости истечения.

Будем считать максимальную тягу $P_0$ и максимальную скорость истечения $V_0$ заданными. Тогда задача о максимуме полезной нагрузки превращается в задачу о максимуме конечного веса. Уравнения вариационной проблемы (1.7) записываются следующим образом (ср. (2.4)):

$$\begin{array}{lll}
G^{\bullet} = -\mu\,(P\,/\,V)\,\delta, & G\,(0) = 1, & G\,(T) = \max \\
\mathbf{r}^{\bullet} = \mathbf{v}, & \mathbf{r}\,(0) = \mathbf{r}_0, & \mathbf{r}\,(T) = \mathbf{r}_1 \\
\mathbf{v}^{\bullet} = a_0\,(P\,/\,G)\,\mathbf{i}\delta + \mathbf{g}, & \mathbf{v}\,(0) = \mathbf{v}_0, & \mathbf{v}\,(T) = \mathbf{v}_1 \\
\Lambda^{\bullet} = \lambda_0\,(t) + [\lambda\,(t,\ V) - \lambda_0\,(t)]\,\delta, & \Lambda\,(0) = 0, & \Lambda\,(T) = -\ln R
\end{array} \qquad (3.2)$$

$$(0 \leqslant P\,(t) \leqslant 1,\quad 0 \leqslant V\,(t) \leqslant 1,\quad \delta\,(t) = 1 \text{ или } 0,\ |\,\mathbf{i}(t)\,| \equiv 1)$$

Здесь $G$— текущий вес (отнесен к начальному $G_0$), $\mu = gP_0\,/\,G_0V_0$ — относительный расход рабочего вещества (заданный параметр), $a_0 = gP_0\,/\,G_0$ — начальное реактивное ускорение (заданный параметр). Тяга $P$ и скорость истечения $V$ отнесены к своим максимальным значениям $P_0$ и $V_0$.

Считается что при выключенном двигателе ($\delta = 0$) интенсивность потока отказов становится равной $\lambda_0(t)$ ($\lambda_0\,(t) < \lambda\,(t,\ V)$, в частном случае $\lambda_0 = 0$). Чтобы отразить этот факт в уравнениях (3.2), был использован прием 2° из п. 1. Если бы было известно, что тяга $P$ ни на какой оптимальной траектории не принимает промежуточных значений $0 < P \leqslant 1$ (так называемый особый режим), то функцию $\delta$ можно было бы не вводить. В последнем уравнении вместо $\delta$ тогда нужно было бы написать $P$. Однако отсутствие здесь особого режима заранее не очевидно.

Для анализа состава оптимального управления нужно исследовать на абсолютный минимум (ищется максимум $G\,(T)$) по $\mathbf{i}$, $P$, $\delta$, $V$ функцию $H$ (ср. (2.5))

$$H = \left\{\left[-p_\mu\,\frac{\mu}{V} + \frac{a_0}{G}\,(\mathbf{p}_v\cdot\mathbf{i})\right] P + p_\lambda\,[\lambda\,(t,\ V) - \lambda_0\,(t)]\right\}\delta +$$
$$+ \lambda_0\,(t)\,p_\lambda + (\mathbf{p}_r\cdot\mathbf{v}) + (\mathbf{p}_v\cdot\mathbf{g}) \qquad (3.3)$$

Импульсы $\mathbf{p}_r$, $\mathbf{p}_v$, $p_\lambda$ по-прежнему определяются уравнениями (2.6), а импульс $p_\mu$ — уравнением

$$\dot{p}_\mu = -\partial H / \partial G = (\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{i}) a_0 G^{-2} P\delta, \qquad p_\mu(T) = -1 \tag{3.4}$$

Из минимума (3.3) по $\mathbf{i}$ следует (ср. (2.7))

$$\mathbf{i} = -\mathbf{p}_v / p_v \tag{3.5}$$

Аналогично п. 2 (см. (2.9)) можно показать, что

$$p_\mu(t) \leqslant 0, \qquad p_\lambda > 0 \tag{3.6}$$

Предположим, что в некоторый момент времени $p_\mu(t) > 0$, тогда из минимума $H$ следует $V = 0$ (независимо от знака $p_\lambda$) и $P = \delta = 1$. Режим $P = 1$ при $V = 0$ противоречит физическому смыслу, поэтому всюду $p_\mu(t) \leqslant 0$. Если положить теперь $p_\lambda < 0$, то получим всюду $V = 1$ и более позднее выключение двигателя ($\delta = 0$) по сравнению со случаем $p_\lambda = 0$. При этом условие заданной надежности не может быть выполнено (поскольку предполагается, что неравенство (1.6) не имеет места).

Покажем теперь, что на оптимальной траектории тяга не может принимать промежуточных значений $0 < P < 1$. Поскольку $P$ входит в (3.3) линейно, то промежуточные значения $P$ в качестве оптимальных могут появиться, когда коэффициент при $P$ обращается в нуль на некотором отрезке времени (особый режим). Но тогда $\delta = 0$, поскольку $p_\lambda > 0$ (см. (3.6)), т. е. тяга должна быть выключена. Это справедливо для любого маневра в произвольном гравитационном поле.

Установив отсутствие особого режима в составе оптимального управления, исключим из (3.2) – (3.4) управляющую функцию $\delta(t)$: там, где входит произведение $P\delta$, нужно оставить просто $P$, а где функция $\delta$ входит без $P$, ее нужно заменить на $P$. Тогда часть функции $H$, зависящая от управлений $V$ и $P$, с учетом (3.4) запишется в виде

$$H_{V,P} = [H_V - p_v a_0 / G - \lambda_0(t) p_\lambda] P, \qquad H_V = -\mu p_\mu / V + \lambda(t, V) p_\lambda \tag{3.7}$$

Из условия минимума $H_V$ по $V$ следует

$$V = 1 \quad \text{при } \lambda(t, V) \geqslant \lambda(t, 1) + (\mu p_\mu / p_\lambda)(1/V - 1) \tag{3.8}$$

Если условие (3.8) не выполняется, то существует оптимальное промежуточное значение $0 < V < 1$, определяемое из уравнения

$$V^2 \partial\lambda / \partial V = -\mu p_\mu / p_\lambda \qquad (0 < V < 1) \tag{3.9}$$

Нулевые значения $V$ не входят в состав оптимального управления. При

$$\lambda(t, V) \geqslant \lambda(t, 1) + (\mu\, p_{\mu 0} / p_\lambda)(1 / V - 1)$$

условие (3.8) будет выполняться на всей траектории, так как $\dot{p}_\mu \leqslant 0$, $p_\mu \leqslant 0$ (см. (3.4) — (3.6)). В этом случае скорость истечения нигде не будет принимать промежуточных значений.

Оптимальное управление тягой, как было доказано выше, может быть только граничное. Чередование активных и пассивных участков на траектории определяется соотношением (3.10)

$$P = 1 \text{ при } H_V - p_v a_0 G^{-1} - \lambda_0 p_\lambda < 0, \qquad P = 0 \text{ при } H_V - p_v a_0 G^{-1} - \lambda_0 p_\lambda > 0$$

полученным из условия абсолютного минимума функции (3.7) по $P$.

Рассмотрим теперь случай ограниченной перегрузки $a$ (вместо ограниченной тяги). Здесь задача о максимуме конечного веса $G_1$ сводится к отысканию минимума функционала

$$J = \int_0^T \frac{a}{V}\,dt \qquad (0 \leqslant V \leqslant 1,\ G_1 = G_0 e^{-J/V_0}) \tag{3.11}$$

(так называемая характеристическая скорость, ср. (2.2), (2.3)).

Аналогично предыдущему можно доказать отсутствие промежуточных значений реактивного ускорения $0 \leqslant a \leqslant a_0$ в составе оптимального управления. Имея это в виду, можно использовать запись (3.2) уравнений вариационной проблемы (1.7), заменив первое и третье уравнения на

$$J^{\cdot} = (a_0 / V)\,\delta, \qquad (J(0) = 0,\ J(T) = \min), \qquad \mathrm{v}^{\cdot} = a_0 \delta \mathrm{i} + \mathrm{g}$$

Оптимальное направление тяги будет определяться первым соотношением из (2.7). Управления $V(t)$ и $\delta(t)$ находятся из условия максимума функции (ср. (3.7))

$$H_{V,\delta} = [H_V + p_v a_0 - \lambda_0(t)\,p_\lambda]\,\delta \qquad (H_V = -a_0 / V + \lambda(t, V)\,p_\lambda, \qquad p_\lambda^{\cdot} < 0)$$

Оптимальная скорость истечения будет определяться соотношениями (3.8), (3.9), в которых надо положить $\mu p_\mu = -a_0$. Причем, если $\partial\lambda / \partial t = 0$, то оптимальное значение скорости истечения вдоль траектории будет постоянно.

Моменты включения ($\delta = 1$) и выключения ($\delta = 0$) двигателя находятся из соотношения, аналогичного (3.10)

$$\delta = 1 \quad \text{при } H_V + p_v a_0 - \lambda_0(t)\,p_\lambda > 0, \qquad \delta = 0 \quad \text{при } H_V + p_v a_0 - \lambda_0(t)\,p_\lambda < 0$$

**4. Весовой критерий.** Наличие оптимальной вероятности выполнения маневра вытекает из следующего рассуждения. Увеличение надежности, как показано в п.п. 2, 3, достигается ценой уменьшения полезной нагрузки (это эквивалентно увеличению стоимости). Но одновременно увеличивается процент удачных попыток выполнения маневра. Причем оптимальная вероятность выполнения маневра всегда лежит внутри интервала [0, 1], поскольку при нулевой надежности равен нулю процент удачных попыток, а при некотором значении надежности, строго меньшем единицы, обращается в нуль полезная нагрузка.

Пусть для $n$ успешных выполнений маневра из-за действия неблагоприятных случайных факторов пришлось затратить $m$ попыток ($m \geqslant n$). Тогда на одну попытку из этой серии будет приходиться следующая величина полезного груза, успешно доставленного в конечную точку траектории:

$$G_\pi^{(n,m)} = \frac{n}{m} G_\pi \tag{4.1}$$

где $G_\pi$ — полезный груз, на доставку которого рассчитывается при каждой попытке.

Попытка считается неудачной при отказах в процессе вывода на исходную орбиту и отказах двигательной системы в процессе выполнения основного маневра. Первые характеризуются надежностью $R_0$ вывода [1], вторые — надежностью $R$ работы двигательной системы во время полета.

[1] Надежность $R_0$ — это вероятность успешного вывода на исходную орбиту.

Считаются известными надежность $R_0$ и среднее число отказов $\lambda$ двигательной системы в единицу времени, которое определяет надежность $R$ (см. (1.2), (1.3)).

На основании этих вероятностных характеристик вводится математическое ожидание (4.1) — приходящегося на одну попытку полезного груза, который успешно доставляется в конечную точку

$$\langle G_\pi \rangle = R_0 R G_\pi \tag{4.2}$$

(так как $\langle m \rangle = n / R_0 R$ — по правилу умножения вероятностей).

Максимум (4.2) принимается в качестве критерия оптимальности. Соответствующая вариационная проблема записывается в виде задачи Майера

$$\begin{array}{lll} \langle G_\pi \rangle^{\cdot} = -R_0 e^{-\Lambda} (\lambda G_\sigma + q), & \langle G_\pi \rangle_{t=0} = G_\sigma(0) = 1 - G_\varkappa, & \langle G_\pi \rangle_{t=T} = \max \\ G_\sigma^{\cdot} = -q, & & G_\sigma(T) = \mathrm{opt} \\ \mathbf{r}^{\cdot} = \mathbf{v}, & \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, & \mathbf{r}(T) = \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{v}^{\cdot} = P\mathbf{i} / (G_\sigma + G_\varkappa) + \mathbf{g}, & \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0, & \mathbf{v}(T) = \mathbf{v}_1 \\ \Lambda^{\cdot} = \lambda(t, q, P, \ldots), & \Lambda(0) = 0, & \Lambda(T) = \mathrm{opt} \end{array} \tag{4.3}$$

Фазовые координаты задачи — $\langle G_\pi \rangle$, $G_\sigma$, r, v, $\Lambda$ ($G_\sigma$ — суммарный вес полезной нагрузки $G_\pi$ и запаса рабочего вещества $G_\mu$; $G_\varkappa$ — вес двигательной системы все веса отнесены к полному начальному весу). Управляющие функции — $P$, $q$, i ($q$ — расход, $P$ и $q$ отнесены к начальной массе тела).

Чтобы записать систему (4.3) в полном виде, нужно конкретизировать весовую формулу двигателя, т. е. указать связь между весом $G_\varkappa$ и предельными значениями управляющих параметров, от которых зависят тяга и расход. В качестве независимых управляющих функций вместо $P$ и $q$ при этом удобно использовать параметры, на которые наложены явные ограничения [2].

Вариационная задача (4.3) отличается от задачи (1.7) конечным условием на фазовую координату $\Lambda$. В (1.7) конечное значение $\Lambda$ задано ($\Lambda(T) = -\ln R$), в (4.3) выбирается из условия оптимальности. Замечания 1° и 2°, сделанные в п. 1 к записи (1.7), остаются в силе и для (4.3). Сохраняются также все свойства оптимальных управлений, установленные в п.п. 2, 3.

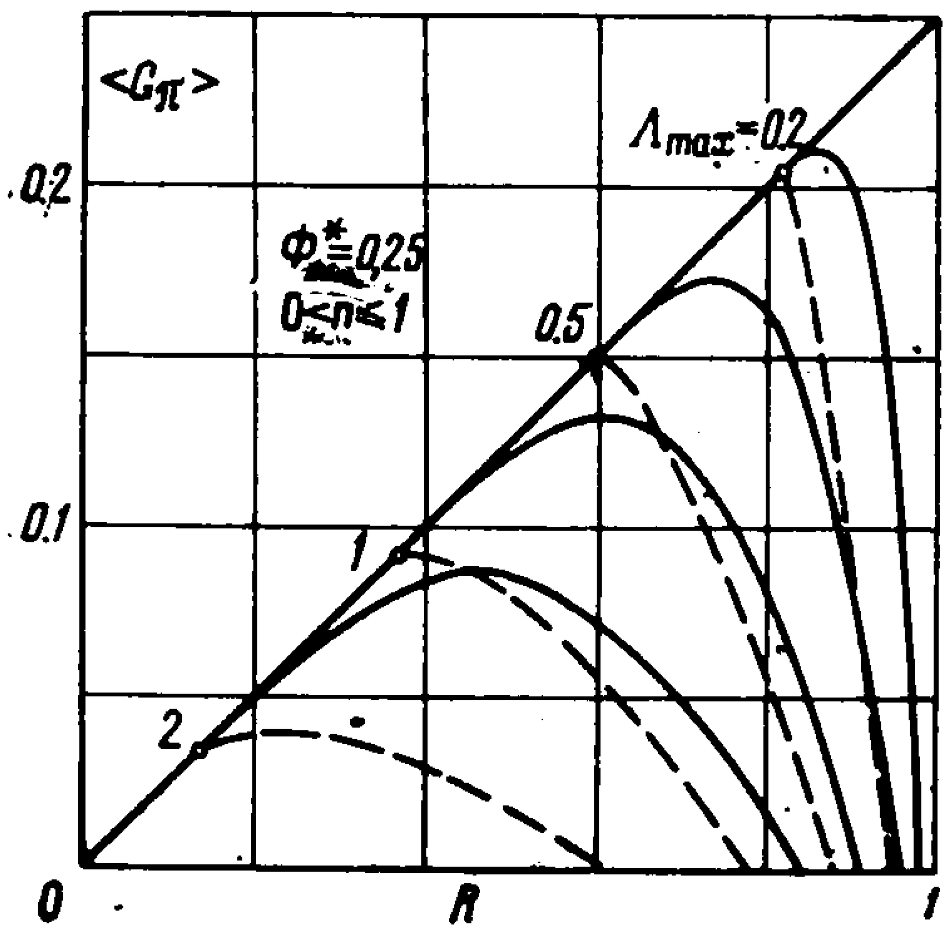
Если известно решение вариационной задачи о максимуме полезной нагрузки при заданной надежности (т. е. известна зависимость $G_\pi$ от $R$), то функционал (4.2) становится функцией $R$. После этого задача (4.3) сводится к отысканию оптимальной надежности $R$ из условия максимума (4.2).

Процедура построения оптимальных управлений (4.3) здесь приводиться не будет, поскольку она аналогична проделанной в п.п. 2, 3. Ограничимся примером решения для случая идеально регулируемой двигательной системы ограниченной мощности. В п. 2 получены соответствующие решения задачи о максимальной полезной нагрузке при фиксированной надежности

$$R = e^{-\varkappa \Lambda_{\max}} \tag{4.4}$$

где $\Lambda_{\max} = T\lambda_{\max}$ — максимально возможное число отказов за время движения $T$ ($\lambda_{\max}$ — максимальная величина интенсивности потока отказов). Параметр $\Lambda_{\max}$ определяется условиями задачи, параметр $\varkappa$ назначается так, чтобы удовлетворить условию заданной надежности (4.4).

Для частного вида зависимости интенсивности потока отказов от управляющих функций (см. (2.12)) в п. 2 даны аналитические зависимости $J(\varkappa)$ минимальной величины функционала задачи (2.4) от параметра $\varkappa$. В этом случае, как было упомянуто выше, функционал (4.2) рассматриваемой задачи будет функцией параметра $\varkappa$



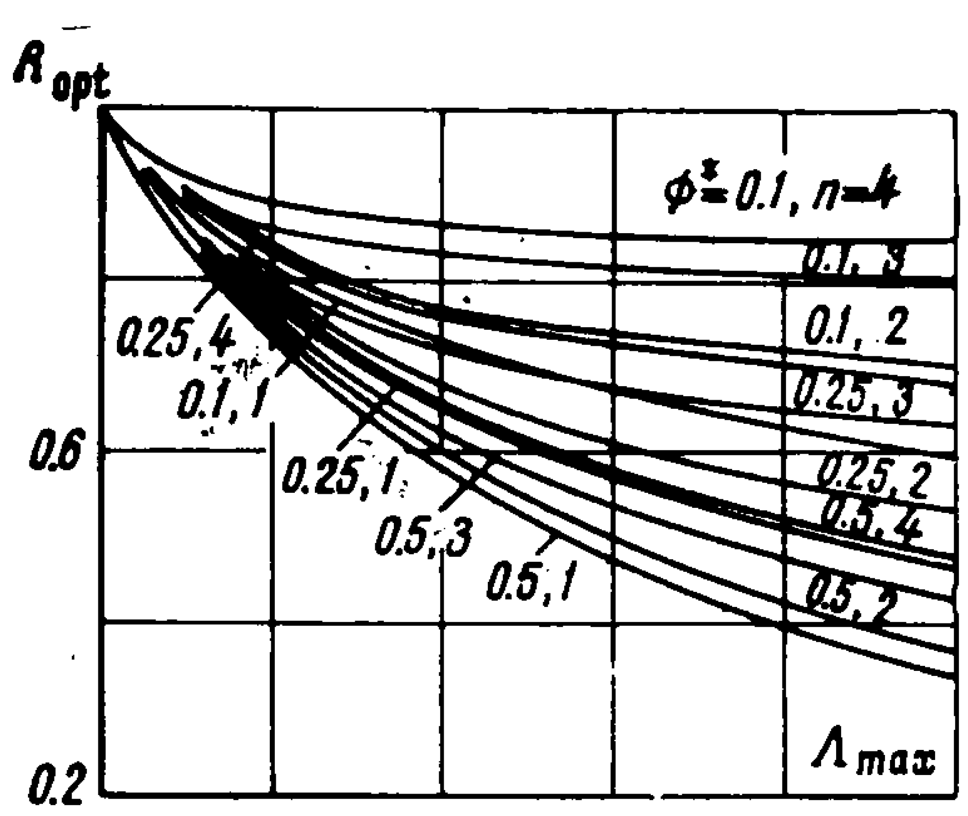

Фиг. 8

$$\langle G_\pi \rangle = R_0 e^{-\varkappa \Lambda_{\max}} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{2g} J(\varkappa) \right)^{1/2} \right]^2 \tag{4.5}$$

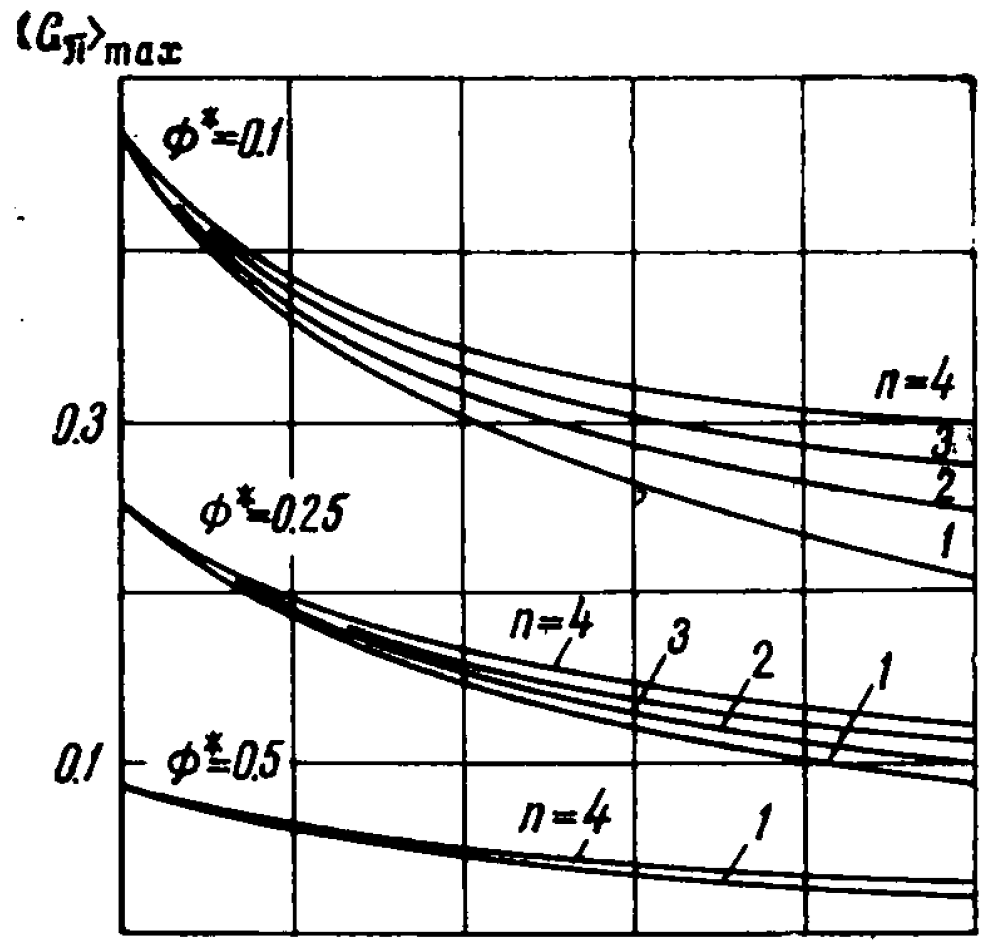
где $J(\varkappa)$ определяется соотношениями (2.17), (2.19) при $0 < \varkappa \leqslant 1$ и $J(\varkappa) = J(1)$ при $\varkappa \geqslant 1$ ((2.17)— перемещение между положениями покоя в бессиловом поле, (2.19) — набор скорости в бессиловом поле, см. также фиг. 5).

На фиг. 8 показан пример зависимости средней величины полезного груза, успешно доставляемого в конечную точку, — (4.5) от надежности — (4.4). Пример посчитан при $\Phi^* = (\alpha / 2g)\ J(1) = 0.25$, $R_0 = 1$, $0 < n \leqslant 1$ (см. (2.12)) для различных значений $\Lambda_{\max} = 0.2,\ 0.5,\ 1,\ 2$. Сплошные линии относятся к задаче о перемещении между положениями покоя, пунктирные — к задаче о наборе скорости. Точками обозначены моменты схода с прямой $\langle G_\pi \rangle = R\,(1 - \sqrt{\Phi^*})^2$, соответствующие $\varkappa = 1$. Кривые имеют четко выраженные максимумы. Максимум достигается либо при $0 < \varkappa < 1$, тогда $\partial \langle G_\pi \rangle / \partial \varkappa = 0$, либо при $\varkappa = 1$.

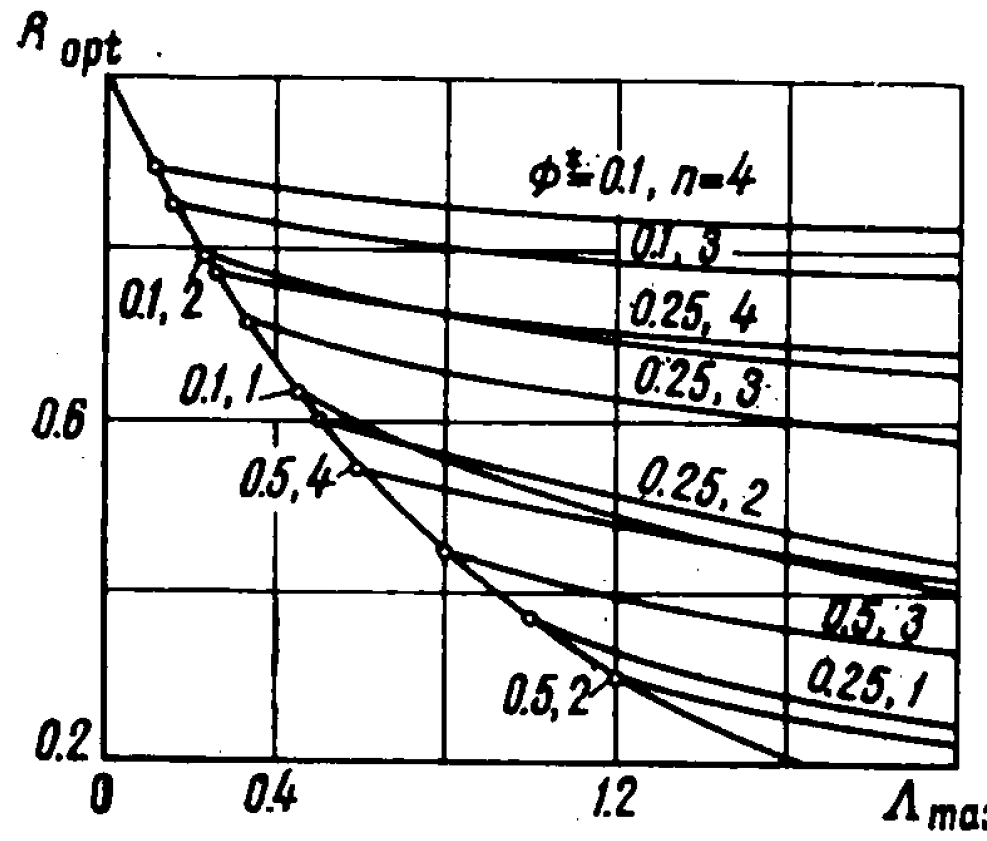
Для задачи о перемещении между положениями покоя максимальная полезная нагрузка и оптимальная вероятность выполнения маневра существенно больше, чем для задачи о наборе скорости. Это иллюстрируется фиг. 9, *а*, *б* (оптимальная надежность $R$ в зависимости от $\Lambda_{\max}$) и 10, *а*, *б* (максимальная полезная нагрузка $\langle G \rangle_\pi$ в зависимости от $\Lambda_{\max}$). Фигуры 9, *а*




*а*

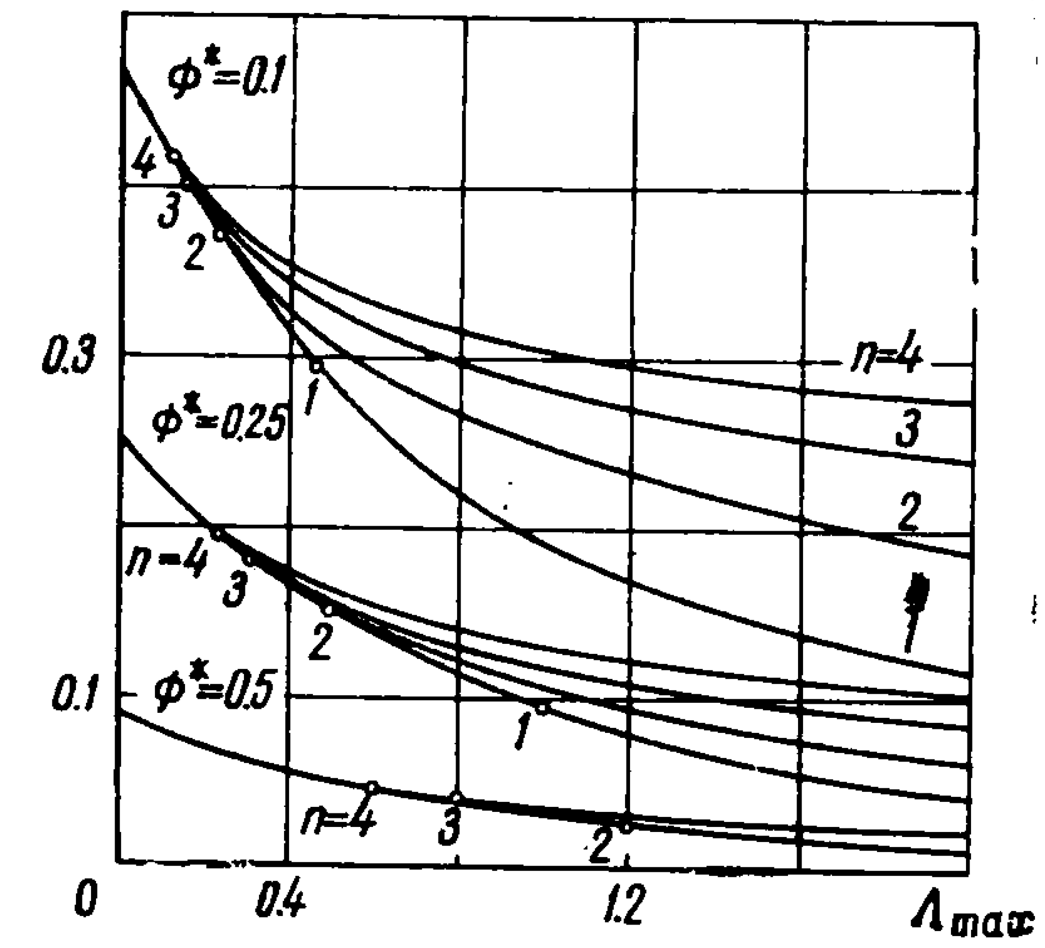



*а*




*б*

Фиг. 9 *а*, *б*




*б*

Фиг. 10 *а*, *б*

и 10, *а*, относятся к первой задаче, фигуры 9, *б* и 10, *б* — ко второй задаче.

**5. Критерий стоимости.** Задача определения оптимальной вероятности маневра, как уже отмечалось, имеет смысл, когда есть необходимость многократного выполнения этого маневра. В таком случае больший смысл по сравнению с весовым критерием приобретает критерий стоимости.

Аналогично (4.1) вводится средняя стоимость выполнения маневра в серии из $n$ удачных попыток при $m$ затраченных

$$C^{(n,m)} = n^{-1}\,[mC + (m - n)C_r] \tag{5.1}$$

где $C$ — стоимость одной попытки, $C_r$ — размер ущерба при неудачной попытке. Математическое ожидание стоимости одного успешного выполнения маневра равно

$$\langle C\rangle = (R_0R)^{-1}\,[C + (1 - R_0R)C_r] \tag{5.2}$$

Считается, что стоимость $C$ одной попытки

$$C = C_0 + C_\varkappa + C_\mu + C_e$$

составляют следующие компоненты. Стоимость вывода на исходную орбиту $C_0 = c_0G_0$ (принимается пропорциональной начальному весу $G_0 = G_\varkappa + G_{\mu 0} + G_\pi$). Стоимость двигательной системы $C_\varkappa = c_\varkappa G_\varkappa$ (принимается пропорциональной весу двигательной системы $G_\varkappa$). Стоимость запаса рабочего вещества вместе с баками $C_\mu = c_\mu G_{\mu 0}$ (принимается пропорциональной начальному весу рабочего вещества $G_{\mu 0}$). Прочие затраты $C_e$, не зависящие от весовых параметров.

Ущерб при неудачной попытке $C_r = c_\pi G_\pi$ считается равным стоимости полезного груза, пропорциональной его весу $G_\pi$. Коэффициенты $c_0$, $c_\varkappa$, $c_\mu$, $c_\pi$ и стоимость $C_e$ предполагаются постоянными и заданными.

В качестве критерия оптимальности берется минимум математического ожидания стоимости успешной доставки единицы полезного груза $c = \langle C\rangle \,/\, G_\pi$ или с учетом соотношений между стоимостью и весом

$$c = \frac{1}{R_0RG_\pi}\,[c_0G_0 + C_e + c_\varkappa G_\varkappa + c_\mu G_{\mu 0} + (1 - R_0R)\,c_\pi G_\pi] \tag{5.3}$$

Начальный вес $G_0$ и надежность вывода $R_0$ заданы, поэтому вместо (5.3) вводится следующий функционал, характеризующий стоимость успешного выполнения маневра

$$S = \frac{1 + s_\varkappa G_\varkappa + s_\mu G_{\mu 0}}{R\,(1 - G_\varkappa - G_{\mu 0})} \tag{5.4}$$

Здесь веса $G_\varkappa$ и $G_{\mu 0}$ считаются отнесенными к начальному $G_0$; коэффициенты $s_\varkappa$ и $s_\mu$ — заданные величины

$$s_\varkappa = \frac{c_\varkappa - c_\pi}{c_0 + c_\pi + C_e\,/\,G_0} > -1, \qquad s_\mu = \frac{c_\mu - c_\pi}{c_0 + c_\pi + C_e\,/\,G_0} > -1 \tag{5.5}$$

Функционал (5.4) связан с функционалом (5.3) соотношением:

$$S = \frac{R_0\,(1 + c)}{c_0 + c_\pi + C_e\,/\,G_0}, \quad \text{или} \quad c = \frac{S}{R_0}\left(c_0 + c_\pi + \frac{C_e}{G_0}\right) - 1 \tag{5.6}$$

т. е. минимум функционала $S$ эквивалентен минимуму функционала $c$.

При заданной надежности $R$ и при заданном весе двигательной системы $G_\varkappa$ для минимума стоимости $S$ необходимо, чтобы вес рабочего вещества $G_{\mu 0}$ был минимален. Из физических соображений это ясно, для формального доказательства выпишем частную производную (5.4) по $G_{\mu 0}$

$$\frac{\partial S}{\partial G_{\mu 0}} = \frac{1+s_\mu + (s_\varkappa - s_\mu)\, G_\varkappa}{R\,(1 - G_\varkappa - G_{\mu 0})^2}$$

Числитель этого выражения всегда положителен, так как

$$1 + s_\mu + (s_\varkappa - s_\mu)\, G_\varkappa \geqslant \begin{cases} 1 + s_\mu \text{ при } s_\varkappa - s_\mu \geqslant 0 \\ 1 + s_\varkappa \text{ при } s_\varkappa - s_\mu \leqslant 0 \end{cases} \quad (0 < G_\varkappa < 1)$$

и $1 + s_\mu > 0$ и $1 + s_\varkappa > 0$ согласно (5.5). Поэтому $\partial S \,/\, \partial G_{\mu 0} > 0$ и минимум $S$ достигается при минимуме $G_{\mu 0}$ (величины $R$ и $G_\varkappa$ фиксированы).

Таким образом, для задачи отыскания минимума стоимости $S$ можно использовать результат решения задачи о минимуме топлива при фиксированных значениях надежности и веса двигательной системы. Оптимальные значения $R$ и $G_\varkappa$ будут отличаться от найденных из условия максимума полезной нагрузки (4.2).

Вариационная задача о минимуме стоимости $S$ может быть записана аналогично (4.3). Надо только заменить первые два уравнения с их граничными условиями и четвертое уравнение на следующие: (5.7)

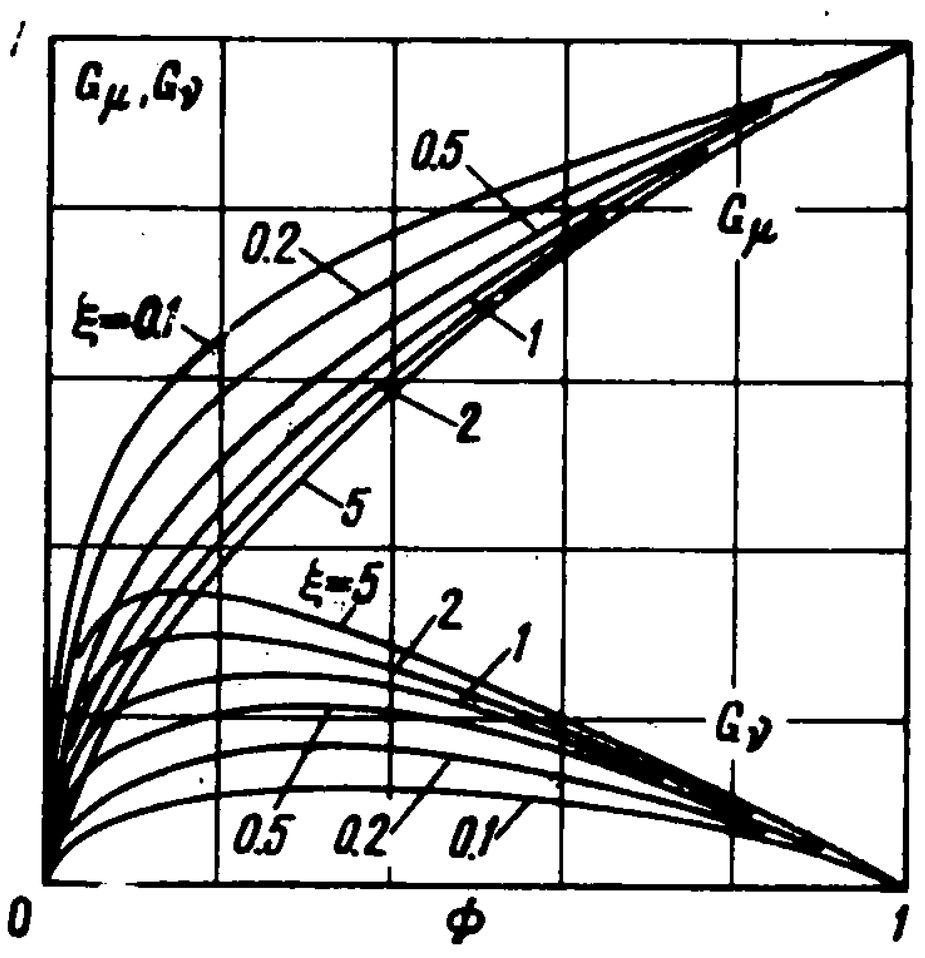
$$S^{\cdot} = e^{\Lambda} \left[ \lambda\, \frac{1 + s_\varkappa G_\varkappa + s_\mu \Delta G_\mu}{1 - G_\varkappa - \Delta G_\mu} + q\, \frac{1 + s_\mu + (s_\varkappa - s_\mu)\, G_\varkappa}{(1 - G_\varkappa - \Delta G_\mu)^2} \right], \qquad S(0) = \frac{1 + s_\varkappa G_\varkappa}{1 - G_\varkappa}$$

$$S(T) = \min, \quad \Delta G_\mu^{\cdot} = q \quad (\Delta G_\mu(0) = 0,\ \Delta G_\mu(T) = \mathrm{opt}), \quad \mathbf{v}^{\cdot} = P\,(1 - \Delta G_\mu)^{-1}\, \mathbf{i} + \mathbf{g}$$

Здесь вместо $G_\mu$ (текущего запаса рабочего вещества) введена новая фазовая координата $\Delta G_\mu = G_{\mu 0} - G_\mu(t)$ (вес рабочего вещества, израсходованного к моменту времени $t$).

Рассмотрим снова случай идеально регулируемой двигательной системы ограниченной мощности. Из интегрирования уравнения расхода рабочего вещества имеем [2]

$$G_{\mu 0} = \frac{\Phi}{\Phi + G_\nu} \qquad \left(\Phi = \frac{\alpha}{2g}\, J(\varkappa)\right) \qquad (5.8)$$




Фиг. 11

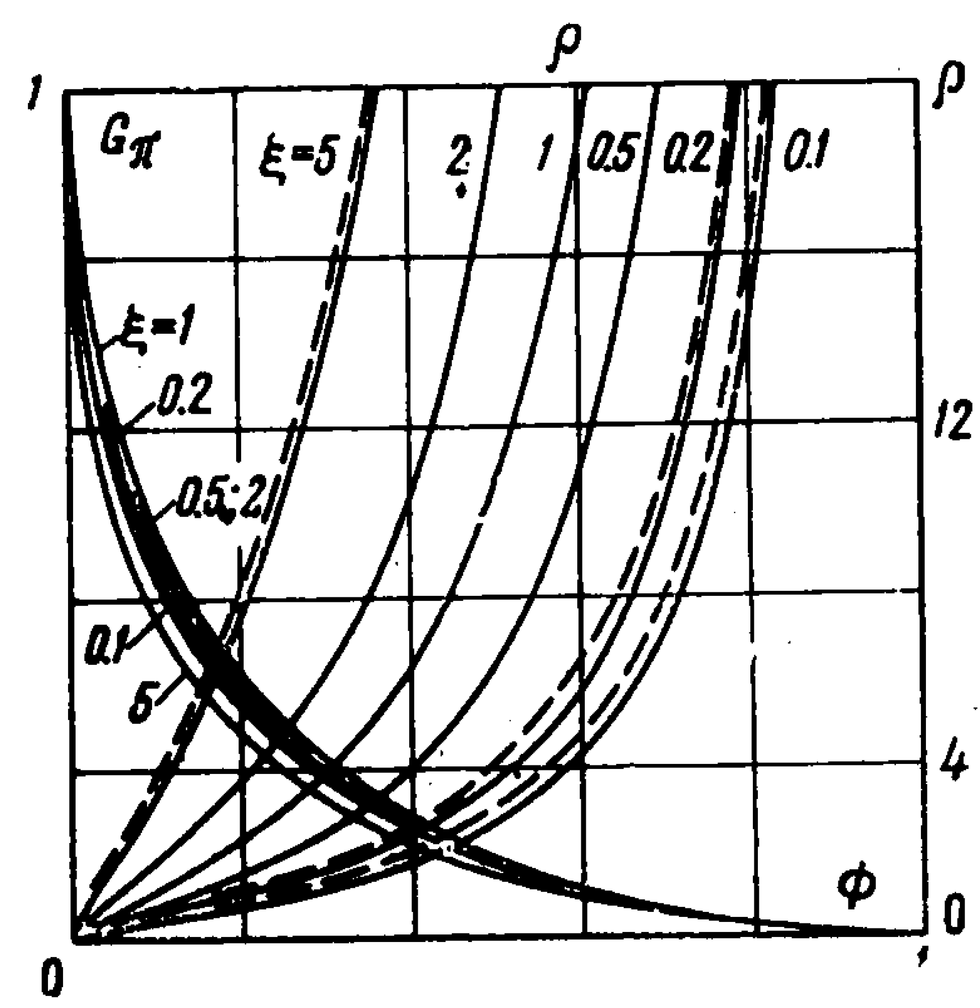
Здесь $G_\nu$ — вес источника мощности, который в этом случае определяет вес всей двигательной системы $G_\varkappa$.

Если интенсивность потока отказов не зависит от веса источника мощности (см. (2.1), (2.12)), то оптимальное значение $G_\nu$, как и прежде [2], можно найти, не решая динамической части задачи о минимуме функционала $J$. Подставив (5.8) в (5.4), определим оптимальное значение $G_\nu$ из условия $\partial S / \partial G_\nu = 0$ (5.9)

$$G_\nu = [\xi\Phi + \xi\,(\xi - 1)\,\Phi^2]^{1/2} - \xi\Phi \qquad \left(\xi = \frac{1 + s_\mu}{1 + s_\nu}\right)$$

($s_\nu$ записано вместо $s_\varkappa$)

Параметр $\xi$ характеризует отношение стоимости единицы веса рабочего вещества к единице веса источника мощности (см. (5.5)). При $\xi = 1$ (равные стоимости формула (5.9) дает старое оптимальное соотношение между весом запаса рабочего вещества и весом источника мощности, обеспечивающее максимум полезной нагрузки [2]. Это соотношение для минимума стоимости сдвигается в сторону увеличения запаса рабочего вещества при $\xi < 1$ или в сторону увеличения веса источника мощности при $\xi > 1$ (см. фиг. 11). Разница между оптимальными весовыми соотношениями при переходе от весового критерия к критерию стоимости может быть весьма значительной в зависимости от того, насколько различаются стоимости рабочего вещества и источника мощности.




Фиг. 12

Посмотрим теперь, какой будет проигрыш в функционалах, если при вычислении одного функционала пользоваться весовыми соотношениями, оптимальными для другого. Выделим из функционала стоимости $S$ для уменьшения числа параметров часть, зависящую только от $\xi$ и $\Phi$ (5.10)

$$\rho(\xi, \Phi) = \frac{\xi G_{\mu 0} + G_\nu}{1 - G_{\mu 0} - G_\nu} \quad \left(S = \frac{1}{R}\,[(1 + s_\nu)\rho + 1]\right)$$

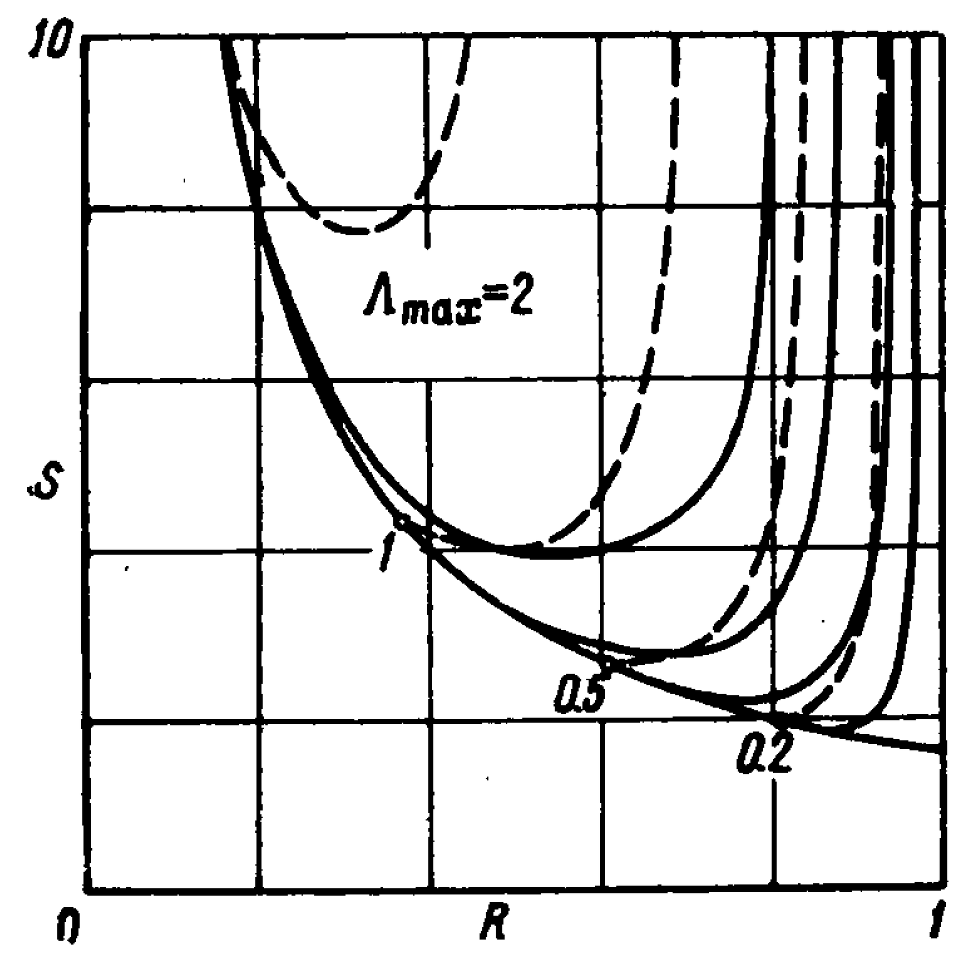
Величина $\rho$, так же как и $S$, характеризует стоимость выполнения маневра, но без учета надежности. На фиг. 12 сплошными линиями показана зависимость $\rho(\xi, \Phi)$, когда для $G_{\mu 0}$ и $G_\nu$ взяты оптимальные для критерия стоимости значения (5.9), (5.8). Пунктирные линии соответствуют случаю, когда для $G_{\mu 0}$ и $G_\nu$ взяты значения, оптимальные для весового критерия:

$$G_{\mu 0} = \sqrt{\Phi}, \qquad G_\nu = \sqrt{\Phi} - \Phi$$

(см. (5.8), (5.9) при $\xi = 1$). На этой же фигуре представлена зависимость полезной нагрузки

$$G_\pi = 1 - G_\nu - G_{\mu 0}$$

от $\Phi$ для различных значений параметра $\xi$. Видно, что проигрыш в полезной нагрузке при переходе от одних оптимальных весовых соотношений к другим больше, чем проигрыш в стоимости (сплошные и пунктирные кривые для стоимости $\rho$ при $\xi = 0.5$, 1, 2 сливаются).




Фиг. 13

В заключение проиллюстрируем, как влияет переход от весового критерия к критерию стоимости на оптимальную вероятность выполнения маневра. При этом воспользуемся той же зависимостью $J(\varkappa)$, что и в п. 4. На фиг. 13 приведен график $S(R)$ (стоимость по надежности) для тех же значений параметров, что и на фиг. 8 (сплошные линии — перемещение между положениями покоя, пунктирные — набор скорости). Видно, что оптимальные значения вероятности выполнения маневра здесь несколько выше, чем в случае весового критерия (ср. положения минимумов на фиг. 13 с положениями максимумов на фиг. 8). Это может быть объяснено тем, что при минимизации стоимости учитывается дополнительный ущерб в случае неудачной попытки выполнения маневра, равный стоимости полезного груза.

Автор благодарит Ю. Е. Кузнецова за полезные дискуссии.

Поступила 25 V 1965

## ЛИТЕРАТУРА

1. Токарев В. В. Влияние случайных процессов уменьшения мощности на движение тела переменной массы в гравитационном поле. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
2. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета с малой тягой. ч. 3. Инж. ж., 1964, т. 4, № 1.
3. Иванов Ю. Н. О движении тела переменной массы с ограниченной мощностью и заданным активным временем. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
4. Хинчин А. Я. Работы по математической теории систем массового обслуживания. М. Физматгиз, 1963.