

О СХОДЯЩЕЙСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЕ ПРИ НАЛИЧИИ ДИССИПАТИВНЫХ ЭФФЕКТОВ

В. Ф. Дьяченко, В. С. Имшенник

(Москва)

В задаче о сжатии к оси цилиндрически симметричной ударной волны существует известное автомодельное решение (см. например, [1,2]), которое можно рассматривать как асимптотику в окрестности оси для любого решения такой задачи. В этом автомодельном решении, по мере приближения к оси, имеет место неограниченный рост температуры и скорости. Следовательно, в некоторой окрестности оси, порядка средней длины свободного пробега частиц, становятся существенными диссипативные процессы, — в первую очередь, вязкость и теплопроводность.

Ниже для случая полностью ионизованной плазмы получено решение, учитывающее эти эффекты. Это решение можно рассматривать как уточнение автомодельного.

Физический смысл решения, в особенности для структуры фронта ударной волны, может быть подвергнут критике, так как гидродинамическое приближение недостаточно, если характерным масштабом изменения величин является средняя длина свободного пробега частиц. Тем не менее, есть основания ожидать, что уже в гидродинамическом приближении с учетом вязкости и теплопроводности получается качественно правильное описание процесса в окрестности оси, поскольку оно оправдано даже в более жестких условиях плоской ударной волны [3].

1. Рассмотрим систему гидродинамических уравнений плазмы, в которой учтены основные диссипативные процессы: ионные теплопроводность и вязкость, электронная теплопроводность и обмен энергией между ионами и электронами путем соударений. Эта система уравнений для идеальной плазмы с массой ионов M , однократным зарядом ионов и показателем адиабаты $\gamma = 5/3$ в цилиндрическом симметричном случае имеет вид [4]

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{k}{M} \rho (T + \Theta) \right] &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial r} \frac{u}{r} - \frac{1}{2} \frac{u}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r} \quad (1) \\ \frac{3}{2} \rho \frac{k}{M} \frac{dT}{dt} - \frac{k}{M} T \frac{d\rho}{dt} &= \mu \left(\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 - \frac{u}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \kappa_i \frac{\partial T}{\partial r} \right) - Q \\ \frac{3}{2} \rho \frac{k}{M} \frac{d\Theta}{dt} - \frac{k}{M} \Theta \frac{d\rho}{dt} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \kappa_e \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) + Q, \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) = 0 \end{aligned}$$

Здесь μ — коэффициент ионной вязкости, κ_i , κ_e — коэффициенты ионной и электронной теплопроводности, Q — скорость перехода энергии от ионов к электронам, u , ρ — скорость и плотность плазмы. В уравнениях учтено различие ионной T и электронной Θ температур соответственно. Рамки применимости этих уравнений для описания плазмы известны [5].

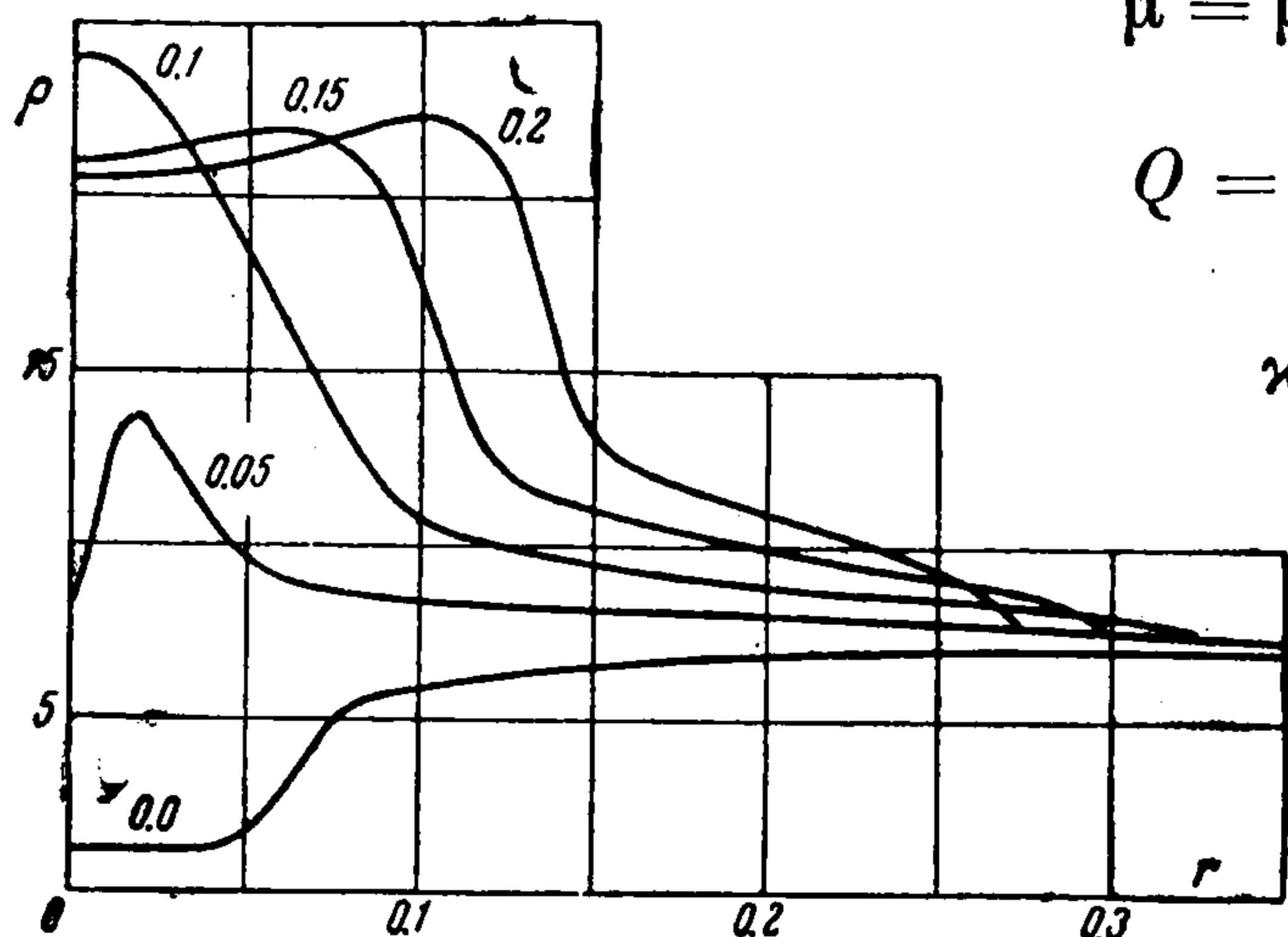
Согласно кинетической теории плазмы, коэффициенты диссипации [6-8]

$$\begin{aligned} \mu &= 1.08 \frac{M^{1/2}}{e^4 L} (kT)^{1/2}, & \kappa_i &= 3.35 \frac{k}{m^{1/2} e^4 L} \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} (kT)^{1/2} \\ \kappa_e &= 1.9 \frac{k}{m^{1/2} e^4 L} (k\Theta)^{1/2}, & Q &= 5.0 \frac{m^{1/2} e^4 L}{M^3} \rho^2 \frac{k(T-\Theta)}{(k\Theta)^{3/2}} \end{aligned} \quad (2)$$

Для средних длин свободного пробега ионов и электронов имеем

$$l_i = \frac{M (kT)^2}{\rho e^4 L}, \quad l_e = \frac{M (k\Theta)^2}{\rho e^4 L} \quad (3)$$

Здесь L — кулоновский логарифм, m — масса электрона, e — элементарный электрический заряд, k — постоянная Больцмана.



Фиг. 1

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_0 \left(\frac{kT}{M}\right)^{1/2}, & \kappa_i &= 3.1 \mu_0 \left(\frac{kT}{M}\right)^{1/2} \frac{k}{M} \\ Q &= 5.4 \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \mu_0^{-1} \rho^2 \frac{k}{M} (T-\Theta) \left(\frac{k\Theta}{M}\right)^{-3/2} \\ \kappa_e &= 1.76 \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} \mu_0 \left(\frac{k\Theta}{M}\right)^{1/2} \frac{k}{M} \end{aligned} \quad (4)$$

Из (2) легко получить

$$\mu_0 = 1.08 \frac{M^3}{e^4 L} \quad (5)$$

Ограничиваясь для получения количественных результатов случаем дейтериевой плазмы, положим $(M/m)^{1/2} = 60.5$.

Для системы (1) рассмотрим следующую задачу. В начальный момент времени на отрезке $0 \leq r \leq r^0$ заданы $\rho = \rho_0$, $u = T = \Theta = 0$.

Граничные условия

$$\begin{aligned} u &= 0, & \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0 & \text{при } r &= 0 \\ \frac{dr^0}{dt} &= u, & \frac{k}{M} \rho (T + \Theta) &= f(t) & \text{при } r &= r^0 \end{aligned} \quad (6)$$

где заданная функция $f(t)$ берется из автомодельного решения¹.

Если за начало отсчета времени принять момент фокусировки автомодельной ударной волны, то автомодельное решение зависит только от параметров ρ_0 и ξ_0 , где $tr^{-\nu} = \xi_0$ — уравнение фронта ударной волны, $\nu = \nu(\gamma)$ — показатель автомодельности, в рассматриваемом случае $\gamma = 5/3$, $\nu = 1.226$.

Таким образом в постановку нашей задачи входят четыре независимых определяющих параметра ρ_0 , ξ_0 , μ_0 , r^0 . Перейдем к безразмерным переменным, выбрав за единицы измерения следующие величины:

$$\rho_0, \quad r_0 = \left(\frac{\mu_0}{\rho_0 \xi_0^4}\right)^{1/(4\nu-3)}, \quad t_0 = \xi_0 r_0^\nu, \quad u_0 = \frac{r_0}{t_0}, \quad T_0 = \frac{M}{k} \frac{r_0^2}{t_0^2} \quad (7)$$

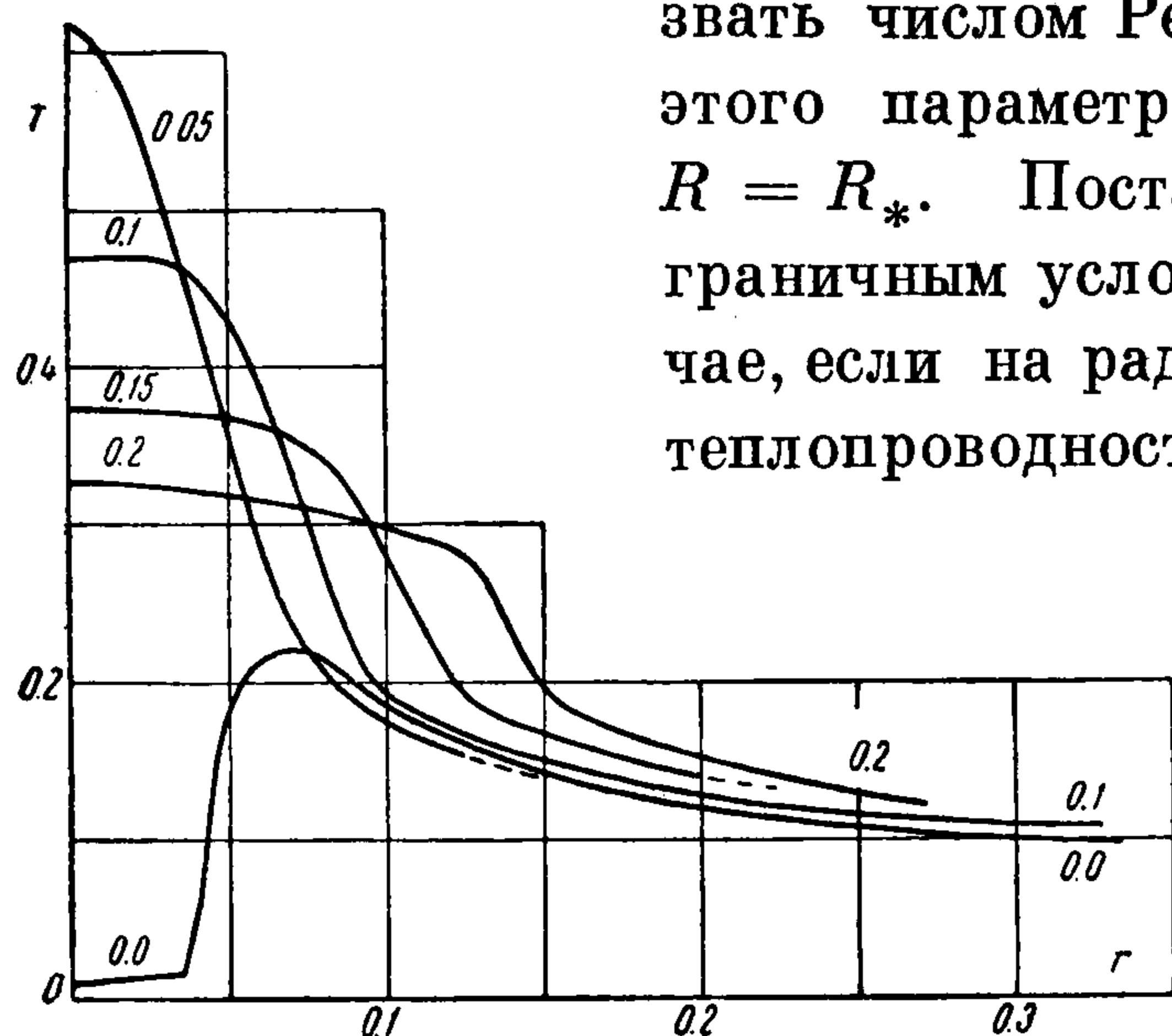
¹ Точнее говоря, в левой части второго граничного условия бралась радиальная компонента потока импульса, равная $k/M\rho(T+\Theta) - \sigma'_{rr}$, где σ'_{rr} — компонента вязкого тензора. Однако количественно добавочный член σ'_{rr} очень мал.

Легко убедиться, что r_0 характеризует среднюю длину свободного пробега, а именно из (3), (7) имеем

$$l_i \approx r_0 T^2 / \rho \quad (8)$$

Здесь опущен множитель порядка 1, а T и ρ — безразмерные.

Безразмерные функции, которые снова обозначим ρ , u , T , θ , как нетрудно показать, должны удовлетворять системе (1), (4) (где $\mu_0 = k / M = 1$) начальным данными $u = T = \theta = 0$, $\rho = 1$ при $0 \leq r \leq R = r^0 / r_0$ и граничным условиям (6) в безразмерном виде. Тем самым в задаче остается один определяющий параметр R (его можно назвать числом Рейнольдса). Остановимся на влиянии этого параметра. Фиксируем некоторое значение $R = R_*$. Поставленная задача (с автомодельным граничным условием) имеет смысл только в том случае, если на радиусах $r \sim R_*$ эффекты вязкости и теплопроводности незначительны. Другими словами, существенно, чтобы ударная волна успевала выйти на автомодельный режим раньше, чем начнут сказываться диссипативные эффекты. Но тогда при $r > R_*$ решение также можно предполагать автомодельным, так как это приведет к тем же условиям на $r = R_*$, т. е. можно взять любое $R \geq R_*$, и это не



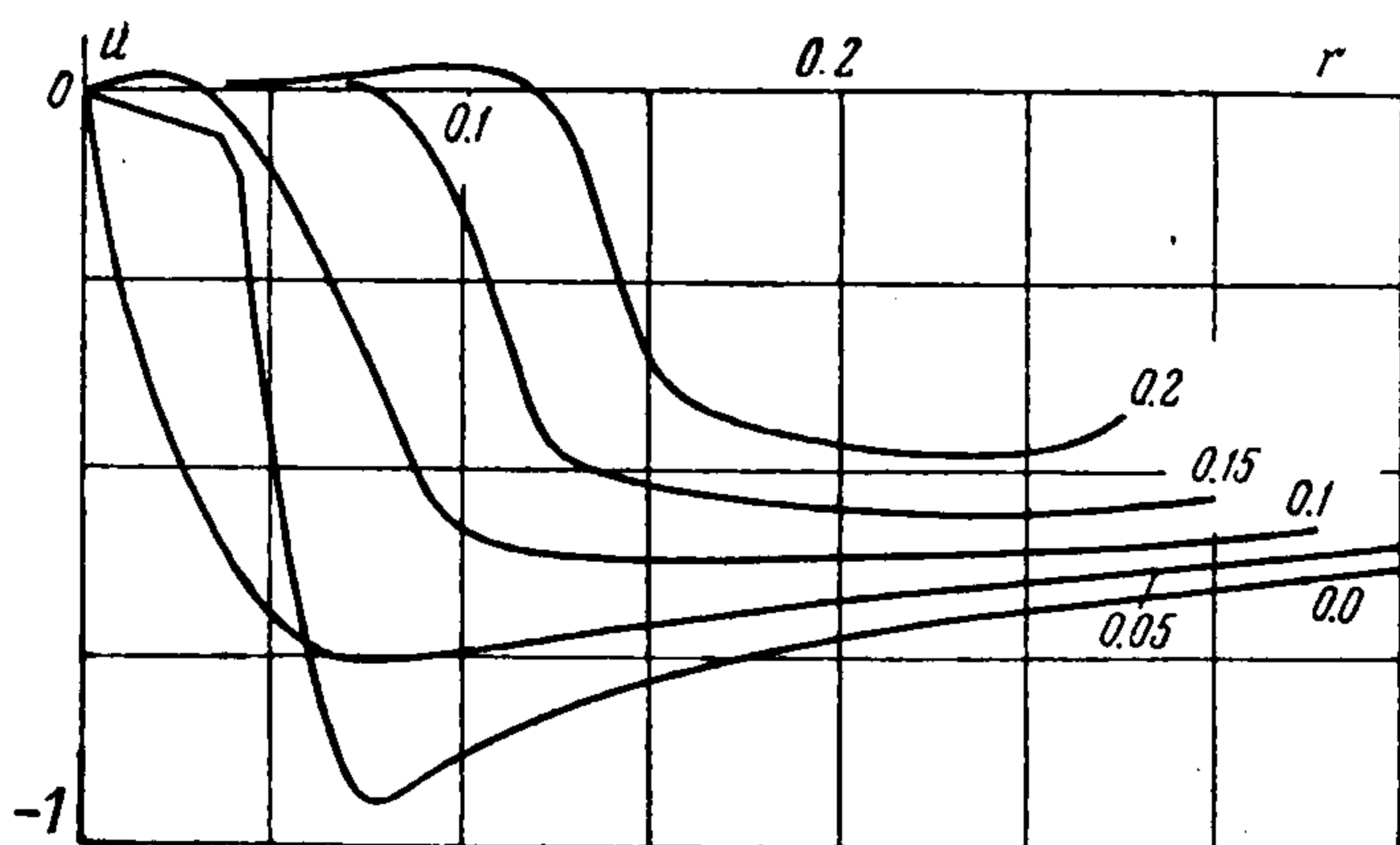
Фиг. 3

отразится на решении при $r < R_*$. Итак, если поставленная задача имеет смысл, то решение не зависит от параметра R , и задачу достаточно решить один раз для $R \geq R_*$. При этом величину R_* можно найти так. Эффекты вязкости и теплопроводности существенны на длинах порядка l . Из формулы (8) имеем

$$\frac{l_i}{r^0} \approx \frac{1}{R} \frac{T^2}{\rho} \quad (9)$$

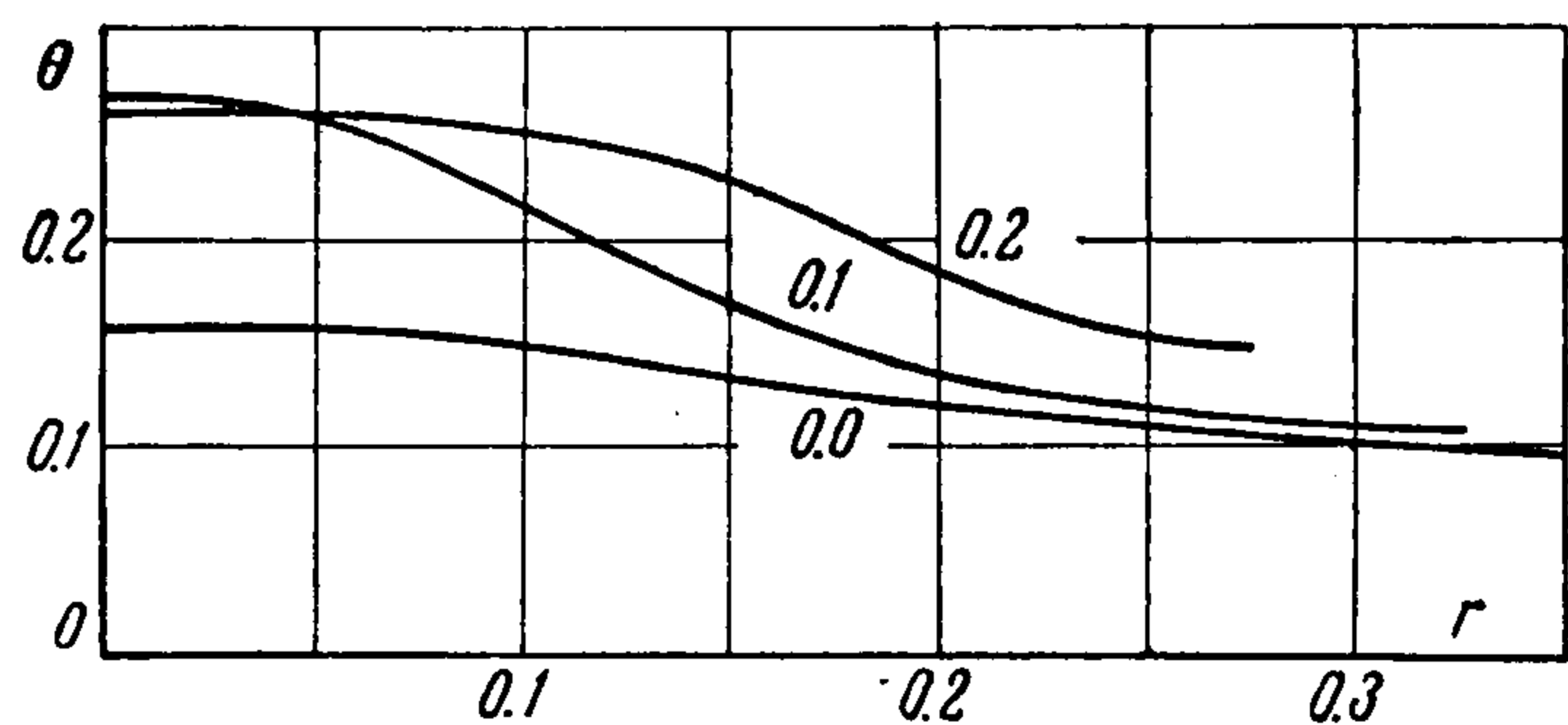
Упомянутые эффекты на радиусах $\sim r^0$ будут незначительны, если l_i / r^0 достаточно мало. Взяв T и ρ из автомодельного решения, при помощи (9) получаем $R_* \sim 1$.

Таким образом, существует класс задач о сжатии волны, где учет диссипативных эффектов может качественно изменить характер решения по сравнению с автомодельным. Подобная ситуация отмечена в работе [9], где рассмотрена задача о заполнении пузырьков в вязкой жидкости и получено два качественно различных типа решения.



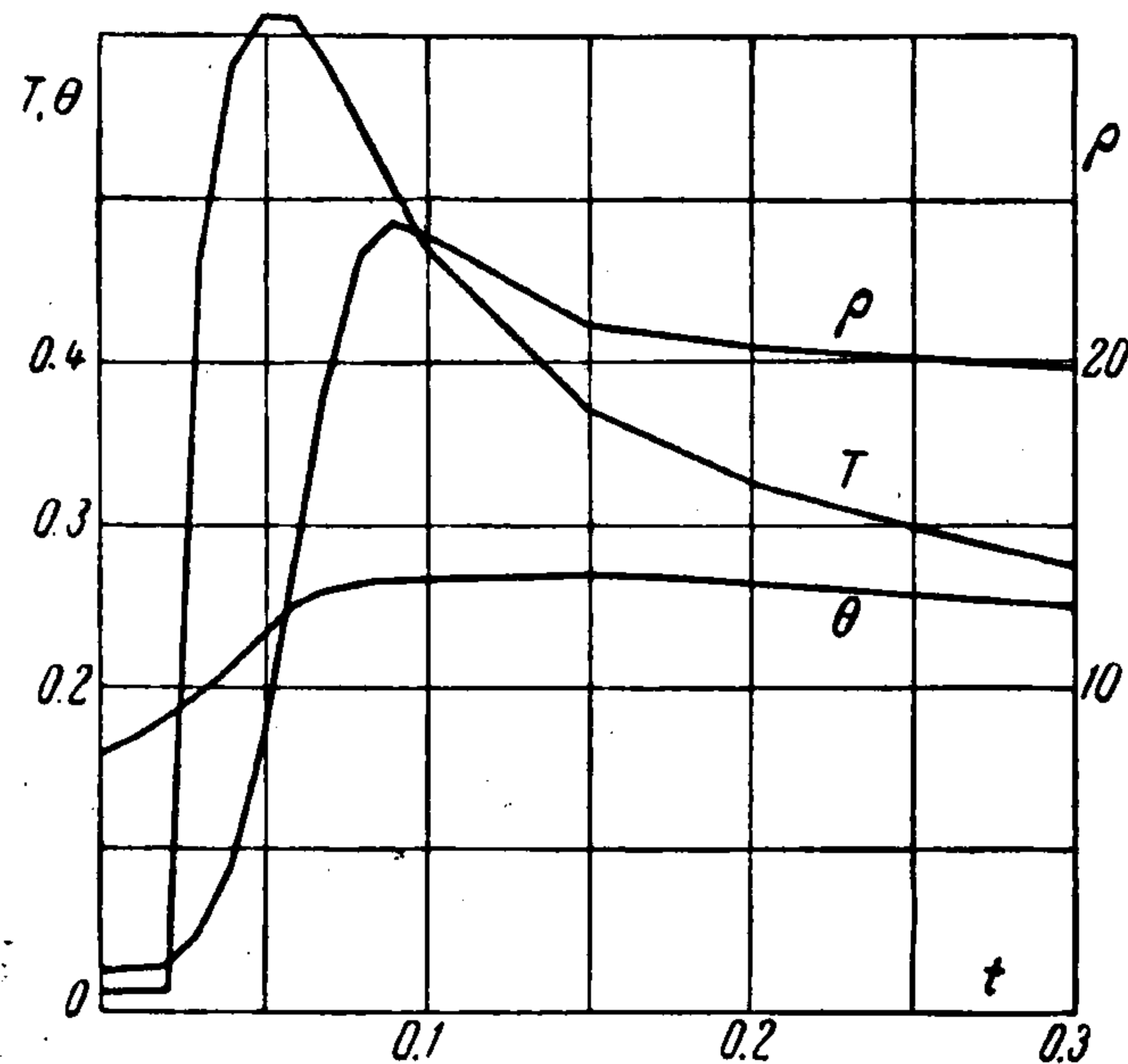
Фиг. 2

существенно, чтобы ударная волна успевала выйти на автомодельный режим раньше, чем начнут сказываться диссипативные эффекты. Но тогда при $r > R_*$ решение также можно предполагать автомодельным, так как это приведет к тем же условиям на $r = R_*$, т. е. можно взять любое $R \geq R_*$, и это не



Фиг. 4

Задача решалась численным методом, аналогичным описанному в [4]. Ниже приводятся некоторые результаты расчетов. В сходящейся волне сходство с автомодельным решением весьма велико вплоть до того момента, когда расстояние от фронта волны до оси становится сравнимым с шириной размазывания фронта, т. е. с длиной пробега $l_i \approx T^2/\rho$. Наибольшие отличия решений будет после отражения волны от оси. Для этой стадии на фиг. 1—4 даны распределения ρ , u , T , Θ как функций от r на различные, указанные на фигурах, моменты времени. На фиг. 5 изображены ρ , T , Θ на оси как функции времени.



Фиг. 5

В автомодельном решении плотность в момент фокусировки ($t = 0$) всюду равна 7, затем несколько увеличивается до 11.7 к моменту прихода отраженной волны, на которой скачком меняется до 22.9. На оси $\rho = 0$, а средняя на участке от оси до отраженной волны все время равна 19.2.

Сравнивая наше решение (фиг. 1) с автомодельным, можно сказать, что наибольшее отличие в плотности наблюдается непосредственно около оси, где $\rho \approx 20-24$. На фронте отраженной волны плотность близка к автомодельной $\rho \approx 24-22$, а средняя плотность несколько больше. В автомодельном решении максимальное значение температуры на данном радиусе r дается формулой $T_{\max} = 0.224r^{-0.452}$, оно достигается на фронте отраженной волны. Соответствующая ей величина $T + \Theta$, полученная в расчете, заметно отличается от T_{\max} до $r \approx 0.1$. Этот интервал $0 < r < 0.1$ можно считать зоной отличия решения от автомодельного; она составляет несколько десятков длин свободного пробега. Внутри ее $T + \Theta < T_{\max}$; причем наибольшие значения T и Θ достигаются на оси и равны 0.614 и 0.268 соответственно.

Описанный метод можно применить для теоретической оценки температур и плотности, достигаемых при кумуляции ударной волны, не только в случае ионизированной плазмы, но и для других задач, с другим характером диссипативных процессов.

Авторы благодарят В. В. Палейчик, которая провела всю работу по постановке расчетов на вычислительной машине, и Я. М. Каждана, любезно предоставившего в наше распоряжение результаты расчетов автомодельного решения.

Поступила 26 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. G u d e r l e y G. Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw der Zylinderachse. Luftfahrtforschung, 1942, vol. 19, No. 9.
2. С т а н ю к о в и ч К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. Гостехиздат, 1955.
3. L i e r m a n n H. W., N a r a s i m h a R., C h a h i n e M. T. Structure of a Plane Shock Layer. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 11.
4. Д ъ я ч е н к о В. Ф., И м ш е н н и к В. С. Сходящаяся цилиндрическая ударная волна в плазме с учетом структуры фронта. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 5.
5. И м ш е н н и к В. С. О структуре ударных волн в высокотемпературной плотной плазме. Ж. эксперим. и теор. физ., 1962, т. 42, № 1.
6. C h a r m a n S., C o w l i n g T. G. The mathematical theory of non-uniform gases. Cambridge Univ. Press., 1939 (русск. перев.: Чапман, Коулинг. Математическая теория неоднородных газов. Изд. иностр. лит., 1960).
7. И м ш е н н и к В. С. О теплопроводности плазмы. Астр. ж., 1961, т. 38, № 4.
8. Л а н д а у Л. Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия. Ж. эксперим. и теор. физ., 1937, т. 7, № 2.
9. З а б а б а х и н Е. И. Заполнение пузырьков в вязкой жидкости. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.