Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО СЛОЯ МАЛОЙ ТОЛЩИНЫ

В. М. Александров, В. А. Бабешко, В. А. Кучеров
(Ростов-на-Дону)

В работе рассматриваются пространственные контактные задачи для упругого слоя толщиной h, лежащего без трения на жестком основании. Силы трения между штампом и слоем предполагаются отсутствующими.

Изучается случай, когда область контакта штампа со слоем — бесконечная полоса ширины $2a$.

Основание штампа произвольное. Все рассмотрение ведется для случая, когда относительная толщина слоя $\lambda = h / a$ достаточно мала.

Производятся дальнейшее усовершенствование и развитие метода работы [1]. Приведены примеры.

§ 1. Постановка контактной задачи для упругого слоя. Задача о действии штампа в форме бесконечной полосы на упругий слой малой толщины сводится к решению системы уравнений Ламе

$$(1-2\nu)\Delta u + \frac{\partial\vartheta}{\partial x} = 0, \quad (1-2\nu)\Delta v + \frac{\partial\vartheta}{\partial y} = 0, \quad (1-2\nu)\Delta w + \frac{\partial\vartheta}{\partial z} = 0 \tag{1.1}$$

с граничными условиями

при $z = h$

$$\begin{aligned}
&\tau_{xz} = G(\partial u / \partial z + \partial w / \partial x) = 0 && (-\infty < x, y < \infty)\\
&\tau_{yz} = G(\partial v / \partial z + \partial w / \partial y) = 0 && (-\infty < x, y < \infty)\\
&\sigma_z = 2G[\partial w / \partial z + \vartheta\nu / (1-2\nu)] = 0 && (|y| > a, |x| < \infty)\\
&w = -f(x, y) && (|y| \leqslant a, |x| < \infty)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

при $z = 0$

$$\begin{aligned}
&\tau_{xz} = G(\partial u / \partial z + \partial w / \partial x) = 0 && (-\infty < x, y < \infty)\\
&\tau_{yz} = G(\partial v / \partial z + \partial w / \partial y) = 0 && (-\infty < x, y < \infty)\\
&w = 0 && (-\infty < x, y < \infty)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Перемещения убывают при $|y| \to \infty$.

Здесь Δ — трехмерный оператор Лапласа, ν — коэффициент Пуассона, G — модуль сдвига, $f(x, y)$ — функция осадки точек поверхности упругого слоя под штампом, четная по y.

Требуется определить контактные напряжения

$$\sigma_z |_{z=h} = -q(x, y) \qquad (|y| \leqslant a, \ -\infty < x < \infty) \tag{1.4}$$

связи между усилиями, действующими на штамп, и внедрением штампа.

Представим функцию $f(x, y)$ в форме

$$f(x, y) = f_+(x, y) + f_-(x, y) \tag{1.5}$$

где $f_+(x, y)$ — четная по x функция, а $f_-(x, y)$ — нечетная по x. Соответственно этому задача распадается на две: «четную» и «нечетную» по x.

Ниже будем рассматривать только четный случай по x, нечетный рассматривается совершенно аналогично. Знак $+$ у функции $f_+(x, y)$ в дальнейшем опускаем.

Решение уравнений (1.1) при условиях (1.2), (1.3) ищем в виде

$$u = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty U(\alpha, y, z)\sin\alpha x\, d\alpha, \qquad v = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty V(\alpha, y, z)\cos\alpha x\, d\alpha$$

$$w = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty W(\alpha, y, z)\cos\alpha x\, d\alpha \tag{1.6}$$

Подставим (1.6) в (1.1) и произведем все дифференциальные операции под знаком интеграла; приравнивая подынтегральные выражения нулю, получим систему

$$D^2U - \frac{\alpha}{1-2\nu}\Theta - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha^2 U = 0 \qquad \left(D^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

$$(1-2\nu)D^2V + \Theta_y' - \alpha U_y' - (1-2\nu)\alpha^2 V = 0$$

$$(1-2\nu)D^2W + \Theta_z' - \alpha U_z' - (1-2\nu)\alpha^2 W = 0 \qquad (\Theta = V_y' + W_z') \tag{1.7}$$

Аналогичным образом на основании формул (1.2), (1.3) получим следующие граничные условия:

при $z = h$

$$\left.\begin{array}{ll} U_z' - \alpha W = 0 \quad (-\infty < y < \infty), & V_z' + W_y' = 0 \quad (-\infty < y < \infty) \\ (1-2\nu)W_z' + \nu\Theta - \alpha\nu U = 0 \quad (|y| > a), & W = -F(\alpha, y) \quad (|y| \leqslant a) \end{array}\right. \tag{1.8}$$

при $z = 0$

$$U_z' - \alpha W = 0 \quad (-\infty < y < \infty), \quad V_z' + W_y' = 0 \quad (-\infty < y < \infty)$$

$$W = 0 \quad (-\infty < y < \infty) \tag{1.9}$$

Функции U, V, W убывают при $|y| \to \infty$.

Здесь $F(\alpha, y)$ — косинус-трансформанта Фурье функции $f(x, y)$, т. е.

$$f(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(\alpha, y)\cos\alpha x\, d\alpha, \qquad F(\alpha, y) = \int_0^\infty f(x, y)\cos\alpha x\, dx \tag{1.10}$$

Далее будем предполагать, что функция $F(\alpha, y)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) при любом фиксированном $0 < \alpha < \infty$ имеет непрерывную первую производную по $y \in [-a, a]$ за исключением конечного числа точек разрывов первого рода;

2) при любом фиксированном $0 < \alpha < \infty$ имеет конечное число точек разрыва второго рода для второй производной при $y \in [-a, a]$;

3) при любом фиксированном $0 < \alpha < \infty$ строго монотонная по y при $0 < |y| \leqslant a$.

Если функция $F(\alpha, y)$ не строго монотонная по y, то всегда можно подобрать такую строго монотонную функцию $\varphi(\alpha, y)$, что $F_y'(\alpha, y) + \varphi_y'(\alpha, y) > 0$ или $F_y'(\alpha, y) + \varphi_y'(\alpha, y) < 0$, и представить $F(\alpha, y)$ в виде комбинации двух строго монотонных функций.

Продолжим функцию $F(\alpha, y)$ на интервал $a < |y| < \infty$ непрерывно любой строго монотонной функцией $F^*(\alpha, y)$ с сохранением всех других свойств функции $F(\alpha, y)$.

Произведем в уравнениях (1.7) и граничных условиях (1.8), (1.9) следующую замену переменных, учитывающую четность задачи по y:

$$\eta = \frac{a-|y|}{h}\omega(|y|), \qquad \zeta = -\frac{z}{h} \qquad (0 \leqslant |y| < \infty, \ 0 \leqslant z \leqslant h) \tag{1.11}$$

Будем требовать выполнения следующих условий.

1) Функция η — строго монотонная убывающая при $0 < |y| < \infty$, т. е. $\eta'(|y|) < 0$.

2) Функция η имеет непрерывную первую производную по $y \in [-\infty, \infty]$, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, и имеет конечное число точек разрыва второго рода для второй производной при $y \in [-\infty, \infty]$.

3) Функция $\eta(y)$ принимает следующие значения:

$$\eta(\alpha) = 0, \qquad \eta(0) = C_1/\lambda, \qquad \eta(\infty) = -C_2/\lambda$$

Здесь C_1 и C_2 — положительные постоянные, причем $C_1 < \infty$, а C_2 может принимать бесконечное значение. Функцию $\omega(|y|)$ возьмем в виде

$$\begin{aligned}\omega(|y|) &= \frac{F(\alpha, a) - F(\alpha, y)}{F_y'(\alpha, a)(a-|y|)} \qquad &\text{при } 0 \leqslant |y| \leqslant a \\ \omega(|y|) &= \frac{F(\alpha, a) - F^*(\alpha, y)}{F_y^{*\prime}(\alpha, a)(a-|y|)} \qquad &\text{при } a \leqslant |y| < \infty\end{aligned} \tag{1.12}$$

Тогда легко показать, основываясь на свойствах функции $F(\alpha, y)$ и $F^*(\alpha, y)$, что $\eta = \eta(|y|)$ удовлетворяет всем перечисленным выше свойствам. Причем функция

$$F(\alpha, y) = b_0(\alpha) + b_1(\alpha)\eta \tag{1.13}$$

при всех $0 \leqslant |y| \leqslant a$, где

$$b_0 = F(\alpha, a), \qquad b_1 = -hF_y'(\alpha, a) \tag{1.14}$$

Обратную замену $|y|$ и z через η и ζ асимптотически при малых λ можно единственным образом представить в виде

$$|y| = a - h\eta + \ldots, \qquad z = -h\zeta \tag{1.15}$$

После проведения замены (1.11) в уравнениях (1.7) и граничных условиях (1.8), (1.9), пренебрегая в полученных соотношениях членами порядка h и h^2 и полагая $1/\lambda = \infty$ ($\lambda = h/a$), получим следующую систему дифференциальных уравнений при граничных условиях:

$$D^2U^* = 0, \quad (1-2\nu)D^2V^* + \Theta_\eta^{*\prime} = 0, \quad (1-2\nu)D^2W^* + \Theta_\zeta^{*\prime} = 0 \tag{1.16}$$

при $\zeta = -1$

$$U_\zeta^{*\prime} = 0 \quad (-\infty < \eta < \infty), \qquad V_\zeta^{*\prime} + W_\eta^{*\prime} = 0 \quad (-\infty < \eta < \infty) \tag{1.17}$$

$$(1-2\nu)W_\eta^{*\prime} + \nu\Theta^* = 0 \ (-\infty < \eta < 0), \quad W^* = -[b_0(\alpha) + b_1(\alpha)\eta] \ (0 \leqslant \eta < \infty)$$

при $\zeta = 0$

$$U_\zeta^{*\prime} = 0 \quad (-\infty < \eta < \infty) \quad V_\zeta^{*\prime} + W_\eta^{*\prime} = 0 \quad (-\infty < \eta < \infty),$$
$$W^* = 0 \quad (-\infty < \eta < \infty) \tag{1.18}$$

Функции V^*, V^*, W^* убывают при $|\eta| \to \infty$.

Причем функция $b_0 + b_1\eta$ аналитически продолжена при растяжении координаты η в область $\lambda^{-1}\omega(0) \leqslant \eta < \infty$.

Теперь легко заметить, что рассматриваемая задача при учете малости толщины слоя распалась на следующие две задачи.

1. Определения решения первого из дифференциальных уравнений (1.16) с учетом только первых из граничных условий (1.17) и (1.18) и условия убывания на бесконечности функции U^*; как известно, решение этой задачи есть тождественный нуль.

2. Решение системы из второго и третьего дифференциальных уравнений (1.16) с учетом остальных граничных условий (1.17), (1.18) и условия убывания на бесконечности функций V^* и W^*.

Последняя задача представляет плоскую контактную задачу о действии полубесконечного плоского наклонного штампа на упругую полосу единичной толщины. Методами операционного исчисления эта задача может быть сведена [2] к решению следующего интегрального уравнения относительно функции распределения контактных давлений $Q^*(\alpha, \tau)$:

$$\int_0^\infty Q^*(\alpha, \tau) K(\tau - \eta)\, d\tau = \pi\chi\, [b_0(\alpha) + b_1(\alpha)\eta] \qquad (0 \leqslant \eta < \infty) \qquad (1.19)$$

$$K(\tau - \eta) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos(\tau - \eta)\, u\, du, \quad L(u) = \frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{\operatorname{sh} 2u + 2u}, \qquad \chi = \frac{G}{1 - \nu} \qquad (1.20)$$

Функция $Q^*(\alpha, \eta)$, очевидно, связана с $q(x, y)$ соотношением [1]

$$q(x, y) \approx \frac{2}{\pi h} \int_0^\infty Q^*(\alpha, \eta) \cos \alpha x\, d\alpha = \frac{2}{\pi h} \int_0^\infty Q(\alpha, y) \cos \alpha\, x d\alpha \qquad (1.21)$$

Итак, асимптотическое решение рассматриваемой задачи при малых значениях параметра λ определяется по формуле (1.21), если известно решение уравнения (1.19). Связь между усилием, действующим в каждом сечении штампа, и его осадкой определим по формуле

$$P(x) = \int_{-a}^{a} q(x, y)\, dy \qquad (1.22)$$

Обращающееся в нуль при $y = \pm a$ решение задачи при фиксированном a будет, очевидно, иметь место, если

$$\lim_{y \to \pm a} \sqrt{a^2 - y^2} \int_0^\infty Q(\alpha, y) \cos \alpha x\, d\alpha = 0 \qquad (1.23)$$

Это соотношение налагает определенные ограничения на функцию $f(x, y)$ вида (1.10) [2].

---

[1] Формула (1.21) получена соответствующим преобразованием формулы закона Гука для σ_z.

[2] Все приведенные результаты могут быть получены при асимптотическом решении интегрального уравнения рассматриваемой контактной задачи (см. (1.29)) при малых λ, как было сделано, например, в работе [1]; т. е. его асимптотическое решение при малых λ дается формулой (1.21).

Если функция $f(x, y)$ — периодическая с периодом $2l$, то интеграл Фурье (1.10) превращается в ряд Фурье

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(y) \cos \frac{\pi n x}{l} \tag{1.24}$$

а асимптотическое решение задачи при малых λ (1.21), очевидно, принимает вид

$$q(x, y) = \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} q_n(y) \cos \frac{\pi n x}{l} \tag{1.25}$$

Если же функция $f(x, y)$ — вырожденная, т. е.

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{N} f_n(y) \psi_n(x) \tag{1.26}$$

то можно показать, что решение задачи также будет вырожденным и представимо в форме

$$q(x, y) = \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{N} q_n(y) \psi_n(x) \tag{1.27}$$

где N — любое натуральное число или бесконечность.

В формулах (1.25) и (1.27) функция $q_n(y) = q_n(\eta_n)$, где $q_n(\eta_n)$ — решение интегрального уравнения (1.19) с правой частью

$$b_{0n} + b_{1n}\eta_n = f_n(y) \tag{1.28}$$

причем η строится по формулам (1.11) и (1.12), а постоянные b_{0n} и b_{1n} определяются по (1.14) [1].

Выше указывалось, что функция $f(x, y)$ предполагается четной по y, однако решение может быть получено и при нечетной по y функции $f(x, y)$ использованием изложенного ниже приема.

Как известно (см., например, [3]), решение системы уравнений Ламе (1.1) при граничных условиях (1.2), (1.3) может быть приведено методами операционного исчисления к нахождению контактных напряжений $q(x, y)$ из интегрального уравнения

$$\int_{-a}^{a} \int_{-\infty}^{\infty} q(s, t) K(R/h)\, ds\, dt = 2\pi h \chi f(x, y) \qquad \begin{pmatrix} |y| \leqslant a \\ |x| < \infty \end{pmatrix} \tag{1.29}$$

$$K\left(\frac{R}{h}\right) = \int_0^{\infty} L(u) J_0(uR/h)\, du, \qquad R = \sqrt{(s-x)^2 + (t-y)^2}$$

Пусть требуется найти решение интегрального уравнения

$$\int_{-a}^{a} \int_{-\infty}^{\infty} p(s, t) K\left(\frac{R}{h}\right) ds\, dt = 2\pi h \chi g(x, y) \begin{pmatrix} |y| \leqslant a \\ |x| < \infty \end{pmatrix} \tag{1.30}$$

---

[1] Предполагается, что функции $f_n(y)$ строго монотонны по y при всех $0 < |y| \leqslant a$ и любом натуральном n, а также удовлетворяют другим условиям, сформулированным выше для функции $F(\alpha, y)$. Если какая-либо из $f_n(y)$ не строго монотонная, то ее можно всегда представить в виде комбинации двух строго монотонных функций.

где $g(x, y)$ — нечетная по y функция. Пусть, кроме того,

$$g^*(x, y) + c(x) \tag{1.31}$$

есть первообразная от функции $g(x, y)$ по y.

Найдем решение уравнения (1.29) при $f(x, y)$, равном (1.31). Потребуем обращения в нуль при $y = \pm a$ этого решения, которое дает нам условия для однозначного выбора $c(x)$. Продифференцируем обе части уравнения (1.29) по y, в котором $f(x, y)$ имеет вид (1.31). После этого, учитывая, что

$$K_y'(R / h) = -K_t'(R / h) \tag{1.32}$$

перебросим производную с ядра на функцию $q(s, t)$ интерированием по частям. Теперь без труда убеждаемся, что решение уравнения (1.30) имеет вид

$$p(s, t) = q_t'(s, t) \tag{1.33}$$

где $q(s, t)$ — решение [1] первого интегрального уравнения (1.29) при $f(x, y)$, равном $g^*(x, y) + c(x)$, обращающееся в нуль при $y = \pm a$.

Связь между моментом, действующим в каждом сечении штампа и его осадкой, определим по формуле

$$M(x) = \int_{-a}^{a} q(x, y)\, y\, dy \tag{1.34}$$

Отметим, что сила $P(x)$ и момент $M(x)$, действующие в каждом сечении штампа, могут быть также определены по соотношениям [2]

$$P(x) = \int_{-a}^{a} q_0(y) f(x, y)\, dy, \qquad M(x) = \int_{-a}^{a} p_1(y) f(x, y)\, dy \tag{1.35}$$

где $q_0(y)$ и $p_1(y)$ — соответственно решения для случаев $f(x, y) \equiv 1$ (плоский штамп) и $g(x, y) \equiv y$ (наклонный штамп).

§ 2. Решение интегрального уравнения (1.19). Рассмотрим несколько более общее интегральное уравнение вида

$$\int_0^\infty Q_n(\tau) K(\tau - \eta)\, d\tau = \pi \chi \eta^n \qquad (0 \leqslant \eta < \infty) \tag{2.1}$$

Замкнутое решение этого уравнения может быть, очевидно, непосредственно найдено методом Винера — Хопфа, как это сделано в работе [4]. Однако следует отметить, что существует более простой путь определения решения интегрального уравнения (2.1) при любом n, который заключается в следующем.

Пусть известно решение вспомогательного интегрального уравнения

$$\int_0^\infty Q(\varepsilon, \tau) K(\tau - \eta)\, d\tau = \pi \chi e^{i\eta\varepsilon} \qquad (0 \leqslant \eta < \infty) \tag{2.2}$$

Дифференцируя его решение n раз по ε и полагая затем $\varepsilon = 0$, получим, очевидно, после деления на i^n решение уравнения (2.1).

[1] Если известно асимптотическое решение первого интегрального уравнения (1.29) при малых значениях параметра λ, то по формуле (1.33) также получим, очевидно, асимптотическое решение уравнения (1.30).

Можно также получить решение интегрального уравнения (2.1) еще одним путем, который несколько сложнее предыдущего, но представляет значительный теоретический интерес. Именно, положим $\varepsilon = 0$ в решении уравнения (2.2); тогда, очевидно, получим решение $Q_0(\tau)$ уравнения (2.1) при $n = 0$.

Введем в рассмотрение функцию

$$\int_0^\tau Q_0(t)\,dt = Q_1{}^\circ(\tau) \tag{2.3}$$

Затем, подставим $Q_0(\tau) = Q_1{}^{\circ\prime}(\tau)$ в уравнение (2.1) при $n = 0$ и интегрированием по частям перебросим производную на $K(\tau - \eta)$. После этого, замечая, что $K_\tau{}'(\tau - \eta) = -K_\eta{}'(\tau - \eta)$, и интегрируя полученное соотношение по η в пределах от 0 до η, получим следующее интегральное уравнение для определения $Q_1{}^\circ(\tau)$:

$$\int_0^\infty Q_1{}^\circ(\tau) K(\tau - \eta)\,d\tau = \pi\chi(\eta + c) \qquad \left(c = \int_0^\infty Q_1{}^\circ(\tau) K(\tau)\,d\tau\right) \tag{2.4}$$

Внеинтегральный член, который получается при перебрасывании производной, пропадает в силу экспоненциального убывания [1] функции $K(t)$ при $|t| \to \infty$ и соотношения $Q_1{}^\circ(0) = 0$. Из уравнения (2.4) с очевидностью следует, что решение уравнения (2.1) при $n = 1$ имеет вид

$$Q_1(\tau) = Q_1{}^\circ(\tau) - cQ_0(\tau) \tag{2.5}$$

Определим теперь постоянную c в выражении (2.5), для этого наряду с интегральным уравнением (2.1) при $n = 1$ рассмотрим вспомогательное интегральное уравнение

$$\int_{-\infty}^\infty v(\tau) K(\tau - \eta)\,d\tau = \pi\chi\eta \qquad (-\infty < \eta < \infty) \tag{2.6}$$

Легко показать, что решение интегрального уравнения (2.1) при $n = 1$ и $\tau \to \infty$ стремится к решению интегрального уравнения (2.6), т. е.

$$\lim\,[Q_1(\tau) - v(\tau)] = 0 \quad \text{при } \tau \to \infty \tag{2.7}$$

Это условие как раз может служить для определения вида постоянной c. Решение уравнения (2.6) легко находится применением преобразования Фурье и имеет вид

$$v(\eta) = \frac{\chi}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \tau K^*(\tau - \eta)\,d\tau \qquad \left(K^*(t) = \int_0^\infty \frac{u}{L(u)} \cos tu\,du\right) \tag{2.8}$$

Повторяя m раз указанную выше систему процедур, получим решение интегрального уравнения (2.1) при $n = m$.

Определим теперь решение уравнения (2.2). Чтобы получить решение, пригодное для практического использования, необходимо аппроксимировать ядро $K(t)$ более простым выражением. С этой целью рассмотрим подробнее свойства функций $L(u)$ и $K(t)$.

Как легко заметить, функция $L(u)$ обладает следующими свойствами: (2.9)

$$L(u) \to Au + O(u^4) \quad \text{при } u \to 0, \quad (A = {}^1/_2); \qquad L(u) \to 1 + O(e^{-2u}) \quad \text{при } u \to \infty$$

при этом можно показать, что [2]

$$K(t) \sim -\ln|t| + B \quad \text{при } t \to 0 \qquad (B = \text{const}) \tag{2.10}$$

Покажем еще, что при больших t функция $K(t)$ экспоненциально убывает. Для этого рассмотрим вспомогательный интеграл

$$J(t) = \int_\Gamma \frac{L(z)}{z} e^{itz}\,dz \tag{2.11}$$

---

[1] Экспоненциальное убывание ядра $K(t)$ на бесконечности будет показано ниже как и некоторые другие свойства.

где $z = u + iv$, функция $L(z)$ дается вторым соотношением (1.20), контур интегрирования Γ проходит по вещественной оси[1] и замыкается в верхней полуплоскости окружностью радиуса R. Представим функцию $L(z) / z$ в виде отношения двух четных по z целых функций, именно

$$L(z) \mid z = P(z) \mid Q(z) \tag{2.12}$$

Устремляя теперь R к бесконечности в (2.11), учитывая второе свойство (2.9) и используя теорию вычетов, получим

$$K(t) = \lim_{R\to\infty} J(t) = \pi i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(\zeta_k)}{Q'(\zeta_k)} \exp(it\zeta_k) \tag{2.13}$$

Здесь ζ_k — корни целой функции $Q(z)$; отметим при этом, что $Q(z)$ не имеет кратных корней, Из (2.13) следует, что

$$K(t) \sim e^{-|t|\varkappa} \text{ при } |t| \to \infty \qquad (\varkappa = \inf |\operatorname{Im} \zeta_k|) \tag{2.14}$$

Можно также показать, что при $0 < |t| < \infty$ ядро $K(t)$ есть непрерывная и непрерывно дифференцируемая любое число раз функция.

Аппроксимируем теперь функцию $L(u)$ в согласии с (2.9) выражением

$$L(u) \approx u \frac{\sqrt{u^2 + D^2}}{u^2 + E} \qquad \left(\frac{D}{E} = A\right) \tag{2.15}$$

Как можно при этом показать, все основные свойства функции $K(t)$, указанные выше, также выполняются. В рассматриваемой нами задаче при значении $D = 1$ погрешность аппроксимации (2.15) не превосходит 12%.

Опуская изложение применения метода Винера — Хопфа к интегральному уравнению (2.2) при аппроксимации (2.15), приведем окончательный результат

$$Q(\varepsilon, \eta) = \frac{e^{i\varepsilon\eta}}{K(\varepsilon)} \operatorname{erf} \sqrt{(D + i\varepsilon)\eta} + \frac{\sqrt{E} - i\varepsilon}{\sqrt{D - i\varepsilon}} \frac{e^{-D\eta}}{\sqrt{\pi\eta}} \left(K(\varepsilon) = \frac{(\varepsilon^2 + D^2)^{1/2}}{(\varepsilon^2 + E)}\right) \tag{2.16}$$

Из (2.16) получим, как указано выше, решение уравнения (2.1) при $n = 0,1$. Аналогичные решения можно получить использованием другого, изложеного выше, приема; следует только при этом учесть, что решение уравнения (2.6) для рассматриваемой задачи имеет вид

$$v(\eta) = \chi\eta / A \tag{2.17}$$

В заключение приведем решение уравнения (1.19)

$$Q^*(\alpha, \eta) = \frac{\chi}{A} \Big\{ [b_0(\alpha) + b_1(\alpha)\eta] \operatorname{erf} \sqrt{D\eta} +$$

$$+ \left[b_0(\alpha) + b_1(\alpha) \left(\frac{\eta}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{2D} - \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{D}} \right) \right] \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\pi\eta}} e^{-D\eta} \Big\} \tag{2.18}$$

§ 3. Решение рассматриваемой контактной задачи. Подставляя (2.18) в (1.21) и используя соотношения (1.11), (1.12) и (1.14), получим асимптотическое решение рассматриваемой задачи при малых λ в виде

$$q(x, y) = \frac{2\chi}{\pi h A} \int_0^\infty \Big\{ F(\alpha, y) \operatorname{erf} \left(D \frac{F(\alpha, a) - F(\alpha, y)}{hF_y'(\alpha, a)} \right)^{1/2} +$$

$$+ \left[\left(\sqrt{A} - \frac{1}{D} \right) F(\alpha, a) + \frac{1}{\sqrt{D}} F(\alpha, y) + \left(\frac{A}{\sqrt{D}} - \frac{\sqrt{A}}{2D} \right) hF_y'(\alpha, a) \right] \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{F(\alpha, a) - F(\alpha, y)}{hF_y'(\alpha, a)} \right)^{-1/2} \exp\left(-D \frac{F(\alpha, a) - F(\alpha, y)}{hF_y'(\alpha, a)} \right) \Big\} \cos \alpha x \, d\alpha \tag{3.1}$$

В аналогичном виде можно представить также решения типа (1.25) и (1.27).

[1] Легко видеть из второго соотношения (1.20), что функция $L(z)$ не имеет полюсов на вещественной оси.

Условие обращения в нуль (1.23) решения (3.1) при $y = \pm a$, очевидно, имеет вид

$$F(\alpha, a) + \left(\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{D}} - \frac{1}{2D}\right) hF_y'(\alpha, a) = 0 \tag{3.2}$$

Подставляя (3.2) в (3.1), представим обращающееся в нуль при $y = \pm a$ решение рассматриваемой задачи в форме

$$q(x, y) = \frac{2\chi}{\pi hA} \int_0^\infty \left\{F(\alpha, y)\, \mathrm{erf}\left(D\,\frac{F(\alpha, a) - F(\alpha, y)}{hF_y'(\alpha, a)}\right)^{1/2} - \right. \tag{3.3}$$

$$\left. - \left(\frac{hF_y'(\alpha, a)}{\pi D}\,[F(\alpha, a) - F(\alpha, y)]\right)^{1/2} \exp\left(-D\,\frac{F(\alpha, a) - F(\alpha, y)}{hF_y'(\alpha, a)}\right)\right\} \cos \alpha x\, d\alpha$$

Пусть теперь $f(x, y) = g^*(x, y) + c(x)$. Определим функцию $c(x)$ из условия (3.2) обращения в нуль решения на краях штампа

$$c(\alpha) = -G^*(\alpha, a) - \left(\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{D}} - \frac{1}{2D}\right) hG_y^{*\prime}(\alpha, a) \tag{3.4}$$

Здесь $c(\alpha)$ и $G^*(\alpha, y)$ — косинус-трансформанты Фурье функций $c(x)$ и $g^*(x, y)$. Подставляя в (3.3) трансформанту $F(\alpha, y) = G^*(\alpha, y) + c(\alpha)$ и дифференцируя затем обе части соотношения (3.3) по y, получим, в соответствии с (1.33), асимптотическое решение при малых λ рассматриваемой нами задачи для случая нечетной по y функции $g(x, y)$ — осадки поверхности упругого слоя под штампом

$$p(x, y) = \frac{2\chi}{\pi hA} \int_0^\infty G(\alpha, y) \left[\mathrm{erf}\left(D\,\frac{G^*(\alpha, a) - G^*(\alpha, y)}{hG_y^{*\prime}(\alpha, a)}\right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \left(\pi\,\frac{G^*(\alpha, a) - G^*(\alpha, y)}{AhG_y^{*\prime}(\alpha, a)}\right)^{-1/2} \exp\left(-D\,\frac{G^*(\alpha, a) - G^*(\alpha, y)}{hG_y^{*\prime}(\alpha, a)}\right)\right] \cos \alpha x\, d\alpha \tag{3.5}$$

где $G(\alpha, y)$ — косинус-трансформанта Фурье функции $g(x, y)$.

Рассмотрим теперь случай, когда косинус-трансформанта Фурье $F(\alpha, y)$ функции $f(x, y)$ не строго монотонна по y. В этом случае, как отмечалось в § 1, необходимо представить функцию $F(\alpha, y)$ в форме

$$F(\alpha, y) = \varphi(\alpha, y) - \psi(\alpha, y) \tag{3.6}$$

где функции $\varphi(\alpha, y)$ и $\psi(\alpha, y)$ строго монотонны по y и удовлетворяют другим свойствам, указанным в § 1. Тогда асимптотическое решение при малых λ рассматриваемой задачи можно представить в виде комбинации

$$q(x, y) = q_1(x, y) - q_2(x, y) \tag{3.7}$$

где $q_1(x, y)$ и $q_2(x, y)$ определяются по формуле (3.1), в которой $F(\alpha, y)$ соответственно равно $\psi(\alpha, y)$ и $\varphi(\alpha, y)$.

Для частного случая $f(x, y) \equiv f(x)$, который, как будет показано дальше, играет важную роль, решение (3.7), принимает вид

$$q(x, y) = \frac{2\chi}{\pi hA} \int_0^\infty F(\alpha) \left[\mathrm{erf}\left(D\,\frac{\varphi(\alpha, a) - \varphi(\alpha, y)}{h\varphi_y'(\alpha, a)}\right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \left(\pi\,\frac{\varphi(\alpha, a) - \varphi(\alpha, y)}{Ah\varphi_y'(\alpha, a)}\right)^{-1/2} \exp\left(-D\,\frac{\varphi(\alpha, a) - \varphi(\alpha, y)}{h\varphi_y'(\alpha, a)}\right)\right] \cos \alpha x\, d\alpha \tag{3.8}$$

где $F(\alpha)$ — косинус-трансформанта Фурье функции $f(x)$.

Сила и момент, действующие в сечении штампа, могут быть определены по формулам (1.22), (1.34) или (1.35). Причем формулу для силы (1.35) после несложных преобразований можно представить в виде

$$P(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \alpha x \, d\alpha \int_{-a}^{a} F(\alpha, y) \, Q_0(\alpha, y) \, dy \tag{3.9}$$

где $Q_0(\alpha, y)$ — выражение в формуле (3.8), заключенное в квадратные скобки, в котором $\varphi(\alpha, y)$ рационально заменить на функцию $F(\alpha, y)$.

Легко видеть из формул (3.7) и (3.8), что асимптотичеекое решение рассматриваемой задачи при малых λ определяется не однозначно, именно, имеется произвол в выборе функции $\varphi(\alpha, y)$, которая лишь обладает указанными в § 1 свойствами. При этом, очевидно, получающиеся решения асимптотически равноценны между собой при малых λ, однако широта границ практического использования их по λ, по-видимому, зависит от удачи в выборе функции $\varphi(\alpha, y)$. Выяснить точные границы практического использования получающихся решений можно, только построив следующий член асимптотики решения рассматриваемой задачи при малых значениях λ. Здесь этот вопрос не рассматривается; однако конкретные расчеты показали, что все получающиеся решения можно с надежностью использовать, по крайней мере, в диапазоне $0 < \lambda \leqslant 1/2$.

В данной работе функцию $\varphi(\alpha, y)$ будем выбирать из условий удобства. Именно: 1) если функция $F(\alpha, y)$ не является строго монотонной по $|y|$, то функцию $\varphi(\alpha, y)$ желательно брать аналитической по y для $0 \leqslant |y| \leqslant a$, чтобы она не выносила в решение рассматриваемой задачи своих асимптотически малых при малых λ, особенностей, 2) если функция $F(\alpha, y)$ строго монотонна по $0 \leqslant |y| \leqslant a$, то функцию $\varphi(y, \alpha)$ желательно брать тождественным нулем, 3) если функция $F(\alpha, y) \equiv F(\alpha)$, что соответствует плоскому по y штампу, то функция $\varphi(\alpha, y)$ в (3.8) произвольна, однако, если $F(\alpha)$ комбинируется с нечетной по y функцией [1] $G(\alpha, y)$, то функцию $\varphi(\alpha, y)$ в (3.8) желательно брать равной $G^*(\alpha, y)$.

Рассмотрим плоскую задачу, именно случай, когда $f(x, y) \equiv f(y)$. Все ранее полученные формулы, очевидно, могут быть при этом использованы, если учесть, что косинус-трансформанта Фурье для функции $f(x, y)$ принимает вид

$$F(\alpha, y) = \pi\delta(\alpha) f(y) \tag{3.10}$$

где $\delta(\alpha)$ — дельта-функция Дирака, и воспользоваться известными свойствами функции $\delta(\alpha)$. Например, формула (3.1) может быть представлена в форме

$$q(y) = \frac{\chi}{hA} \left\{ f(y) \operatorname{erf}\left(D \frac{f(a) - f(y)}{hf'(a)}\right)^{1/2} + \left[\left(\sqrt{A} - \frac{1}{\sqrt{D}}\right) f(a) + \frac{1}{\sqrt{D}} f(y) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{A}{\sqrt{D}} - \frac{\sqrt{A}}{2D}\right) hf'(a)\right] \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{f(a) - f(y)}{hf'(a)}\right)^{-1/2} \exp\left(-D \frac{f(a) - f(y)}{hf'(a)}\right)\right\} \tag{3.11}$$

Аналогичную форму принимают остальные формулы (3.3), (3.5) и (3.8).

Как легко заметить, решение (3.11) внутри линии контакта $[-a, a]$ быстро стремится к соответствующему вырожденному решению, определяемому формулой [2]

$$q(y) = \chi f(y) / Ah, \qquad |y| \leqslant a \tag{3.12}$$

[1] Аналогичный факт имеет место для общего случая (3.1).

[2] Имеется в виду рассмотрение случая $F(\alpha, y) = F(\alpha) + G(\alpha, y)$.

Если функция $f(y)$ имеет внутри линии контакта угловые точки $y = b_i$, то из (3.11) и (3.12) следует, что в этих точках решение задачи $q(y)$ будет вести себя как $|y - b_i|$.

Если функция $g(y)$ имеет внутри линии контакта разрывы первого рода в точках $y = c_i$, то аналогичным путем можно установить, что решение задачи $p(y)$ в этих точках ведет себя как $\operatorname{sign}(y - c_i)$.

Однако, как известно [5], в случае упругого полупространства решение контактной задачи в угловых точках функции $f(y)$ имеет логарифмические особенности, а в точках разрывов первого рода функции $g(y)$ — сингулярные особенности. Можно доказать, что этот вид особенностей сохраняется и в рассматриваемом случае контактной задачи для слоя. Таким образом, обнаруживается неверное поведение получаемых решений в угловых точках функции $f(y)$ и точках разрыва первого рода функции $g(y)$, которое, тем не менее, практически не влияет для достаточно малых λ на точность решения рассматриваемых задач в промежутках между указанными точками на отрезке $y \in [-a, a]$ и на интегральные характеристики решения—силу, момент.

Можно получить асимптотическое решение при малой относительной толщине слоя λ, имеющее необходимые особенности в указанных выше точках. Такое уточненное решение представимо в форме

$$q(y) = q_1(y) + q_2(y) - \frac{\chi f(y)}{Ah} \tag{3.13}$$

где $q_1(y)$ дается формулой (3.11) и соответствующей ей формулой, получаемой из (3.5), а $q_2(y)$ имеет вид

$$q_2(y) = \frac{\chi}{\pi h^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) K^* \left(\frac{\eta - y}{h}\right) d\eta \tag{3.14}$$

или, с учетом аппроксимации (2.15)

$$q_2(y) = \frac{\chi}{\pi h^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \left[\left(\frac{D}{A} - D^2\right) K_0\left(D\,\frac{\eta - y}{h}\right) - \frac{Dh}{\eta - y} K_1\left(D\,\frac{\eta - y}{h}\right)\right] d\eta \tag{3.15}$$

Можно показать, что $q_2(y)$ имеет логарифмические и сингулярные особенности в соответствующих точках, а также быстро стремится к вырожденному решению вида (3.12) при удалении от этих точек.

Отметим, что в случае плоских задач ($f(x, y) \equiv f(y)$) границы применимости получаемых описанным выше образом асимптотических решений при малых λ могут быть расширены применением следующего метода корректировки.

Пусть $q_0(y)$ — асимптотическое решение плоской задачи для плоского штампа, которое может быть определено по формуле (3.8). Очевидно, выражение $q^*(y) = q_0(y)\,\varkappa(\lambda)$ также является асимптотическим решением той же задачи, если $\varkappa(\lambda) \to 1$ при $\lambda \to 0$, т. е. оно асимптотически при малых λ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int_{-a}^{a} q^*(\eta)\, d\eta \int_0^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos\left(\frac{\eta - y}{h} u\right) du = \pi\chi \tag{3.16}$$

при всех значениях $|y| \leqslant a$, которое получается из уравнения (1.29) для случая плоской задачи. В частности, при $y = 0$ из (3.16) получим следующее выражение для корректирующего множителя $\varkappa(\lambda)$:

$$\varkappa(\lambda) = \pi\chi \left[\int_{-a}^{a} q_0(\eta)\, d\eta \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos\left(\frac{\eta u}{h}\right) du \right]^{-1} \tag{3.17}$$

Интеграл (3.17) можно затабулировать на ЦВМ по параметру λ. Вычисления показали, что уточненное решение $q^*(y)$ имеет расширенные границы применимости, именно его можно использовать с достаточной точностью при $0 < \lambda < 2$.

Приведем некоторые результаты вычислений. Полагая в (3.8) функцию $F(\alpha) = \delta(\alpha)$ и выбирая $\varphi(\alpha, y) \equiv y^2$, получим выражение для $q_0(y)$ в виде

$$q_0(y) = \frac{\chi}{A\lambda a} \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{D}{2\lambda}\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)\right]^{1/2} + \sqrt{\frac{2A\lambda}{\pi}} \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)^{-1/2} \exp\left[-\frac{D}{2\lambda}\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)\right] \right\} \tag{3.18}$$

Дадим еще выражение для силы P, полученное по формуле (1.22) с использованием (3.18)

$$P = \frac{\chi}{A\lambda} \left(\frac{\pi D}{2\lambda}\right)^{1/2} e^{-D/4\lambda} \left[\left(1 + 2\lambda \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{D}}\right) \left(I_0(D/4\lambda) + I_1(D/4\lambda)\right) \right] \tag{3.19}$$

В таблице приведены результаты вычислений корректирующего множителя $\varkappa(\lambda)$, полученного по формулам (3.17) и (3.18), а также значения напряжений $q_0(y)$, $q^*(y)$ и

	λ	$\varkappa$	x/a						
			0	0.4	0.6	0.8	0.95	ω/χ	$P/\chi a$
$\frac{aq^0}{\chi}$	1/2		3.95	3.97	4.02	4.27	5.89	1.59	8.91
	1		2.05	2.09	2.18	2.48	3.93	1.13	5.03
	2		1.14	1.19	1.28	1.54	2.67	0.80	3.05
$\frac{aq^*}{\chi}$	1/2	1.00	3.95	3.97	4.02	4.27	5.89	1.59	8.91
	1	0.93	1.90	1.94	2.02	2.30	3.65	1.05	4.67
	2	0.87	0.99	1.04	1.12	1.35	2.33	0.70	2.66
$\frac{aq}{\chi}$ [4]	1/2		3.97	3.94	3.90	4.00	5.74	1.58	8.71
	1		1.92	1.93	1.99	2.24	3.80	1.12	4.70
	2		0.97	1.01	1.10	1.38	2.56	0.79	2.75

соответствующие им практически точные значения напряжений, взятые из работы [4]. В последних двух колонках даны значения величин $\omega = \lim q(y)\sqrt{a^2 - y^2}$ при $y \to a$ и силы P.

Построив уточненное решение задачи $q^*(y)$ для плоского штампа, можно по формуле М. Г. Крейна [6] определить соответствующее уточненное решение задачи для любого неплоского штампа. Найденные таким образом приближенные решения рассматриваемой задачи вместе с соответствующими приближенными решениями [2, 7] метода больших λ перекрывает весь диапазон изменения параметра $\lambda \in (0, \infty)$ с достаточной для практического использования точностью.

В заключение работы рассмотрим конкретный пример $f(x, y) \equiv |y|$ (плоская задача) По формуле (3.11) без труда получим асимптотическое при малых λ решение в виде

$$q(y) = \frac{\chi}{\lambda A} \left\{ \frac{|y|}{a} \operatorname{erf}\left(D \frac{a - |y|}{h}\right)^{1/2} + \left[\left(\sqrt{A} - \frac{1}{\sqrt{D}}\right) + \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{|y|}{a} + \left(\frac{A}{\sqrt{D}} - \frac{\sqrt{A}}{2D}\right)\lambda \right] \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{a - |y|}{h}\right)^{-1/2} \exp\left(-D \frac{a - |y|}{h}\right) \right\} \tag{3.20}$$

Выражение для силы получим по формулам (1.22) и (1.35)

$$P = \frac{2\chi a}{\lambda A}\left\{\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{D}}+\frac{A}{D}-\frac{\sqrt{A}}{2D\sqrt{D}}-\frac{1}{2D}\right)\lambda-\frac{1}{8}\frac{\lambda^2}{D^2}\right]\operatorname{erf}\sqrt{\frac{D}{\lambda}}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\frac{\lambda}{D}\right)\left(\frac{\lambda}{D\pi}\right)^{1/2}e^{-D/\lambda}\right\} \qquad (3.21)$$

$$P = \frac{2\chi a}{\lambda A}\left\{\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{D}}-\frac{1}{2D}\right)\lambda+\left(\frac{3}{8D^2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{D}}\right)\lambda^2\right]\operatorname{erf}\left(\frac{D}{\lambda}\right)^{1/2}+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2D}+\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{D}}\right)\lambda\right]\left(\frac{\lambda}{D\pi}\right)^{1/2}e^{-D/\lambda}\right\} \qquad (3.22)$$

Теперь по формуле (3.5) легко найдем асимптотическое решение задачи для случая $g(x, y) \equiv \operatorname{sign} y$ в виде

$$p(y) = \frac{\chi \operatorname{sign} y}{hA}\left[\operatorname{erf}\left(D\frac{a-|y|}{y}\right)^{1/2}+\left(\pi\frac{a-|y|}{Ah}\right)^{-1/2}\exp\left(-D\frac{a-|y|}{h}\right)\right] \qquad (3.23)$$

Выражение для момента, определяемое формулой (1.34), имеет вид (3.22), а выражение, определяемое формулой (1.35), представимо в форме

$$M = \frac{2\chi a}{\lambda A}\left\{\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{D}}-\frac{1}{2D}\right)\lambda\right]\operatorname{erf}\left(\frac{D}{2\lambda}\right)^{1/2}+\left(\frac{\lambda}{2\pi D}\right)^{1/2}e^{-D/2\lambda}\right\} \qquad (3.24)$$

Обе формулы для силы (3.21), (3.22) и момента (3.22) и (3.24) асимптотически равны

	$\lambda = 1/2$	$1/4$	$1/8$
$P_{(3.21)}$	$=1.42$	2.33	4.34
$P_{(3.22)}$	$=1.34$	2.22	4.21
$M_{(3.24)}$	$=1.23$	2.21	4.21

и дают при $0 < \lambda \leqslant 1/2$ практически совпадающие результаты, приведенные здесь справа.

Отметим, что полученные результаты полностью применимы к аналогичной контактной задаче для слоя, когда его нижняя граница жестко соединена с недеформируемым основанием. Меняются при этом лишь значения A и D в аппроксимации (2.15).

§ 4. Постановка контактной задачи для упругого слоя (случай круглого в плане штампа). Рассмотрим теперь задачу о действии штампа в орме круга на упругий слой малой толщины.

Представим функцию $f(r, \varphi)$, определяющую осадку точек поверхности упругого слоя под штампом, в виде

$$f(r, \varphi) = f_+(r, \varphi) + f_-(r, \varphi) \qquad (4.1)$$

Здесь $f_+(r, \varphi)$ и $f_-(r, \varphi)$ — соответственно четная и нечетная функции по φ. Ниже будем рассматривать только четный случай, учитывая, что нечетный получается аналогично. При этом знак плюс у функции $f_+(r, \varphi)$ далее опускаем.

Требуется определить контактное давление под штампом

$$q(r, \varphi) = -\sigma_z|_{z=h} \qquad (0 \leqslant r \leqslant a) \qquad (4.2)$$

связь между усилиями, действующими на штамп, и степенью внедрения штампа в слой.

Предполагая, что функция $f(r, \varphi)$ допускает разложение в ряд Фурье — Бесселя вида

$$f(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r)\cos n\varphi \qquad (4.3)$$

будем искать решение системы уравнений Ламе в цилиндрических координатах при граничных условиях рассматриваемой задачи в виде

$$u(r,\varphi,z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(r,z)\cos n\varphi,\qquad v(r,\varphi,z)=\sum_{n=0}^{\infty}v_n(r,z)\sin n\varphi \tag{4.4}$$

$$w(r,\varphi,z)=\sum_{n=0}^{\infty}w_n(r,z)\cos n\varphi$$

Тогда для определения u_n, v_n, w_n получим

$$\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\theta_n}{\partial r}+\triangle w_n=0\qquad \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\theta_n}{\partial r}+\triangle u_n-\frac{u_n}{r^2}-\frac{2n}{r^2}v_n=0$$

$$\frac{1}{1-2\nu}\frac{n\theta_n}{r}+\triangle v_n-\frac{v_n}{r^2}-\frac{2n}{r^2}u_n=0 \tag{4.5}$$

$$\left(\triangle=\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2},\quad \theta_n=\frac{\partial w_n}{\partial z}+\frac{\partial u_n}{\partial r}+\frac{u_n}{r}+\frac{n}{r}v_n\right)$$

(ν — коэффициент Пуассона)

Соответствующие граничные условия принимают следующую форму:

$$\frac{\partial u_n}{\partial z}+\frac{\partial w_n}{\partial r}=0,\qquad \frac{\partial v_n}{\partial z}-\frac{nw_n}{r}=0\qquad (0\leqslant r<\infty) \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial w_n}{\partial z}+\frac{\nu}{1-2\nu}\theta_n=0\quad (a<r<\infty),\qquad w_n=-f_n(r)\quad (0\leqslant r\leqslant a)$$

при $z=0$

$$\frac{\partial u_n}{\partial z}+\frac{\partial w_n}{\partial r}=0\quad (0\leqslant r<\infty),\qquad \frac{\partial v_n}{\partial z}-\frac{nw_n}{r}=0\quad (0\leqslant r\leqslant\infty)$$

$$w_n=0\quad (0\leqslant r<\infty),\qquad u_n,\ v_n,\ w_n\to 0\quad (r\to\infty)$$

Предполагая, что функции $f_n(r)$ удовлетворяют по $0\leqslant r\leqslant a$ свойствам 1) — 3), указанным в § 1, произведем в уравнениях (4.5) и граничных условиях (4.6) замену переменных вида

$$\eta=\frac{a-r}{h}\omega(r),\qquad \zeta=-\frac{z}{h}\qquad \begin{pmatrix}0\leqslant r<\infty\\ 0\leqslant z\leqslant h\end{pmatrix} \tag{4.7}$$

где

$$\omega(r)=\frac{f_n(a)-f_n(r)}{f_n'(a)(a-r)}\quad (0\leqslant r\leqslant a),\qquad \omega(r)=\frac{f_n(a)-f_n^*(r)}{f_n^{*\prime}(a)(a-r)}\quad (a\leqslant r<\infty) \tag{4.8}$$

Здесь $f_n^*(r)$ — произвольная строго монотонная функция, непрерывно продолжающая функцию $f_n(r)$ в область $a\leqslant r<\infty$.

Обратная замена при малых λ имеет вид $r=a-h\eta+\ldots$, $z=-h\zeta$. После введения замены переменных (4.7) в вышеуказанных уравнениях и граничных условиях, пренебрегая в полученных соотношениях членами порядка h и h^2 и полагая $\lambda^{-1}=\infty$, получим следующую систему дифференциальных уравнений и граничных условий:

$$D^2v_n^*=0\qquad \left(D^2=\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)$$

$$(1-2\nu)D^2u_n^*+\theta_\eta^{*\prime}=0\qquad \left(\theta^*=\frac{\partial u_n^*}{\partial\eta}+\frac{\partial w_n^*}{\partial\zeta}\right) \tag{4.9}$$

$$(1-2\nu)D^2w_n^*+\theta_\zeta^{*\prime}=0$$

при $\zeta=-1$

$$v_{n\zeta}{}^{*\prime}=0 \quad (-\infty<\eta<\infty), \quad u_{n\zeta}{}^{*\prime}+w_{n\eta}{}^{*\prime}=0 \quad (-\infty<\eta<\infty) \tag{4.10}$$
$$(1-2\nu)\, w_{n\eta}{}^{*\prime}+\nu\theta^*=0 \quad (-\infty<\eta<0),$$
$$w_n{}^*=-(b_{n0}+b_{n1}\eta) \quad (0\leqslant\eta<\infty)$$

при $\zeta=0$

$$v_{n\zeta}{}^{*\prime}=0 \quad (-\infty<\eta<\infty), \quad u_{n\zeta}{}^{*\prime}+w_{n\eta}{}^{*\prime}=0 \quad (-\infty<\eta<\infty)$$
$$v_n{}^*=0 \quad (-\infty<\eta<\infty), \qquad u_n{}^*,\ v_n{}^*,\ w_n{}^*\to 0 \quad (\eta\to\infty)$$

Здесь

$$b_{n0}=f_n(a), \qquad b_{n1}=-hf_n{}'(a) \tag{4.11}$$

Так же, как и в § 1, исходная задача распалась на две задачи. Первая определяется первым уравнением (4.9) и первым и пятым граничными условиями (4.10) и в качестве решения имеет тождественный нуль; вторая задача, определяемая вторым и третьим уравнениями (4.9) и оставшимися граничными условиями (4.10), представляет собой плоскую контактную задачу о действии полубесконечного плоского наклонного штампа на упругую полосу единичной толщины. Последняя задача сводится [2] к решению интегрального уравнения

$$\int_0^\infty q_n{}^*(\tau) K(\tau-\eta)\, d\tau=\pi\chi\,(b_{n0}+b_{n1}\eta) \qquad (0\leqslant\eta<\infty) \tag{4.12}$$

где $K(\tau-\eta)$ и χ даются формулами (1.14).

Решив интегральное уравнение (4.12), можно найти решение исходной задачи $q(r,\varphi)$ по формуле

$$q(r,\varphi)=\sum_{n=0}^\infty q_n(r)\cos n\varphi=\frac{1}{h}\sum_{n=0}^\infty q_n{}^*(\eta)\cos n\varphi \tag{4.13}$$

Связь между усилиями, действующими на штамп, и его осадкой определим формулами

$$P=2\pi\int_0^a q_0(r)\, r\, dr, \qquad M_y=\pi\int_0^a q_1(r)\, r^2\, dr \tag{4.14}$$

Обращающееся в нуль при $r=a$ решение задачи при фиксированном a будет, очевидно, иметь место при условии

$$\lim_{r\to a}\sqrt{a^2-r^2}\sum_{n=0}^\infty q_n(r)\cos n\varphi=0 \tag{4.15}$$

которое налагает определенные ограничения на функцию $f(r,\varphi)$.

Отметим еще, что сила P и момент M_y могут быть также определены по соотношениям [8]

$$P=2\pi\int_0^a p_0(r) f_0(r)\, r\, dr, \qquad M_y=\pi\int_0^a p_1(r) f_1(r)\, rd \tag{4.16}$$

где $p_0(r)$ и $\cos\varphi p_1(r)$ — соответственно решения для случаев $f(r,\varphi)\equiv 1$ (плоский штамп) и $f(r,\varphi)=r\cos\varphi$ (наклонный штамп).

§ 5. **Некоторые представления решения неосесимметричных контактных задач для круглого в плане штампа.** Покажем, что решение контактной задачи для круглого штампа с произвольным основанием $f(r, \varphi)$ всегда можно представить в виде комбинации решений осесимметричных задач определенной гладкости на контуре $r=a$, на каждое из которых действует некоторый дифференциальный оператор.

Действительно, предполагая возможность разложения функции $f(r, \varphi)$ в ряд Фурье-Бесселя вида (4.3) и используя известные тригонометрические формулы, можно заключить, что для решения задачи достаточно научиться находить решение для частного случая

$$f(r, \varphi) = \Psi_n(r) \cos^n \varphi \tag{5.1}$$

Покажем, что функцию $\Psi_n(r) \cos^n \varphi$ можно всегда представить в форме

$$\Psi_n(r) \cos^n \varphi = \sum_{k=1}^{n} \Phi_{kx}^{(k)}(r) \tag{5.2}$$

Продифференцируем произвольную функцию $\Phi_n(r)$ n раз по x, получим

$$\Phi_{nx}^{(n)}(r) = \sum_{k=1}^{n} D_k(\Phi_n) \cos^k \varphi \qquad \left(D_n = r^n \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^n\right) \tag{5.3}$$

Здесь D_k — некоторый дифференциальный оператор по r порядка k, в частности для $k = n$, указан в скобках.

Равенство (5.3) можно переписать в форме

$$D_n(\Phi_n) \cos^n \varphi = \Phi_{nx}^{(n)}(r) - \sum_{k=1}^{n-1} D_k(\Phi_n) \cos^k \varphi \tag{5.4}$$

Возьмем функцию $\Phi_n(r)$ в виде

$$\Phi_n(r) = D_n^{-1}(\Psi_n) \tag{5.5}$$

Здесь оператор D_n^{-1}, очевидно, будет интегральным и определяет функцию $\Phi_n(r)$ с точностью до полинома $n - 1$ порядка.

Тогда равенство (5.4) можно переписать в форме

$$\Psi_n(r) \cos^n \varphi = \Phi_{nx}^{(n)}(r) - \sum_{k=1}^{n-1} D_k[D_n^{-1}(\Psi_n)] \cos^k \varphi \tag{5.6}$$

Используя соотношение (5.6), справедливое для любого n, и обозначив

$$\Psi_{n-1}(r) = D_{n-1}[D_n^{-1}(\Psi_n)] \tag{5.7}$$

получим

$$\Psi_n(r) \cos^n \varphi = \Phi_{nx}^{(n)}(r) + \Phi_{(n-1)x}^{(n-1)}(r) - \sum_{k=1}^{n-2} D_k[D_n^{-1}(\Psi_n) + D_{n-1}^{-1}(\Psi_{n-1})] \cos^k \varphi \tag{5.8}$$

где функция $\Phi_{n-1}(r)$ определяется по формуле (2.5) с точностью до полинома $n - 2$ порядка. Продолжая этот процесс дальше, придем к равенству (5.2).

Определив все функции $\Phi_k(r)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) с точностью до полиномов $k - 1$ порядка, найдем затем решения $q_k(r)$ осесимметричных контактных задач для штампов с основаниями вида

$$f(r, \varphi) = \Phi_k(r) \tag{5.9}$$

После этого коэффициенты произвольных полиномов определим из следующих линейных алгебраических систем

$$\lim_{r \to a} \frac{d^s}{dr^s} q_k(r) = 0 \qquad \left(\begin{matrix} s = 0, 1, \ldots, k-1 \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{matrix}\right) \tag{5.10}$$

Покажем теперь, что решение задачи, соответствующее случаю (5.1), можно записать в виде

$$q(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{n} q_{kx}^{(k)}(r) \tag{5.11}$$

Действительно, продифференцировав k раз по x тождественно выполняющееся равенство (см. для сравнения (1.23))

$$\iint\limits_{s^2+t^2\leqslant a^2} q_k(\rho) K(R/h)\, ds dt = 2\pi h\chi\Phi_k(r) \qquad \begin{pmatrix} r^2 = x^2+y^2 \\ \rho^2 = s^2+t^2 \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

и произведя в левой части k раз интегрирование по частям, в результате получим

$$\iint\limits_{s^2+t^2\leqslant a^2} q_{ks}^{(k)}(\rho) K(R/h)\, ds dt = 2\pi h\chi\Phi_{kx}^{(k)}(r) \tag{5.13}$$

При этом внеинтегральные члены пропали в силу равенств (5.10).

Равенства (5.13) и (5.2) свидетельствуют о справедливости (5.11).

Если параметр λ мал, то изложенный выше алгоритм, справедливый для всех $\lambda \in (0, \infty)$, сильно упрощается. Именно, из результатов § 4 следует, что в случае (5.1) решение задачи можно записать в форме $q(r,\varphi) = q_n(r)\cos^n\varphi$, где $q_n(r)$ — решение осесимметричной задачи для случая $f(r,\varphi) = \psi_n(r)$.

§ 6. Решение рассматриваемой контактной задачи (круг). Как показано в § 4, решение рассматриваемой контактной задачи сводится к определению функций $q_n^*(\tau)$ из интегрального уравнения Винера — Хопфа (4.12). Решение этого интегрального уравнения, пригодное для дальнейшего, дано в § 2.

Используя формулу (2.21) и формулы (4.7), (4.8), (4.11), (4.13), получим асимптотическое решение задачи при малых λ в виде (6.1)

$$q(r,\varphi) = \frac{\chi}{hA}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{f_n(r)\,\mathrm{erf}\left(\frac{f_n(a)-f_n(r)}{hf_{nr}'(a)}\right)^{1/2} + \left[\left(\sqrt{A}-\frac{1}{\sqrt{D}}\right)f_n(a) + \frac{1}{\sqrt{D}}f_n(r) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{A}{\sqrt{D}} - \frac{\sqrt{A}}{2D}\right)hf_{hr}'(a)\right]\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{f_n(a)-f_n(r)}{hf_{nr}'(a)}\right)^{-1/2}\exp\left(-D\,\frac{f_n(a)-f_n(r)}{hf_{nr}'(a)}\right)\right\}\cos n\varphi$$

Формула (6.1) целиком аналогична формуле (3.1). На основании (6.1) может быть получено обращающееся в нуль при $r = a$ решение рассматриваемой задачи, также аналогичное (3.2), и (3.3). Если функции $f_n(r)$, или какая-либо из них, не строго монотонны по $0 < r \leqslant a$, то опять-таки необходимо повторить все те рассуждения, которые приводятся для этого случая в § 1.

Отметим, что формула (6.1) и другие формулы, получаемые на ее основе, так же как и формулы § 3, можно с надежностью использовать, по крайней мере, в диапазоне

$$0 < \lambda = h/a \leqslant 1/2$$

Случай осесимметричной задачи, который, как показано в § 5, играет большую роль, получается при условии $f_n(r) \equiv 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Для этого случая, аналогично тому, как было сделано в § 3 для случая плоской задачи, в угловых точках функции $f(r)$ могут быть построены дополнительные пограничные слои, которые в сочетании с основным решением задачи (6.1) дают возможность получить в этих точках нужные особенности.

На основании формулы (6.1) получим асимптотическое при малых λ решение рассматриваемой контактной задачи для случая $f(r) \equiv 1$ (плоский штамп) в виде

$$q(r) = \frac{\chi}{hA}\left[\mathrm{erf}\left(D\,\frac{\varphi(a)-\varphi(r)}{h\varphi_r'(a)}\right)^{1/2} + \left(\pi\,\frac{\varphi(a)-\varphi(r)}{h\varphi_r'(a)}\right)^{-1/2}\exp\left(-D\,\frac{\varphi(a)-\varphi(r)}{h\varphi_r'(a)}\right)\right] \tag{6.2}$$

где $\varphi(r)$ — произвольная, строго монотонная по $0 < r \leqslant a$ функция, удовлетворяющая также другим свойствам, указанным в § 1.

Границы применимости формулы (6.2) могут быть расширены до $\lambda = 2$ введением корректирующего множителя, аналогично тому, как сделано в § 3. После этого по формуле М. Г. Крейна [6] можно определить уточненные решения для любого неплоского штампа в случае осевой симметрии, которые в сочетании с соответствующими решениями метода больших λ [3, 8-10] перекроют с достаточной точностью весь диапазон изменения параметра $\lambda \in (0, \infty)$. Учитывая же формулы, связывающие неосесимметричные контактные задачи для круглого штампа с осесимметричными, которые даны в § 5, можем заключить, что при действии круглого штампа с произвольным основанием на слой весь диапазон изменения λ может быть перекрыт достаточно простыми формулами с необходимой для практического использования точностью.

Приведем теперь несколько конкретных примеров.

Рассмотрим случай параболического штампа $f(r, \varphi) \equiv r^2$. Воспользовавшись формулой (6.1), получим решение задачи в форме

$$q(r) = \frac{\chi a^2}{hA}\left\{\frac{r^2}{a^2}\operatorname{erf}\left[\frac{D}{2\lambda}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\right]^{1/2} + \left[\left(\sqrt{A}-\frac{1}{\sqrt{D}}\right)+\frac{1}{\sqrt{D}}\frac{r^2}{a^2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{A}{\sqrt{D}}-\frac{\sqrt{A}}{2D}\right)\lambda\right]\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{2\lambda}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\right]^{-1/2}\exp\left[-\frac{D}{2\lambda}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\right]\right\} \quad (6.3)$$

Выражение для силы, полученное по формуле (4.14), имеет вид

$$P = \frac{\pi\chi a^3}{2A\lambda}\left\{[1+(2\sqrt{AD}-1)2p^{-2}+(4AD-2\sqrt{AD}-1)p^{-4}]\operatorname{erf}\frac{p}{\sqrt{2}}-\right.$$
$$\left.-2(1-p^2)\frac{\exp(-{}^1/{}_2p^2)}{p\sqrt{2\pi}}\right\} \quad \left(p=\left(\frac{D}{\lambda}\right)^{1/2}\right) \quad (6.4)$$

В случае конического штампа ($f(r, \varphi) \equiv r$) на основании формулы (6.1) найдем

$$q(r) = \frac{\chi}{\lambda A}\left\{\frac{r}{a}\operatorname{erf}\left(D\frac{a-r}{h}\right)^{1/2}+\left[\left(\sqrt{A}-\frac{1}{\sqrt{D}}\right)+\frac{1}{\sqrt{D}}\frac{r}{a}+\left(\frac{A}{\sqrt{D}}-\frac{\sqrt{A}}{2D}\right)\lambda\right]\times\right.$$
$$\left.\times\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{a-r}{h}\right)^{-1/2}\exp\left(-D\frac{a-r}{h}\right)\right\} \quad (6.5)$$

Соответствующее значение силы, полученное по формулам (4.14), представимо в формуле

$$P = \frac{2\pi\chi a^2}{A\lambda}\left\{\left[\frac{1}{3}+\left(\sqrt{AD}-\frac{1}{2}\right)p^{-2}+\left(AD-\sqrt{AD}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{D}\right)p^{-4}+\right.\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{4}\sqrt{AD}+\frac{3}{4}\sqrt{D}-\frac{1}{2}AD-\frac{5}{8}\right)p^{-6}\right]\operatorname{erf}p+\left[\frac{7}{6}+(\sqrt{AD}-\frac{3}{2}-2\sqrt{D})p^{-2}+\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{5}{4}+AD-\frac{1}{2}\sqrt{AD}-\frac{3}{2}\sqrt{D}\right)p^{-4}\right]\frac{\exp(-p^2)}{p\sqrt{\pi}}\right\} \quad (6.6)$$

Рассмотрим теперь случай внедрения плоского наклонного штампа $f(r, \varphi) = r\cos\varphi$.

Асимптотическое при малых λ решение этой задачи можно получить двумя путями.

Во-первых, можно воспользоваться формулой (4.13) и записать решение в форме (6.5), умноженной на $\cos\varphi$.

Во-вторых, решение этой задачи получится, если продифференцировать по x решение для штампа с основанием

$$f(r, \varphi) = r^2 + c \quad (6.7)$$

которое определяется по формуле (6.1). Причем c подбирается по методике, изложенной в § 5, из условия обращения в нуль при $r = a$ решения для (6.7).

Проделав все указанные операции, получим

$$q(r, \varphi) = \frac{\chi r\cos\varphi}{\lambda A a}\left\{\operatorname{erf}\left[\frac{D}{2\lambda}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\right]^{1/2}+\left[\frac{\pi}{2A\lambda}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\right]^{-1/2}\exp\left[-\frac{D}{2\lambda}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\right]\right\} \quad (6.8)$$

Выражения для моментов вычисляются по формуле (4.14) для обоих вариантов решения и имеют соответственно вид

$$M_y=\frac{\pi\chi a^3}{A\lambda}\left\{\left[\frac{1}{4}+\left(\sqrt{AD}-\frac{1}{2}\right)p^{-2}+\left(\frac{5}{8}+AD-\frac{3}{2}\sqrt{AD}\right)p^{-4}+\left(\frac{5}{4}\sqrt{AD}-\right.\right.\right.$$
$$\left.-AD-\frac{3}{8}\right)p^{-6}+\left(\frac{3}{4}AD-\frac{3}{8}\sqrt{AD}-\frac{15}{64}\right)p^{-8}\Big]\operatorname{erf}p+\left[\frac{1}{4}+\left(\sqrt{AD}-\frac{5}{8}\right)p^{-2}+\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{17}{16}+AD-\sqrt{AD}\right)p^{-4}+\left(\frac{15}{32}-\frac{3}{2}AD+\frac{3}{4}\sqrt{AD}\right)p^{-6}\right]\frac{\exp(-p^2)}{p\sqrt{\pi}}\right\} \tag{6.9}$$

$$M_y=\frac{\pi\chi a^3}{4A\lambda}\left\{[1+(2\sqrt{AD}-1)2p^{-2}+(3-4\sqrt{AD})p^{-4}]\operatorname{erf}\frac{p}{\sqrt{2}}+\right.$$
$$\left.+2[1-(3-4\sqrt{AD})p^{-2}]\frac{\exp(-{}^1/_2p^2)}{p\sqrt{2\pi}}\right\} \tag{6.10}$$

Здесь справа приведены значения величины $M^*\approx M_y/\chi_a{}^3$, подсчитанные для соревнования по формуле (6.9), (6.10).

$\lambda =$	1/8	1/4	1/2	
$M^* =$	13.94	7.72	4.75	(6.9)
$M^* =$	13.90	7.67	4.57	(6.10)

Как видно из приведенных числовых значений, формулы для M_y при малых λ асимптотически равноценны между собой.

В заключение отметим, что полученные в работе результаты полностью применимы к аналогичной контактной задаче для слоя, когда его нижняя граница жестко соединена с недеформируемым основанием. Меняются при этом лишь значения постоянных A и D в аппроксимации (2.17).

Таблица

	λ	χ	$x/a=0$	0.4	0.6	0.8	0.95	ω/χ	$P/\chi a$
aq_0/χ	1/2		3.95	3.97	4.02	4.27	5.89	1.59	8.91
	1		2.05	2.09	2.18	2.48	3.93	1.13	5.03
	2		1.14	1.19	1.28	1.54	2.67	0.80	3.05
aq^*/χ	1/2	1.00	3.95	3.97	4.02	4.27	5.89	1.59	8.91
	1	0.93	1.90	1.94	2.02	2.30	3.65	1.05	4.67
	2	0.87	0.99	1.04	1.12	1.35	2.33	0.70	2.66
aq/χ[4]	1/2		3.97	3.94	3.90	4.00	5.74	1.58	8.71
	1		1.92	1.93	1.99	2.24	3.80	1.12	4.70
	2		0.97	1.01	1.10	1.38	2.56	0.79	2.75

Авторы благодарны И. И. Воровичу за ряд ценных советов.

Поступила 20 IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М., Ворович И. И. Контактные задачи для упругого слоя малой толщины. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
2. Александров В. М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
3. Александров В. М. Некоторые контактные задачи для упругого слоя. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
4. Александров В. М., Бабешко В. А. Контактные задачи для упругой полосы малой толщины. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 2.
5. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, 1949.
6. Крейн М. Г. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. Докл. АН СССР, 1955, т. 100, № 3.
7. Александров В. М., Александрова Г. П. Контактная задача теории упругости для упругой полосы. Материалы II Научн. конф. аспирантов. Изд. Ростовск. ун-та, 1960.
8. Александров В. М., Ворович И. И. О действии штампа на упругий слой конечной толщины. ПММ, 1960, т. 24, вып. 2.
9. Ворович И. И., Устинов Ю. А. О давлении штампа на слой конечной толщины. ПММ, 1959, т. 23, вып. 3.
10. Александров В. М. К задаче о действии штампа на упругий слой конечной толщины. Материалы III научн. конференц. аспирантов. Изд. Ростовск. ун-та, 1961.