Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МЕМБРАННЫХ РЕШЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Л. С. Срубщик, В. И. Юдович

(Ростов-на-Дону)

В работах [1,2] были рассмотрены мембранные решения нелинейных уравнений равновесия пластин и оболочек, т. е. такие решения, которые отвечают напряженному состоянию с одними лишь растягивающими усилиями. В [1,2] для мембранных решений доказаны единственность, ряд теорем существования и, кроме того, изучена асимптотика в случае малой жесткости.

В этой заметке рассматриваются пластина произвольной формы под действием заданной нормальной нагрузки и (несжимающих) усилий на контуре и пологая оболочка, заделанная по краю, под действием внешних сил, причем для оболочки отдельно рассматривается также случай радиальной симметрии.

Показывается, что всякое мембранное решение этих задач реализует минимум потенциальной энергии (вторая вариация энергии положительна) и, таким образом, устойчиво. Именно, устанавливается, что всякое решение соответствующей нестационарной задачи, близкое в начальный момент в энергетической норме в H_Ω (см. ниже формулу (3.2)) к мембранному решению, остается близким к нему при всех $t > 0$, т. е. мембранное решение устойчиво по Ляпунову в энергетической норме. Показано также, что знакопеременность второй вариации энергии влечет за собой неустойчивость. Приводится ряд примеров.

1. Рассмотрим систему нелинейных уравнений Кармана теории гибких пластин [3]

$$\Delta^2 F + w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2 = 0 \tag{1.1}$$

$$\varepsilon^2 \Delta^2 w - w_{xx} F_{yy} - w_{yy} F_{xx} + 2 w_{xy} F_{xy} - q = 0 \tag{1.2}$$

с краевыми условиями

$$w|_\Gamma = 0, \qquad w_n|_\Gamma = 0 \tag{1.3}$$

$$F_{\tau\tau}|_\Gamma = T(A) \geqslant 0, \qquad F_{n\tau}|_\Gamma = S(A) \qquad (A \in \Gamma) \tag{1.4}$$

Уравнения (1.1) — (1.4) записаны в безразмерных величинах. При этом

$$F = \frac{F_1}{Ea^2}, \quad w = \frac{w_1}{a}, \quad q = \frac{q_1 a}{Eh}, \quad \varepsilon^2 = \frac{h^2}{12(1-\mu^2)a^2}$$

$$x = \frac{x_1}{a}, \quad y = \frac{y_1}{a}, \quad n = \frac{n_1}{a}, \quad \tau = \frac{\tau_1}{a} \qquad \left(0 < \mu < \frac{1}{2}\right)$$

Здесь F_1 — функция напряжений, w_1 — прогиб точек срединной поверхности, q_1 — интенсивность поперечной нагрузки, k — толщина пластины, E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона, (x_1, y_1) — прямоугольные координаты, Γ — контур, ограничивающий односвязную область Ω, a — диаметр области, n_1 и τ_1 — соответственно нормальное и тангенциальное направления на границе, а $F_{\tau\tau}(A)$ и $F_{n\tau}(A)$ — соответственно нормальная и касательная составляющие внешнего усилия, приложенного к контуру пластины [3].

Функционал потенциальной энергии пластины, соответствующий задаче (1.1) — (1.4), можно привести к виду

$$
\begin{aligned}
J(w) = \frac{\varepsilon^2}{2}\int\limits_{\Omega}[(\Delta w)^2 - 2(1-\mu)(w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2)]\,dx\,dy - \\
-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}[(\Delta F)^2 - 2(1+\mu)(F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2)]\,dx\,dy + \\
+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}[F_{xx}w_y^2 + F_{yy}w_x^2 - 2F_{xy}w_xw_y]\,dx\,dy - \int\limits_{\Omega} qw\,dx\,dy
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Тогда всякое решение задачи (1.1) — (1.4) реализует минимум функционала $J(w)$ относительно функции w, удовлетворяющей краевым условиям (1.3), причем функция F рассматривается как решение уравнения (1.1) с краевыми условиями (1.4). Пусть (Φ, W) — мембранное решение задачи (1.1) — (1.4), т. е. в каждой точке области Ω выполняются условия

$$
\Phi_{xx} > 0, \qquad \Phi_{yy} > 0, \qquad \Phi_{xx}\Phi_{yy} - \Phi_{xy}^2 > 0 \tag{1.6}
$$

Покажем, что вторая вариация функционала J для мембранного решения положительна.

Обозначим через η допустимую вариацию w и рассмотрим функционал J на множестве функций $W + \alpha\eta$. Тогда F должна быть получена как решение краевой задачи (1.1), (1.4). Легко видеть, что F можно представить в виде

$$
F = \Phi + \alpha\varphi + \alpha^2\psi \tag{1.7}
$$

где Φ удовлетворяет уравнению вида (1.1), но с заменой w на W, и краевым условием (1.4); функция φ удовлетворяет уравнению

$$
\Delta^2\varphi = 2W_{xy}\eta_{xy} - W_{xx}\eta_{yy} - W_{yy}\eta_{xx}, \qquad \varphi|_\Gamma = 0, \qquad \varphi_n|_\Gamma = 0 \tag{1.8}
$$

а функция ψ удовлетворяет уравнению

$$
\Delta^2\psi = \eta_{xy}^2 - \eta_{xx}\eta_{yy}, \qquad \psi|_\Gamma = 0, \qquad \psi_n|_\Gamma = 0 \tag{1.9}
$$

Уравнения (1.7) — (1.9) находятся из (1.1) — (1.4) при помощи замены w на $W + \alpha\eta$. Вычисляя $\delta^2 J$, имеем

$$
\delta^2 J = \frac{1}{2}\frac{d^2J}{d\alpha^2}\bigg|_{\alpha=0} = \varepsilon^2 I_1(\eta) - I_2(\varphi) + I_3(\Phi, \eta) + I_3(\psi, W) - I_4 + I_5 \tag{1.10}
$$

$$
\begin{aligned}
I_1(\eta) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\{(\Delta\eta)^2 - 2(1-\mu)(\eta_{xx}\eta_{yy} - \eta_{xy}^2)\}\,dx\,dy \\
I_2(\varphi) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\{(\Delta\varphi)^2 - 2(1+\mu)(\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2)\}\,dx\,dy \\
I_3(a, b) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(a_{xx}b_y^2 + a_{yy}b_x^2 - 2a_{xy}b_xb_y)\,dx\,dy
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

$$
I_4 = \int\limits_{\Omega}\{\psi_{yy}(\Phi_{yy} - \mu\Phi_{xx}) + \psi_{xx}(\Phi_{xx} - \mu\Phi_{yy}) + 2(1+\mu)\psi_{xy}\Phi_{xy}\}\,dx\,dy
$$

$$
I_5 = \int\limits_{\Omega}\{\varphi_{xx}W_y\eta_y + \varphi_{yy}W_x\eta_x - \varphi_{xy}(W_y\eta_x + W_x\eta_y)\}\,dx\,dy
$$

Интегрируя по частям с учетом граничных условий (1.8), (1.9), имеем

$$I_3(\psi, W) = \int_\Omega \psi\Delta^2\Phi\, dx\, dy = I_4$$

$$I_5 = \int_\Omega (\Delta\varphi)^2\, dx\, dy, \qquad \int_\Omega (\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2)\, dx\, dy = 0 \tag{1.12}$$

Принимая (1.5), из (1.10) получаем

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 I_1(\eta) + I_2(\varphi) + I_3(\Phi, \eta) \tag{1.13}$$

Остается заметить, что $I_3(\Phi, \eta) \geqslant 0$ в силу (1.6) и, следовательно,

$$\delta^2 J > 0 \quad (\eta \not\equiv 0) \tag{1.14}$$

Поэтому мембранное решение реализует относительный минимум J.

2. В этом пункте рассмотрим уравнения пологой оболочки, занимающей в плане конечную область Ω с границей Γ [4]

$$\Delta u + \frac{1+\mu}{1-\mu}\theta_x = -\frac{2}{1-\mu}[(k_1 w)_x + w_x w_{xx} + \mu(k_2 w)_x + \mu w_y w_{xy}] -$$

$$- w_{xy}w_y - w_x w_{yy} = f_1 \qquad (\theta = u_x + v_y) \tag{2.1}$$

$$\Delta v + \frac{1+\mu}{1-\mu}\theta_y = -\frac{2}{1-\mu}[(k_2 w)_y + w_y w_{yy} + \mu(k_1 w)_y + \mu w_x w_{xy}] -$$

$$- w_{xy}w_x - w_y w_{xx} = f_2 \tag{2.2}$$

$$D\Delta^2 w = Z + F_{yy}(w_{xx} - k_1) + F_{xx}(w_{yy} - k_2) - 2F_{xy}w_{xy} \tag{2.3}$$

$$F_{yy} = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), \qquad F_{xx} = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1), \qquad F_{xy} = -\frac{Eh}{2(1+\mu)}\varepsilon_{12} \tag{2.4}$$

$$\varepsilon_1 = u_x + k_1 w + {}^1/_2 w_x^2, \quad \varepsilon_2 = v_y + k_2 w + {}^1/_2 w_y^2, \quad \varepsilon_{12} = u_y + v_x + w_x w_y$$

Оболочка заделана по контуру: граничные условия запишутся так:

$$w|_\Gamma = 0, \quad w_n|_\Gamma = 0, \quad u|_\Gamma = 0, \quad v|_\Gamma = 0 \tag{2.5}$$

Всякое решение задачи (2.1) — (2.5) реализует минимум функционала

$$J(w) = \frac{D}{2}\int_\Omega \{(\Delta w)^2 - 2(1-\mu)(w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2)\}\, dx\, dy +$$

$$+ \frac{1}{2Eh}\int_\Omega \{F_{xx}^2 + F_{yy}^2 - 2\mu F_{xx}F_{yy} + 2(1+\mu)F_{xy}^2\}\, dx\, dy + \int_\Omega Zw\, dx\, dy \tag{2.6}$$

относительно функции w, удовлетворяющей краевым условиям (2.5). При этом F_{xx}, F_{yy}, F_{xy} выражаются по формулам (2.4), где u, v рассматриваются как решения уравнений (2.1), (2.2).

Пусть, как и в п. 1, (Φ, W) — мембранное решение задачи (2.1) — (2.5). Подсчитываем вторую вариацию. Для этого рассмотрим функционал J на множестве функций $W + \alpha\eta$. Тогда F можно представить в виде (1.7). При этом Φ удовлетворяет уравнениям вида (2.4), (2.1), (2.2) и (2.5), но с заменой F на Φ и w на W. Функция φ удовлетворяет соотношениям

$$\varphi_{yy} = \left.\frac{dF_{yy}}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \frac{Eh}{1-\mu^2}[u_{1x} + k_1\eta + W_x\eta_x + \mu(v_{1y} + k_2\eta + W_y\eta_y)]$$

$$\varphi_{xx} = \left.\frac{dF_{xx}}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \frac{Eh}{1-\mu_1}[v_{1y} + k_2\eta + W_y\eta_y + \mu(u_{1x} + k_1\eta + W_x\eta_x)]$$

$$\varphi_{xy} = \left.\frac{dF_{xy}}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = -\frac{Eh}{2(1+\mu)}(u_{1y} + v_{1x} + W_x\eta_y + W_y\eta_x) \tag{2.7}$$

Здесь функции u_1 и v_1 определяются из уравнений

$$\Delta u_1 + \frac{1+\mu}{1-\mu}\theta_{1x} = f_{11}, \qquad f_{11} = \frac{d}{d\alpha} f_1 (W + \alpha\eta)|_{\alpha=0}, \qquad u_1|_\Gamma = 0 \tag{2.8}$$

$$\Delta v_1 + \frac{1+\mu}{1-\mu}\theta_{1y} = f_{21}, \qquad f_{21} = \frac{d}{d\alpha} f_2 (W + \alpha\eta)\Big|_{\alpha=0}, \quad v_1|_\Gamma = 0, \quad \theta_1 = u_{1x} + v_{1y}$$

Функция ψ удовлетворяет соотношениям:

$$\psi_{xx} = \frac{1}{2}\frac{d^2F_{xx}}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=0} = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left(v_{2y} + \frac{1}{2}\eta_y^2 + \mu u_{2x} + \frac{\mu}{2}\eta_x^2\right)$$

$$\psi_{yy} = \frac{1}{2}\frac{d^2F_{xy}}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=0} = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left(u_{2x} + \frac{1}{2}\eta_x^2 + \mu v_{2y} + \frac{\mu}{2}\eta_y^2\right) \tag{2.9}$$

$$\psi_{xy} = -\frac{1}{2}\frac{d^2F_{xy}}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=0} = -\frac{Eh}{1+\mu}(u_{2y} + v_{2x} + \eta_x\eta_y)$$

Здесь функции u_2, v_2 определяются из уравнений (2.10)

$$\Delta u_2 + \frac{1+\mu}{1-\mu}\theta_{2x} = f_{12}, \qquad \Delta v_2 + \frac{1+\mu}{1-\mu}\theta_{2y} = f_{22}, \quad f_{12} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\alpha^2} f_1 (W + \alpha\eta)\Big|_{\alpha=0}$$

$$f_{22} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\alpha^2} f_2 (W + \alpha\eta)\Big|_{\alpha=0}, \qquad u_2|_\Gamma = 0, \qquad v_2|_\Gamma = 0, \qquad \theta_2 = u_{2x} + v_{2y}$$

Формулы (2.7) — (2.10) находятся из (2.1) — (2.5) при помощи замены w на $W + \alpha\eta$. Теперь по формуле (1.10), применяя (1.7), из (2.6) получаем

$$\delta^2 J = DI_1 + \frac{1}{Eh} I_2 + \frac{1}{Eh} I_4 \tag{2.11}$$

Используя (2.9) и интегрируя по частям с учетом краевых условий (2.10), получим

$$I_4 = I_3(\Phi, \eta) \tag{2.12}$$

Поэтому

$$\delta^2 J = DI_1(\eta) + \frac{1}{Eh} I_2(\varphi) + I_3(\Phi, \eta) \tag{2.13}$$

Отсюда для мембранного решения получаем

$$\delta^2 J > 0 \qquad (\eta \not\equiv 0) \tag{2.14}$$

Наконец, рассмотрим случай симметрично загруженной оболочки вращения, заделанной по краю. Для этого в уравнениях (2.1) — (2.5) перейдем к полярным координатам (r, φ) и введем безразмерные величины

$$\rho = \frac{r}{a}, \qquad u_0 = w_\rho, \qquad v_0 = \frac{F_\rho}{ahE}, \qquad \varphi_0(\rho) = \frac{a}{hE}\int_0^\rho q(t)\, t\, dt \tag{2.15}$$

Для симметричного решения получим уравнения [5]

$$Av_0 - \frac{u_0^2}{2} + \theta(\rho) u_0 = 0, \qquad A(\ ) \equiv -\rho\frac{d}{d\rho}\frac{h^2}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho(\ ) \tag{2.16}$$

$$\varepsilon^2 A u_0 + u_0 v_0 - \theta(\rho) v_0 + \varphi_0(\rho) = 0, \qquad \varepsilon^2 = \frac{h}{12(1-\mu^2)a^2} \tag{2.17}$$

$$u_0|_{\rho=1} = 0, \qquad \left[\frac{dv_0}{d\rho} - \frac{\mu}{\rho} v_0\right]_{\rho=1} = 0, \qquad \frac{u_0}{\rho}\Big|_{\rho=0} < \infty, \qquad \frac{v_0}{\rho}\Big|_{\rho=0} < \infty \tag{2.18}$$

Применяя (2.15), из (2.6) находим соответствующий функционал

$$J(u_0)=\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^1\left(\rho u_{0\rho}^2+\frac{u_0^2}{\rho}\right)d\rho+\frac{1}{2}\int_0^1\left(\rho v_{0\rho}^2+\frac{v_0^2}{\rho}\right)d\rho-\frac{\mu}{2}v_0^2(1)+\int_0^1\varphi_0(\rho)\,u_0\,d\rho \qquad (2.19)$$

относительно функции u_0, удовлетворяющей граничным условиям (2.18). При этом v_0 рассматривается как решение уравнения (2.16), (2.18).

Найдем вторую вариацию функционала $J(u_0)$ для мембранного решения v_*, u_* (т. е. $v_*\geqslant 0$, см. [1]). Для этого рассмотрим функционал J на множестве функций $u_0=u_*+\alpha\eta$.

Тогда v_0 аналогично п. 1 можно представить в виде

$$v_0=v_*+\alpha\varphi+\alpha^2\psi \qquad (2.20)$$

где φ удовлетворяет уравнению

$$A\varphi-u_*\eta+\theta\eta=0,\quad \left[\frac{d\varphi}{d\rho}-\frac{\mu}{\rho}\varphi\right]_{\rho=1}=0,\quad \frac{\varphi}{\rho}\bigg|_{\rho=0}<\infty \qquad (2.21)$$

и ψ — решение задачи

$$A\psi-\frac{1}{2}\eta^2=0,\quad \left[\frac{d\psi}{d\rho}-\frac{\mu}{\rho}\psi\right]_{\rho=1}=0,\quad \frac{\psi}{\rho}\bigg|_{\rho=0}<\infty \qquad (2.22)$$

При помощи (1.12), с учетом (2.21), (2.22), имеем: (2.23)

$$\delta^2J=\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^1\left(\rho\eta_\rho^2+\frac{\eta^2}{\rho}\right)d\rho+\frac{1}{2}\int_0^1\left(\rho\varphi_\rho^2+\frac{\varphi^2}{\rho}\right)d\rho-\frac{\mu}{2}\varphi^2(1)+\frac{1}{2}\int_0^1 v_*\eta^2\,d\rho$$

Так как $v_*\geqslant 0$, то последний интеграл в (2.22) неотрицателен и, следовательно, $\delta^2J>0$.

3. Для уточнения того, что здесь следует понимать под устойчивостью, рассмотрим нестационарные уравнения теории пологих оболочек (см. формулы (2.5)—(2.8) работы [6] и принятые в ней обозначения).

Пусть вторая вариация δ^2J, вычисленная для стационарного решения W (см. (1.10)), удовлетворяет условию

$$\delta^2J\geqslant m\|\eta\|_{H_{2\Omega}}^2 \qquad (m>0) \qquad (3.1)$$

Здесь η — допустимая вариация перемещения w. Отметим, что в рассмотренных выше задачах эта оценка легко следует для мембранного решения из (1.10) и (2.11). Пусть, далее,

$$\|\eta_t\|_{H_{1\Omega}}^2+\|\eta\|_{H_{2\Omega}}^2=\|\eta\|_{H_\Omega}^2 \qquad (3.2)$$

и $w(x, y, t)$ — произвольное решение (хотя бы обобщенное) указанной нестационарной системы, непрерывное по t при $t\geqslant 0$ как функция от t со значениями в H_Ω. Пусть $\varepsilon>0$ — любое число. Тогда можно указать такое $\delta>0$, что из неравенства

$$\|w(x, y, 0)-W(x, y)\|_{H_\Omega}<\delta \qquad (3.3)$$

вытекает:

$$\|w(x, y, t)-W(x, y)\|_{H_\Omega}<\varepsilon \qquad \text{при } t>0 \qquad (3.4)$$

Иначе, стационарное решение W устойчиво по Ляпунову в H_Ω.

Для доказательства этого факта заметим, что потенциальная энергия $J(w(t))$ может быть представлена в виде

$$J(W+\eta)=J(W)+\delta^2J+R(\eta) \qquad (3.5)$$

Здесь функционал $R(\eta)$ имеет вид

$$R(\eta) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} (\varphi_{xx}\eta_y^2 + \varphi_{yy}\eta_x^2 - 2\varphi_{xy}\eta_x\eta_y)\,dx\,dy \tag{3.6}$$

где φ_{xx}, φ_{yy} и φ_{xy} определены в (2.7). Покажем, что справедлива оценка

$$|R(\eta)| \leqslant m_1 \|\eta\|^3_{H_{2\Omega}} \tag{3.7}$$

Рассмотрим типичные члены выражения (3.5)

$$\begin{aligned} R_1(\eta) &= \int\limits_{\Omega} u_{1x}\eta_y^2\,dx\,dy, & R_2(\eta) &= \int\limits_{\Omega} v_{1y}\eta_x^2\,dx\,dy \\ R_3(\eta) &= \int\limits_{\Omega} k_1\eta\eta_x^2\,dx\,dy, & R_4(\eta) &= \int\limits_{\Omega} W_y\eta_y\eta_x^2\,dx\,dy \end{aligned} \tag{3.8}$$

В силу теорем вложения [7] имеем

$$\|W_y\|_{L_{p\Omega}} \leqslant m_2\|W\|_{H_{2\Omega}}, \quad \|\eta_x\|_{L_{p\Omega}} \leqslant m_2\|\eta\|_{H_{2\Omega}} \quad (p > 1) \tag{3.9}$$

Далее, из (2.8) можно получить оценки

$$\|u_{1x}\|_{L_{2\Omega}} \leqslant m_3\|\eta\|_{H_{2\Omega}}, \qquad \|v_{1y}\|_{L_{2\Omega}} \leqslant m_3\|\eta\|_{H_{2\Omega}} \tag{3.10}$$

Эти оценки получены в [6] (см. формулы (2.41) — (2.45)). Из (3.8), применяя неравенство Буняковского, а также оценки (3.9), (3.10), выводим

$$|R_i(\eta)| \leqslant m_4\|\eta\|^3_{H_{2\Omega}} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{3.11}$$

Теперь (3.7) следует из (3.11) и аналогичных оценок для других слагаемых в (3.6).

Нижеследующее рассуждение протекает аналогично доказательству теоремы Ляпунова об устойчивости [8][1]. Роль функции Ляпунова играет функционал V, определяемый формулой (3.16).

Запишем указанную нестационарную систему в виде

$$w_{tt} = -\operatorname{grad} J(w) \tag{3.12}$$

Для решений (3.12) выполняется интеграл энергии

$$\|w_t\|^2_{H_{1\Omega}} + 2J(w) = \mathrm{const} \tag{3.13}$$

Положим теперь $\eta(x, y, t) = w(x, y, t) - W(x, y)$. Из (3.5) и (3.13) вытекает

$$\|\eta_t\|^2_{H_{1\Omega}} + 2J(W) + 2\delta^2 J + 2R(\eta) = \mathrm{const} \tag{3.14}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} V_1(t) &\equiv \|\eta\|^2_{H_{1\Omega}} + 2\delta^2 J(\eta) + 2R(\eta) = \\ &= \|\eta_{0t}\|^2_{H_{1\Omega}} + 2\delta^2 J(\eta_0) + 2R(\eta_0) = V_1(0), \quad \eta_0 = \eta|_{t=0} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Теперь из (3.15) и (3.1) выводим

$$V(t) \equiv c\|\eta\|^2_{H_\Omega} + R(\eta) < V_1(t) = V_1(0) \tag{3.16}$$

Здесь $c = \min(1, m)$, а $R(\eta)$ удовлетворяет неравенству (3.7).

---

[1] Отметим, что в работах А. А. Мовчана [15, 16] теоремы Ляпунова и Четаева переносятся на некоторые классы бесконечномерных консервативных систем.

Рассмотрим в пространстве H_Ω сферу S_ε

$$\|\eta\|^2_{H_\Omega} = \|\eta_t\|^2_{H_{1\Omega}} + \|\eta\|^2_{H_{2\Omega}} = \varepsilon \tag{3.17}$$

Обозначим через l нижнюю грань функционала V на S_ε. Тогда, используя (3.7), найдем

$$l = \inf_{S_\varepsilon} V \geqslant \inf_{S_\varepsilon} [c\|\eta\|^2_{H_\Omega} - m_1\|\eta\|^3_{H_{2\Omega}}] > \frac{c\varepsilon}{2} > 0, \quad \text{если } \varepsilon < \frac{1}{2}\left(\frac{c}{m}\right)^2 \tag{3.18}$$

Далее, аналогично (3.8), устанавливаются оценки

$$I_2(\varphi) \leqslant m_5\|\eta\|^2_{H_{2\Omega}}, \qquad I_3(\Phi, \eta) \leqslant m_6\|\eta\|^2_{H_{2\Omega}} \tag{3.19}$$

Теперь, используя (3.19), (2.11) и (3.7), из (3.15) получаем, что если $\|\eta_0\|^2_{H_\Omega} < \delta$, то

$$V(t) < V_1(0) < m_7\delta + 2m_1\delta^{3/2} = \delta_1 \tag{3.20}$$

Отсюда вытекает (3.4). Действительно, если допустить, что точка выходит в некоторый момент t_0 на сферу S_ε, то окажется, что

$$V(t_0) > \inf_{S_\varepsilon} V = l > 0$$

Это приводит к противоречию с (3.20), если $\delta_1 < l$.

4. Рассмотрим теперь случай, когда вторая вариация не является положительно определенной. Именно, пусть на некотором подпространстве $E \subset H_{2\Omega}$ выполняется условие

$$\delta^2 J \leqslant -m\|\eta\|^2_{H_{2\Omega}} \qquad (\eta \in E, \ m > 0) \tag{4.1}$$

(Если E совпадает с $H_{2\Omega}$, то $\delta^2 J$ имеет строгий максимум.) Тогда стационарное решение W неустойчиво в смысле Ляпунова в пространстве H_Ω.

Для доказательства этого факта рассмотрим функционал и его производную по t

$$A(t) = \int_\Omega \eta\eta_t \, dx\, dy, \qquad A'(t) = \int_\Omega \eta_t^2 \, dx\, dy + \int_\Omega \eta\eta_{tt} \, dx\, dy \tag{4.2}$$

Покажем, что можно подобрать такое малое число ε, что

$$A'(t) \geqslant m_1\|\eta\|^2_{H_\Omega} > 0 \quad (m_1 > 0, \ \eta \in E) \quad \text{при } \|\eta\|_{H_\Omega} < \varepsilon \tag{4.3}$$

Из нестационарных уравнений задачи, представляя решение в виде

$$w = W + \eta, \qquad F = \Phi + \varphi + \psi \tag{4.4}$$

выводим уравнения возмущенного движения

$$\eta_{tt} + \varepsilon^2\Delta^2\eta - [\eta, \Phi] - [\eta, \varphi + \psi] - [W, \varphi + \psi] = 0 \tag{4.5}$$

$$\Delta^2\varphi + [W, \eta] = 0, \qquad \Delta^2\psi + {}^1/_2 [\eta, \eta] = 0 \tag{4.6}$$

Здесь использовано обозначение $[a, b] = a_{xx}b_{yy} + a_{yy}b_{xx} - 2a_{xy}b_{xy}$. При помощи (4.5) и (4.6) находим

$$\int_\Omega \eta\eta_{tt}\, dx\, dy = -2\delta^2 J + R_*(\eta)$$
$$R_*(\eta) = -3\int_\Omega \Delta\varphi\Delta\psi \, dx\, dy - 2\int_\Omega (\Delta\psi)^2 \, dx\, dy \tag{4.7}$$

Применяя (2.7), (2.9), (3.10), а также оценки (2.50) работы [6], из (4.7) получаем

$$\|R_*(\eta)\| \leqslant m_2\|\eta\|^3_{H_{2\Omega}} \tag{4.8}$$

Теперь оценка (4.3) следует из (4.2) и (4.8), если $\|\eta\|_{H_\Omega} < \varepsilon$ и ε достаточно мало. Далее рассмотрим множество таких η, для которых

$$A_0 = \int\limits_\Omega \eta_0 \eta_{0t}\, dx\, dy \geqslant 0, \qquad \eta_0 = \eta\,|_{t=0} \tag{4.9}$$

В силу (4.3) для таких η получаем, что $A\ (t) > 0$. Тогда неустойчивость W выводится при помощи рассуждений теоремы Ляпунова о неустойчивости (см., например, [9]). Роль функции Ляпунова играет функционал A.

5. Рассмотрим ряд конкретных примеров.

а) В классе осесимметричных решений равновесие симметрично загруженной пластины при разнообразных краевых условиях [10,11] единственно, а потому устойчиво. В самом деле, из единственности решения вытекает, что на нем достигается строгий минимум.

б) В работах [13,14] показано, что вторая вариация $\delta^2 J(\eta) \leqslant 0$ (при некотором η) для симметричного равновесия круглой пластины, равномерно сжатой по контуру достаточно большими усилиями, а также для жестко защемленной круглой пластины под действием равномерного давления. Изложенное в п. 4 показывает, в каком смысле эти решения неустойчивы.

в) Осесимметричное равновесие симметрично загруженной пластины, глухо заделанной по контуру, является мембранным [2], а потому устойчиво (относительно несимметричных возмущений). В связи с этим интересно отметить, что единственности решения в этом случае нет [12], и абсолютный минимум энергии достигается на несимметричном равновесии.

Поступила 20 X 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Срубщик Л. С., Юдович В. И. Асимптотическое интегрирование системы уравнений большого прогиба симметрично загруженных оболочек вращения. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
2. Срубщик Л. С. Об асимптотическом интегрировании систем нелинейных уравнений теории пластин. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
3. Вольмир А. С. Гибкие пластины и оболочки М., Гостехиздат, 1956.
4. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. М.— Л., Гостехиздат, 1949.
5. Феодосьев В. И. Упругие элементы точного приборостроения. Теория и расчет. М., Оборонгиз, 1949.
6. Ворович И. И. О некоторых прямых методах в нелинейной теории колебаний пологих оболочек. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1957, т. 21, № 6, стр. 747—784.
7. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., Изд-во ЛГУ, 1950.
8. Четаев Н. Г. Устойчивость движения, изд. 2-е. М., Гостехиздат, 1955.
9. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М., Изд. иностр. лит., 1961.
10. Морозов И. Ф. Единственность симметричного решения задачи о больших прогибах симметрично загруженной круглой пластины. Докл. АН СССР, 1958, т. 123. № 3, стр. 417—419.
11. Срубщик Л. С., Юдович В. И. Асимптотика уравнения большого прогиба круглой симметрично загруженной пластины. Докл. АН СССР, 1961, т. 139, № 2, стр. 341—344.
12. Морозов Н. Ф. К вопросу о существовании несимметричного решения в задаче о больших прогибах круглой пластинки, загруженной симметричной нагрузкой. Изв. высш. учебн. завед., Математика, 1961, № 2 (21).
13. Vanowitch M., Non-linear buckling of circulare Elastic Plates. Commun. Pure and Appl. Math., 1956, vol. 9, No. 4.
14. Морозов Н. Ф. Качественное исследование круглой симметрично сжимаемой пластинки при большой краевой нагрузке (доказательство появления гофра). Докл. АН СССР, 1962, т. 147, № 6, стр. 1319—1322.
15. Мовчан А. А. О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем. ПММ, 1959, т. 23, вып. 3.
16. Мовчан А. А. Об устойчивости движения сплошных тел. Теорема Лагранжа и ее обращение. Инженерный сборник, 1960, т. XXIX.