

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПОЛОСЫ

И. И. Ворович, В. В. Копасенко

(Ростов-на-Дону)

В работе рассмотрена задача о симметрично нагруженной полуполосе, заделанной по короткому краю. Для нормального напряжения в заделке составлено интегральное уравнение и исследован характер особенностей его решения. Детально изучен случай, когда на продольной стороне действуют нормальные и касательные усилия. Для такой нагрузки подробно исследован характер распределения напряжения в заделке. Численные расчеты проведены для случая сжатия полуполосы двумя сосредоточенными силами.

В многочисленных работах, посвященных полуполосе, широко использовались методы, основанные на принципе локализации. В них получено удовлетворительное решение вопроса вдали от особых точек, к которым можно отнести: 1) точки, где изменяется характер краевых условий, 2) точки разрыва нагрузок и 3) угловые точки. Этими методами не улавливаются особенности решения, возникающие в вышеперечисленных случаях, что вредно отражается на их точности.

Хорви [1-3] рассмотрел задачу о полуполосе со свободными продольными границами, на торце которой действуют самоуравновешенные нагрузки. Функцию напряжения он выбирает в виде

$$\varphi(x, y) = \sum C_k f_k(y) g_k(x)$$

где в качестве $f_k(y)$ используется полная система ортогональных полиномов, множители $g_k(x)$ определяются из условия минимума потенциальной энергии.

Задаче о растяжении полуполосы со свободными продольными гранями и заземленной короткой стороной посвящена работа Койтера и Албласа ([4]). Применяв синус-преобразование Фурье к уравнению для функции напряжений, они, как и все последующие авторы, свели приближенно решение проблемы к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

В работах Пиккета и Айенгара ([5,6] 1956, 1962) функция напряжений разыскивается в виде комбинации рядов и интегралов Фурье.

Зорский ([7] 1958) решил задачу для пластинки в форме полуполосы. Разыскивая решение в виде комбинаций решений от двух потенциалов, он свел проблему к сингулярному интегральному уравнению.

В работе Теокариса ([8] 1959) при решении задачи о полуполосе со свободными продольными сторонами, на торце которой действует сосредоточенная сила, был использован энергетический метод.

Теодореску ([9] 1960) предложил для решения проблемы о полуполосе метод, совпадающий с методом Пиккета и Айенгара.

Вариационный метод был использован Л. П. Трапезниковым ([10] 1963) при решении задачи для полубесконечной полосы, сжатой двумя сосредоточенными силами; короткая сторона полосы была свободна от напряжений.

В работе Гейдна и Шефферда ([11] 1964) методом однородных решений исследована задача Хорви. Поскольку однородные решения не были ортогональными, то для выполнения условий на торце они разлагались в ряды по ортогональным функциям.

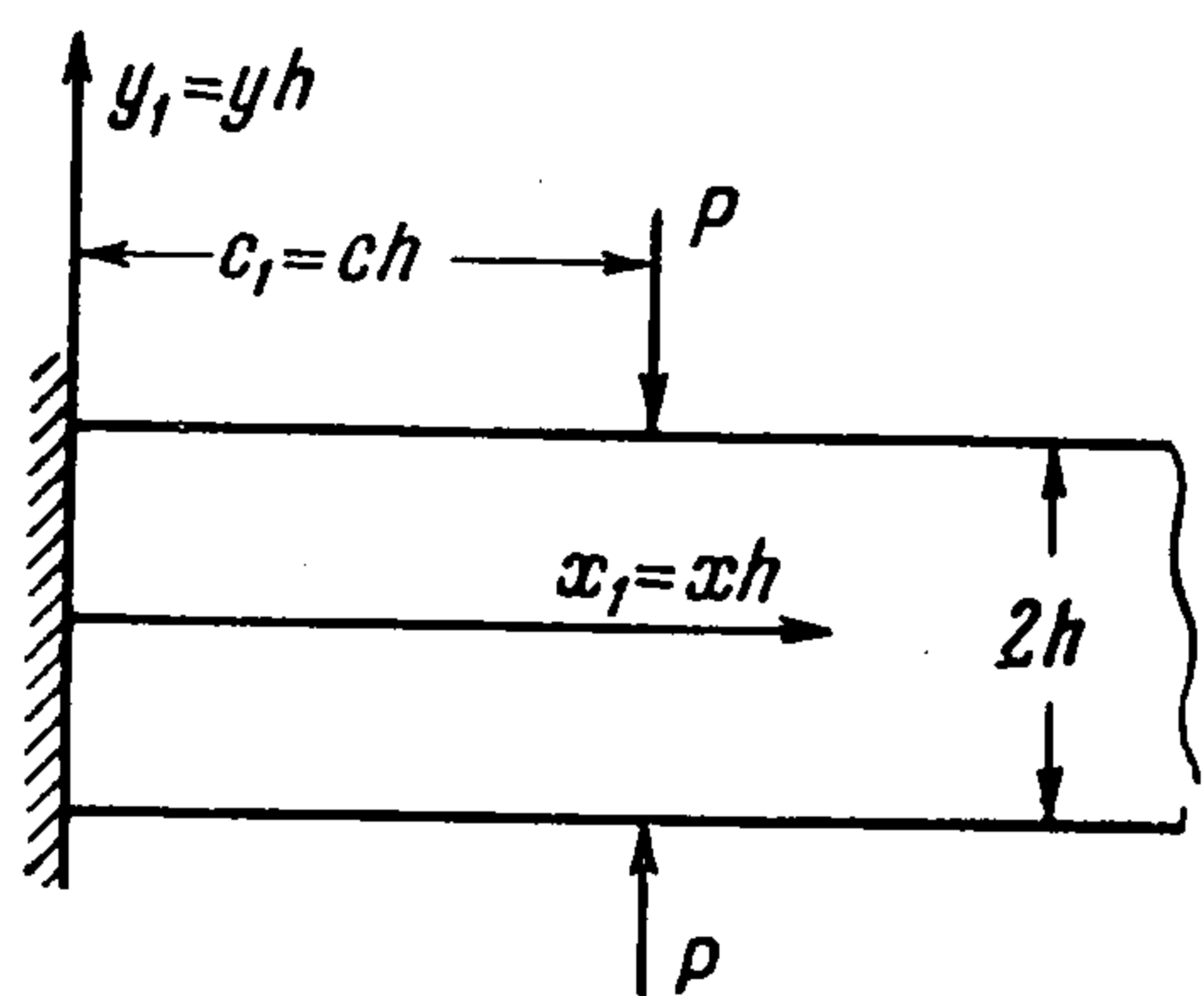
Однородные решения используются также в работе Бухвальда ([12] 1964).

Все предыдущие авторы не учитывали особенности в решении, поэтому часто линейные системы, к которым сводилась проблема, были плохо обусловленными.

От этого недостатка свободна работа Бенсема ([13] 1963), в которой решается задача о полуполосе в постановке Койтера и Албласа. Применяв преобразование Лапласа к уравнению для функции напряжений, он сводит задачу к системе линейных алгебраических уравнений. Характер особенности решения устанавливается им на основе рассмотренных ранее ([14,15] 1952, 1956) Вильямсом соответствующих задач для четверти плоскости.

В данной работе также производится учет особенности в форме, отличной от той, в которой ищет решение Бенсем [13], что положительно сказывается на точности решения. Отметим также, что исследованная задача в перечисленных работах не рассматривалась.

§ 1. Рассмотрим симметричную задачу для полуполосы при следующих граничных условиях (фиг. 1):



Фиг. 1

$$u = v = 0, \quad x = 0 \quad (1.1)$$

$$\sigma_{y_1} = g(x), \quad \tau_{x_1 y_1} = r(x) \operatorname{sgn} y, \quad y = \pm 1 \quad (1.2)$$

Здесь u, v — перемещения вдоль осей x_1 и y_1 соответственно, а $\tau_{x_1 y_1}, \sigma_{y_1}$ — касательное и нормальное напряжения.

Для вывода интегрального уравнения задачи используем основные соотношения

плоской теории упругости в перемещениях

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial \theta}{\partial x} + \Delta u &= 0, & \frac{\sigma_{x_1} h}{G} &= (\nu - 1)\theta + 2 \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\tau_{x_1 y_1} h}{G} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \nu \frac{\partial \theta}{\partial y} + \Delta v &= 0, & \frac{\sigma_{y_1} h}{G} &= (\nu - 1)\theta + 2 \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma &= \frac{1}{1 - 2\nu} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь σ — коэффициент Пуассона, а L — модуль кручения. Пусть граничные условия имеют вид (1.1, 2). Представим u, v в виде наложения решений двух вспомогательных задач.

(1) Задачи для полуплоскости с границей вдоль оси y и граничными условиями

$$x = 0, \quad v(y) = 0, \quad \sigma_{x_1}(y) = \sigma(y), \quad |y| < \infty \quad (1.4)$$

(2) Задачи для полосы с граничными условиями

$$x = 0, \quad v(y) = 0, \quad \sigma_{x_1}(y) = 0 \quad |y| \leq 1 \quad (1.5)$$

$$y = \pm 1, \quad \sigma_{y_1} = m(x), \quad \tau_{x_1 y_1} = \pm n(x) \quad (1.6)$$

При этом m и n таковы, что для общей задачи имеют место граничные условия (1.2). Легко видеть, что решение (1) дается формулами

$$\begin{aligned} u &= -\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{h}{G} \int_0^\infty \cos \lambda x d\lambda \int_0^\infty \frac{Q(s) (\omega^2 + \nu s^2)}{(1 + \nu) \omega^4} \cos sy ds + C_1 (\omega^2 = \lambda^2 + s^2) \\ v &= -\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{h}{G} \int_0^\infty \sin \lambda x d\lambda \int_0^\infty \frac{Q(s) \nu \lambda s \sin sy ds}{(1 + \nu) \omega^4} \left(Q(s) = \int_0^\infty \sigma(t) \cos st dt \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь C_1 — произвольная постоянная.

Решение (2) получим, применив синус-преобразование Фурье к системе уравнений (1.3). Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательные формулы

$$u = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (A \operatorname{ch} \lambda y + B \lambda y \operatorname{sh} \lambda y) \cos \lambda x d\lambda + C_2 \quad (1.8)$$

$$v = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[A \operatorname{sh} \lambda y + B \left(\lambda y \operatorname{ch} \lambda y - \frac{2+v}{v} \operatorname{sh} \lambda y \right) \right] \sin \lambda x d\lambda$$

Здесь $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ — произвольные функции, C_2 — произвольная постоянная. Из формул (1.7,8) легко усмотреть, что для задачи, полученной наложением решений (1) и (2), выполнены граничные условия

$$x = 0, \quad v(y) = 0, \quad \sigma_{x_1} = \sigma(y), \quad |y| \leq 1 \quad (1.9)$$

$$y = 1, \quad \sigma_{y_1} = N(x) + m(x), \quad \tau_{x_1 y_1} = M(x) + n(x), \quad x > 0 \quad (1.10)$$

Здесь $N(x)$ и $M(x)$ — соответственно нормальное и касательное напряжения в полуплоскости при $y = 1$. Чтобы выполнить условия (1.2), положим

$$m(x) = g(x) - N(x), \quad n(x) = r(x) - M(x) \quad (1.11)$$

Тогда

$$A(\lambda) = \frac{g_1 - N_1}{\lambda \Delta_+} \left(\lambda \operatorname{ch} \lambda - \frac{\operatorname{sh} \lambda}{v} \right) + \frac{M_1 - r_1}{\lambda \Delta_+} \left(\lambda \operatorname{sh} \lambda - \frac{v+1}{v} \operatorname{ch} \lambda \right)$$

$$B(\lambda) = - \frac{M_1 - r_1}{\lambda \Delta_+} \operatorname{ch} \lambda - \frac{g_1 - N_1}{\lambda \Delta_+} \operatorname{sh} \lambda,$$

$$g_1 = \frac{h}{G} \int_0^{\infty} g(x) \sin \lambda x dx, \quad \Delta_+ = \operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda, \quad r_1 = \frac{h}{G} \int_0^{\infty} r(x) \cos \lambda x dx$$

$$M_1 = \frac{h}{G(2+2v)} \int_0^{\infty} \sigma(t) e^{-\lambda \beta} (v+1 - v\lambda\beta) dt$$

$$(\beta = |1-t|)$$

$$N_1 = \frac{h}{G(2+2v)} \int_0^{\infty} \sigma(t) e^{-\lambda \beta} (v\lambda\beta - 1) dt$$

Решение, полученное наложением (1) и (2), удовлетворяет всем граничным условиям, кроме условия $u = 0$ при $x = x_1 / h = 0$. Вместо этого получаем

$$u|_{x=0} = \frac{v+2}{2\pi(1+v)} \frac{h}{G} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t) \ln |t-y| dt + \frac{h}{G\pi(1+v)} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t) K(t, y) dt +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{g_1(\lambda)}{\lambda \Delta_+} \left[\lambda (\operatorname{ch} \lambda \operatorname{ch} \lambda y - y \operatorname{sh} \lambda \operatorname{sh} \lambda y) - \frac{\operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda y}{v} \right] d\lambda -$$

$$- \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{r_1(\lambda)}{\lambda \Delta_+} \left[\lambda (\operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda y - y \operatorname{ch} \lambda \operatorname{sh} \lambda y) - \frac{v+1}{v} \operatorname{ch} \lambda \operatorname{ch} \lambda y \right] d\lambda +$$

$$+ C_3 \frac{h}{G} \frac{v+2}{2\pi(1+v)}, \quad |y| \leq 1 \quad (1.12)$$

$$K(t, y) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda\beta}}{\lambda\Delta_+} \left\{ \lambda y \operatorname{sh} \lambda y [\operatorname{ch} \lambda (1 + \nu - \nu\lambda\beta) + \operatorname{sh} \lambda (1 - \nu\lambda\beta)] - \right. \\ \left. - (\operatorname{ch} \lambda y - 1) \left[\left(\lambda \operatorname{ch} \lambda - \frac{\operatorname{sh} \lambda}{\nu} \right) (1 - \nu\lambda\beta) + (\nu + 1 - \nu\lambda\beta) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\lambda \operatorname{sh} \lambda - \frac{\nu + 1}{\nu} \operatorname{ch} \lambda \right) \right] \right\} d\lambda \quad (\beta = |1 - t|)$$

Здесь C_3 — произвольная постоянная, определяемая из условия равновесия полуполосы.

Потребовав выполнения условия $u = 0$ при $x = 0$, получаем интегральное уравнение относительно напряжения $\sigma(y)$ в заделке. Положим

$$\sigma(y) = \sigma(y) \quad \text{при } |y| \leq 1, \quad \sigma(y) = 0 \quad \text{при } |y| > 1$$

После несложных преобразований выражения (1.12) получим интегральное уравнение вида

$$\int_{-1}^1 \sigma(t) \left\{ \frac{\nu + 2}{4(1 + \nu)} \ln |t - y| + \frac{\nu^2 + 2\nu + 2}{4\nu(1 + \nu)} \ln [(2 - t)^2 - y^2] - \right. \\ \left. - \frac{\nu}{2(1 + \nu)} \left[\frac{(1 - t)(1 - y)}{(2 - y - t)^2} + \frac{(1 - t)(1 + y)}{(2 + y - t)^2} \right] \right\} dt - \\ - \int_{-1}^1 \sigma(t) L(t, y) dt + C_3 \frac{\nu + 2}{4(1 + \nu)} = f(y), \quad |y| \leq 1 \quad (1.13)$$

$$L(t, y) = \frac{\nu}{1 + \nu} \left(\frac{1}{4 + y - t} + \frac{1}{4 - y - t} \right) - \frac{\nu + 2}{4(1 + \nu)} \ln [(4 - t)^2 - y^2] + \\ + \frac{1}{(1 + \nu)} \int_0^{\infty} \frac{(4\lambda - e^{-2\lambda})}{(e^{4\lambda} + 2\lambda e^{+2\lambda} - 1)\lambda} \left\{ \operatorname{ch} \lambda t (\nu\lambda - 1 - \nu\lambda t \operatorname{th} \lambda t) \left[\lambda y \operatorname{sh} \lambda y - \right. \right. \\ \left. \left. - (\operatorname{ch} \lambda y - 1) \left(\lambda - \frac{2 + \nu}{2\nu} - \frac{e^{-2\lambda}}{2} \right) \right] - \operatorname{ch} \lambda t \operatorname{ch} \lambda e^{-\lambda} [(\operatorname{ch} \lambda y - 1) \times \right. \\ \left. \times (\nu + 1 - \nu\lambda \operatorname{th} \lambda) + \nu\lambda y \operatorname{sh} \lambda y] \right\} d\lambda$$

$$f(y) = - \frac{G}{h} \int_0^{\infty} \frac{g_1(\lambda)}{\lambda\Delta_+} \left[\lambda (\operatorname{ch} \lambda \operatorname{ch} \lambda y - y \operatorname{sh} \lambda \operatorname{sh} \lambda y) - \frac{1}{\nu} \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda y \right] d\lambda + \\ + \frac{G}{h} \int_0^{\infty} \frac{r_1(\lambda)}{\lambda\Delta_+} \left[\lambda (\operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda y - y \operatorname{ch} \lambda \operatorname{sh} \lambda y) - \frac{\nu + 1}{\nu} \operatorname{ch} \lambda \operatorname{ch} \lambda y \right] d\lambda$$

Таким образом, проблема сведена к интегральному уравнению первого рода. Ядро этого уравнения имеет подвижную особенность на диагонали $y = t$ и неподвижную — в точках $y = \pm 1$. Неподвижная особенность в ядре усложняет исследование уравнения та и его численное решение.

§ 2. Займемся исследованием особенности решения рассматриваемой задачи. Естественно предположить, что эта особенность будет иметь тот же характер, что и особенность в углу в решении аналогичной задачи для четверти плоскости. Воспользуемся результатами Вильямса [14, 15], Я. С. Уфлянда [16], Л. М. Куршина [17]. Ниже используется работа Бенсема [18], необходимые результаты которой вкратце воспроизводятся.

Рассмотрим плоское деформированное состояние. Переход к плоско-напряженному состоянию осуществляется обычной заменой коэффициента Пуассона σ на $\sigma / (1 + \sigma)$. Произведем расчет особенности, не используя решений соответствующей задачи для клина, а исходя непосредственно только из краевой задачи. Для этого воспользуемся полярной системой координат ρ, θ . Так как вблизи вершины угла $\sigma_\theta = 0, \tau_{\rho\theta} = 0$ при $\theta = 0$, то

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) = 0, \quad \theta = 0 \quad (2.1)$$

Здесь Φ — функция напряжений, удовлетворяющая уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (2.2)$$

Граничные условия вдоль заземленной стороны имеют вид (перемещения равны нулю)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - \frac{\sigma}{1-\sigma} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1-\sigma}{2\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \theta^3} - \frac{\sigma}{1-\sigma} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \rho^2 \partial \theta} \right) = 0$$

Разделяя переменные в (2.2), получим

$$\Phi = \rho^{s+1} F(s, \theta), \quad F(s, \theta) = A_1 \sin(s+1)\theta + A_2 \cos(s+1)\theta + A_3 \sin(s-1)\theta + A_4 \cos(s-1)\theta$$

Здесь A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные.

Удовлетворяя четырем граничным условиям (2.1,3), получим ограничение, накладываемое на s , а именно

$$2\kappa \cos \pi s - 4s^2 + 1 + \kappa^2 = 0, \quad \kappa = 3 - 4\sigma \quad (2.4)$$

уравнение (2.4) при любых $0 < \sigma < 0.5$ имеет положительный корень $s_0 < 1$. При $\sigma = 0.31741$, $s_0 = 0.70000$ напряжение в углу при $\rho \rightarrow 0$ растет как $\rho^{-0.3}\psi(\theta)$, где $\psi(\theta)$ — ограниченная функция.

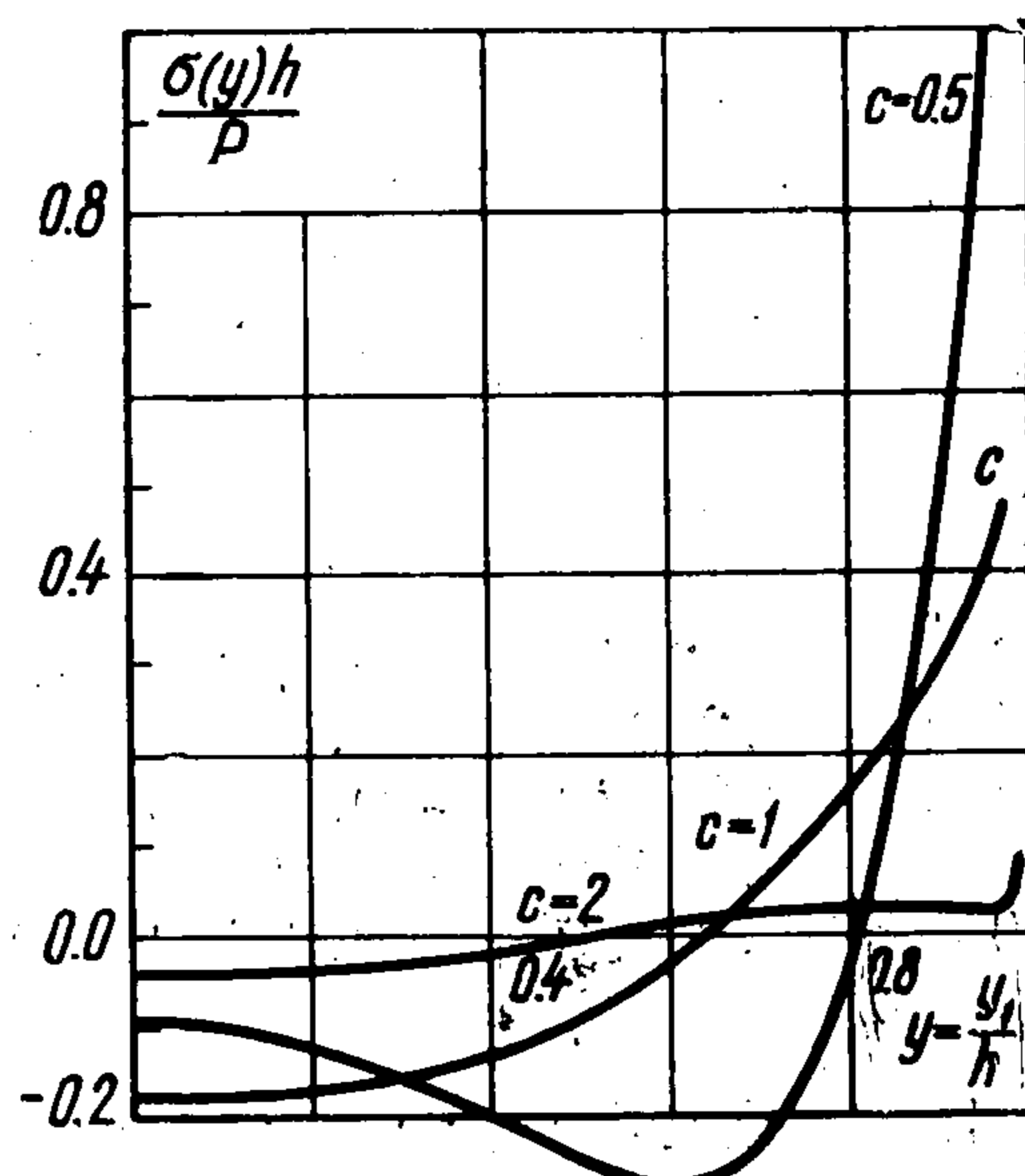
§ 3. В качестве численного метода решения интегрального уравнения (1.13) будем использовать аналог метода Мультиппа—Каландия [18,19]. Указанный метод был разработан в связи с приближенным решением уравнения теории крыла конечного размаха. Будем искать приближенное решение задачи в виде

$$\sigma(y) = (1 - y^2)^{s_0-1} \sum_{k=1}^{N+1} A_k y^{2(k-1)} \quad (3.1)$$

$(s_0 = 0.70000 \text{ при } \sigma = 0.31741)$

Подставляя выражение (3.1) в интегральное уравнение (1.13) и приравнявая левую и правую части в определенном образом выбранных узловых точках y_k , получим линейную алгебраическую систему уравнений относительно A_k . В качестве узлов коллокации выбирались корни полиномов Чебышева

$$y_k = \cos \frac{2k-1}{4N} \pi \quad (k = 1, \dots, N) \quad (3.2)$$



Фиг. 2

Здесь N — число точек деления отрезка $[0,1]$. Таким путем была решена задача для случая сжатия полуполосы двумя сосредоточенными силами P ($g_1 = (P/G) \sin \lambda c$, $r_1 = 0$, $C_3 = C_0 (P/h)$, при дополнительном условии

$$\int_{-1}^1 \sigma(t) dt = 0 \quad (3.3)$$

Интегральные выражения в (1.13), содержащие особые ядра, вычислялись с использованием представлений их через гипергеометрические ряды [20], остальные выражения находились по методу Симпсона. В результате вычислений была получена линейная система алгебраических уравнений вида

$$\sum_{i=1}^{N+1} a_{ik} A_i = B_k \quad (k = 1, \dots, N+1) \quad (3.4)$$

Здесь N — число точек деления отрезка $[0,1]$, а B_k — свободные члены; элементы матрицы коэффициентов $\|a_{ik}\|$ имеют следующие значения:

для $N = 7$

3.79797	0.679865	0.133778	-0.069639	-0.166754	-0.219020	-0.248936	1.000000
3.84433	0.845496	0.340080	0.159890	0.077913	0.036060	0.013403	1.000000
3.93114	1.133346	0.675770	0.503745	0.425283	0.374819	0.340033	1.000000
4.04211	1.493278	1.045873	0.849866	0.730660	0.646622	0.582733	1.000000
4.15334	1.860771	1.359040	1.102649	0.935391	0.818815	0.731779	1.000000
4.24467	2.162253	1.564801	1.250573	1.054180	0.918675	0.818839	1.000000
4.29476	2.332245	1.660292	1.319084	1.109272	0.965474	0.859885	1.000000
1.00000	0.416667	0.284091	0.221946	0.184955	0.160057	0.141986	0.000000

для $N = 6$

3.800071	0.687903	0.144033	-0.0579843	-0.154076	-0.205535	1.000000
3.861710	0.907760	0.415292	0.240943	0.161525	0.120365	1.000000
3.975676	1.277911	0.831596	0.658257	0.563429	0.500690	1.000000
4.108963	1.711400	1.239934	1.009266	0.862153	0.757591	1.000000
4.225268	2.096990	1.524200	1.221575	1.031080	0.899142	1.000000
4.292418	2.324274	1.656142	1.316071	1.106832	0.963398	1.000000
1.000000	0.416667	0.284091	0.221946	0.184955	0.160057	0.000000

для $N = 5$

3.803561	0.701064	0.160750	-0.039054	-0.133544	1.000000
3.892630	1.006447	0.531682	0.363203	0.284434	1.000000
4.042105	1.493278	1.045873	0.849866	0.730660	1.000000
4.194284	1.993357	1.455256	1.171876	0.991675	1.000000
4.288577	2.311127	1.649231	1.311061	1.102781	1.000000
1.000000	0.416667	0.284091	0.221946	0.184955	0.000000

$$C = \frac{C_1}{h} = 0.5$$

$$\sigma = 0.31741$$

Уравнение (3.4), соответствующее номеру $N+1$, есть выражение условия (3.3), причем $A_{N+1} = C_0$, $B_{N+1} = 0$.

В табл. 1 приведены результаты расчетов для напряжения в заделке $\sigma(y)$ в зависимости от числа точек коллокации ($N = 5, 6, 7$) для $C = 0.5$, $\sigma = 0.31741$.

Таблица 1

y	$\sigma(y)h/P$		
	$N = 5$	$N = 6$	$N = 7$
0	-0.09355	-0.09226	-0.09260
0.1	-0.10045	-0.09938	-0.09962
0.2	-0.12145	-0.12037	-0.12048
0.4	-0.20207	-0.19847	-0.19861
0.6	-0.26920	-0.27203	-0.27055
0.8	-0.03490	-0.00570	-0.00820
0.95	+0.97350	+0.98192	+0.98662

Таблица 2

A_k	C		
	$C = 0.5$	$C = 1$	$C = 2$
A_1	-0.09260	-0.17953	-0.03621
A_2	-0.67577	+0.24741	+0.17426
A_3	+0.36628	+0.64034	-0.11729
A_4	+0.31330	+0.04506	-0.01961
A_5	+2.47072	-1.74094	+0.02093
A_6	-0.11710	+2.21550	-0.00727
A_7	-1.67375	-1.04300	-0.01006
C_0	+0.64518	+0.77436	+0.79367

Из этой таблицы можно заключить, что пятое приближение отличается от шестого на 2%, а шестое от седьмого — на 0.8%. Оказалось, что чем меньше $C = C_1/h$, тем больше членов необходимо брать в (3.1) для достижения одной и той же точности.

Табл. 2 содержит значения коэффициентов A_k для седьмого приближения и значений $C = 0.5, 1.0, 2.0$.

На фиг. 2 приведены графики зависимости напряжения в заделке от $C = C_1 / h$.

Ясно, что напряжения при $C \rightarrow 0$ стремятся к нулю неравномерно по толщине полосы так, что они сосредоточиваются все в большей степени в вершине угла.

Практически принцип Сен-Венана уже применим для всех $C = C_1 / h \geq 2$, т. е. за этой границей условия заделки несущественно влияют на решение задачи.

Поступила 14 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Н о р в а у G. The end problem of rectangular strips. J. Appl. Mech., 1953, vol. 20, No. 1, p. 87—94.
2. Н о р в а у G. Biharmonic eigenvalue problem of the semi-infinite strip. Quart. Appl. Math., 1957, vol. 15, No. 1, p. 65—81.
3. Н о р в а у G., М и р а б а л J. The end problem of cylinders. J. Appl. Mech., 1958, vol. 25, No. 4, p. 561—570.
4. К о и т е р W. T., А і б л а с J. B. On the bending of cantilever rectangular plates. Proc. Koninke. Nederl. Akad. wet., B, 1954, vol. 57, No. 2, p. 250—269, No. 5, p. 549—557; 1957, vol. 60, No. 3, p. 173—181.
5. P i c k e t t G. J y e n g a r K. T. Stress concentration in post-tensioned prestressed concrete beams. J. Technol., 1956, vol. 1, No. 2, p. 105—112.
6. S u n d a r a R a j a, J y e n g a r K. T. Über den Spannungszustand in einem elastischen Halbstreifen. Österr. Ingr.—Arch., 1962, B. 16, No. 3, S. 185—199.
7. Z o r s k i H. A semi-infinite strip with discontinuous boundary conditions. Arch. Mech. stosowanej, 1958, vol. 10, No. 3, p. 371.
8. T h e o c a r i s P. S. The stress distribution in a semi-infinite strip subjected to a concentrated load. Trans. J. Appl. Mech., 1959, vol. 26, No. 3, p. 401—406.
9. T e o d o r e s c y P. P. Sur le calcul des poutres-parois encastrées. III. Le quart de plan élastique. Bull. Acad. Polon. sci. Sér. sci. techn., 1961, vol. 9, No. 7, p. 413.
10. Т р а п е з н и к о в Л. П. Линии влияния для нормальных напряжений в полуполосе. Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехники, 1963, т. 73, стр. 271—278.
11. G a y d o n F. A., S h e p h e r d W. M. Generalized plane stress in a semi-infinite strip under arbitrary end-load. Proc. Roy. Soc. A, 1964, vol. 281, No. 1385, p. 184.
12. B u c h w a l d V. T. Eigenfunctions of plane elastostatics. Proc. Roy. Soc. A, 1964, vol. 277, No. 1370, p. 385.
13. B e n t h e m J. Laplace transform method for the solution of semi-infinite and finite problems in stress analysis. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1963, vol. 16, No. 4, p. 413—429.
14. W i l l i a m s M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. J. Appl. Mech., 1952, vol. 19, No. 4, p. 526.
15. W i l l i a m s M. The complex-variable approach to stress singularities — II. J. Appl. Mech., 1956, vol., 23, No. 3, p. 477.
16. У ф л я н д Я. С. Смешанная задача теории упругости для клина. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 2, стр. 156.
17. К у р ш и н Л. М. Смешанная плоская задача теории упругости для квадранта. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5, стр. 981.
18. К а л а н д и я А. И. Об одном прямом методе решения уравнения теории крыла и его применении в теории упругости. Матем. сб. (новая серия), 1957, т. 42 (84), № 2.
19. К а л а н д и я А. И. О приближенном решении одного класса сингулярных интегральных уравнений. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 4, с. 715—718.
20. К р а т ц е р А., Ф р а н ц В. Трансцендентные функции. М., Изд. иностр. лит., 1963.