ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА КОШИ-ПУАССОНА ДЛЯ ВОЛН В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Л. В. Черкесов (Минск)

Рассматривается пространственная задача о волнах на поверхности вязкой жидкости, вызываемых начальными возмущениями. Аналогичная задача для плоского случая рассмотрена в работе Л. Н. Сретенского [1], а для пространственного случая — в работе [2]. В отличие от работы [2], где даются приближенные асимптотические формулы вида свободной поверхности для начальных возмущений только типа дельта-функций без оценки степени точности полученного приближения, в настоящей работе получены приближенные асимптотические формулы для произвольных начальных возмущений и дается оценка степени точности полученного приближения.

Кроме того, в случае концентрированных начальных возмущений типа дельта-функций для вида свободной поверхности получены формулы, аналогичные формулам, полученным Кочиным [3] при решении аналогичной задачи для идеальной жидкости.

§ 1. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ вязкая несжимаемая жидкость, занимающая полупространство $z < 0$, находится в покое, а ее свободная поверхность имеет вид $\zeta(x, y, 0) = \zeta_0(x, y)$. Поставим своей задачей найти вид свободной поверхности жидкости в любой момент времени $t > 0$. Предполагая движения медленными, получим систему уравнений гидродинамики в виде

$$\rho u_t = -p_x + \mu\Delta u, \qquad \rho v_t = -p_y + \mu\Delta v, \qquad \rho w_t = -p_z - \rho g + \mu\Delta w$$

$$u_x + v_y + w_z = 0 \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$u = v = w = 0, \qquad \zeta = \zeta_0(x, y) \quad \text{при } t = 0 \tag{1.2}$$

и граничными условиями

$$p_{nn} = p_{n\tau_1} = p_{n\tau_2} = 0, \qquad \zeta_t = w \quad \text{при } z = \zeta \tag{1.3}$$

Здесь τ_1 и τ_2 — два ортогональных направления. Введем функцию $\psi(x, y, z, t)$ равенством

$$p = \rho\psi - g\rho z \tag{1.4}$$

Тогда, так как движения малые, то с точностью до малых первого порядка включительно граничные условия (1.3) можно записать так:

$$g\zeta = \psi - 2\nu w_z, \ \zeta_t = w, \quad u_z + w_x = 0, \quad v_z + w_y = 0 \quad \text{при } z = 0 \tag{1.5}$$

Система уравнений (1.1) с учетом (1.4) принимает вид

$$u_t = -\psi_x + \nu\Delta u, \quad v_t = -\psi_y + \nu\Delta v, \quad w_t = -\psi_z + \nu\Delta w, \quad u_y + v_y + w_z = 0 \tag{1.6}$$

Применим к уравнению (1.6) и граничным условиям (1.5) преобразование Лапласа по времени t и преобразование Фурье по переменным x и y. Тогда, с учетом начальных условий (1.2), получаем такую систему уравнений для изображений (1.7)

$$\alpha U = -im\Psi + \nu[-(m^2 + n^2)U + U_{zz}], \quad \alpha V = -in\Psi + \nu[-(m^2 + n^2)V + V_{zz}]$$

$$\alpha W = -\Psi_z + \nu[-(m^2 + n^2)W + W_{zz}], \qquad i(mU + nV) + W_z = 0$$

с граничными условиями

$$\alpha[\Psi - 2\nu W_z - gZ_0] - gW = 0, \quad imW + U_z = 0, \quad inW + V_z = 0 \text{ при } z = 0 \tag{1.8}$$

Здесь U, V, W, Ψ, Z_0 — изображения функций u, v, w, ψ, ζ_0 — являются функциями от z, α, m, n, где α — параметр преобразования Лапласа, m и n — параметры преобразования Фурье соответственно по x и y. Из уравнений (1.7) находим

$$\Psi_{zz} = (m^2 + n^2)\Psi$$

Отсюда, удовлетворяя условию $\Psi \to 0$ при $z \to -\infty$, имеем

$$\Psi = A \exp (z \sqrt{m^2 + n^2}) \tag{1.9}$$

Здесь у корня берется то его значение, вещественная часть которого положительна. Из системы (1.7) с учетом (1.9) и условия U, V, $W \to 0$ при $z \to -\infty$ получаем

$$\begin{aligned} U &= B \exp (zb\nu^{-1/2}) + B_1 \exp (zr), \qquad B_1 = -im\alpha^{-1}A \qquad b = \sqrt{\alpha + \nu r^2} \\ V &= C \exp (zb\nu^{-1/2}) + C_1 \exp (zr), \qquad C_1 = -in\alpha^{-1}A, \qquad C = (ibD - mB)\, n^{-1} \\ W &= D \exp (zb\nu^{-1/2}) + D_1 \exp (zr), \qquad D_1 = -r\alpha^{-1}A, \qquad r = \sqrt{m^2 + n^2} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Здесь A, B, D — произвольные функции от α, m, n. Удовлетворяя граничным условиям (1.8), получим для определения A, B, D систему

$$\begin{gathered} A (\alpha^2 + 2\nu\alpha r^2 + gr) - D\alpha (2\nu^{1/2}b\alpha + g) = \alpha^2 g Z_0 \\ -2imr\nu^{1/2}A + bim\alpha\nu^{1/2}D + \alpha b B = 0 \\ -2in^2 r\nu A + i\nu\alpha (b^2 + n^2\nu) D - m\alpha\nu^{1/2} b B = 0 \end{gathered} \tag{1.11}$$

Применяя интегральное преобразование ко второму уравнению (1.5), имеем $\alpha (Z - Z_0) = W$ при $z = 0$. Отсюда и из (1.10) находим

$$Z = Z_0 + \alpha^{-1} (D - A\alpha^{-1} r) \tag{1.12}$$

Подставляя сюда A и D — решения системы (1.11), получаем

$$Z = Z_0 (1 - gr\Delta_1^{-1}), \qquad \Delta_1 = \alpha^2 + gr + 4\nu\alpha r^2 - 4\nu^{3/2} b r^3 + 2\nu^2 r^4$$

Вводя переменные $m = kr \cos\theta$, $n = kr \sin\theta$, $\alpha = \sigma\alpha_1$, $x = R\cos\gamma$, $y = R\sin\gamma$ и применяя формулу Меллина и обратное преобразование Фурье, получим из (1.12)

$$\zeta(x,y,t) = \frac{\sigma^4}{2\pi g^2} [\eta_1 + \varepsilon^{3/2} (\eta_2 + \eta_3)] \tag{1.13}$$

$$\eta_j = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} Z_0 (r, \theta)\, \varkappa_j (r, t, \varepsilon) \exp (irR_1 \cos (\theta - \gamma))\, r\, dr\, d\theta, \qquad \varkappa_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \varphi_j (\alpha, r)\, e^{\alpha t} d\alpha$$

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \zeta_0 (R, \gamma) \exp (-irR_1 \cos (\theta - \gamma))\, R\, dR\, d\gamma \qquad (j = 1, 2, 3)$$

$$\varphi_1 = \frac{\alpha + 4\varepsilon r^2}{\Delta}, \qquad \varphi_2 = \frac{-4r^3 \sqrt{\alpha + \varepsilon r^2} + 2\varepsilon^{1/2} r^4}{\alpha\Delta_1}, \qquad \varphi_3 = \frac{(\alpha + 4\varepsilon r^2)\,\Delta_2}{\Delta\Delta_1}$$

$$\Delta = \alpha^2 + 4\varepsilon\alpha r^2 + r + 4\varepsilon^2 r^4, \qquad \Delta_1 = \Delta - \varepsilon^{3/2}\Delta_2, \qquad \Delta_2 = 4r^3 \sqrt{\alpha + \varepsilon r^2} + 2\varepsilon^{1/2} r^4$$

$$\varepsilon = \nu g^{-2}\sigma^3, \qquad k = \sigma^2 g^{-1}, \qquad R_1 = kR, \qquad \sigma = 1\ \text{сек}^{-1}$$

Выражение (1.13) представляет точное решение поставленной задачи для произвольной функции $\zeta_0 (x, y)$, относительно которой будем предполагать, что она допускает преобразование Фурье по переменным x и y. Поэтому $Z_0 (r, \theta)$ не имеет особенностей в области интегрирования и стремится к нулю при $r \to +\infty$ быстрее, чем r^{-1}. Проведем дальнейший анализ формулы (1.13), предполагая $\varepsilon \ll 1$. Можно показать, что пренебрегая величинами порядка $\varepsilon^{3/2}$ и выше, выражение (1.13) можно записать так:

$$\zeta = \frac{\sigma^4}{2\pi g^2} \eta_1 \tag{1.14}$$

Для этого, очевидно, нужно показать, что η_2 и η_3 при $\varepsilon \to 0$ имеют конечный предел. Пользуясь признаком Валле-Пуссена [4] о равномерной сходимости интегралов с бесконечными пределами, легко показать, что интегралы η_2 и η_3 сходятся равномерно относительно ε, и поэтому можно переходить к пределу под знаком интеграла. Вычислим выражение $(\varkappa_3)_{\varepsilon=0} = \varkappa_3{}^\circ$, имеющее вид

$$\frac{2r^3}{\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{\alpha \sqrt{\alpha}}{(\alpha^2 + r)^2} e^{\alpha t} d\alpha$$

Контурным интегрированием находим

$$\varkappa_3{}^0 = -2\,\mathrm{Re}\left[i^{3/2}\left(t - \frac{i}{2\sqrt{r}}\right)\right] r^{11/4} + K_3, \quad K_3 = \frac{4r^3}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha^{3/2}}{(\alpha^2+r)^2} e^{-\alpha t}\, d\alpha \qquad (1.15)$$

Последний интеграл выражается через функции Мейера и имеет вид

$$K_3 = \frac{2r^{9/4}}{\pi^{3/2}} G_{13}^{31}\left(\frac{rt^2}{4}\,\Big|_{3/4,\,0,\,1/2}^{-1/4}\right)$$

Так как никакая пара чисел $b_1 = 3/4$, $b_2 = 0$, $b_3 = 1/2$ не отличаются на целое число, то будет справедливо представление

$$G_{13}^{31}(\xi\,|_{b_1,\,b_2,\,b_3}^{a_1}) = \sum_{h=1}^{3}\prod_{j=1}^{3}{}' \Gamma(b_j - b_h)\,\Gamma(1 + b_h - a_1)\,\xi^{b_h} \times$$

$$\times F_2{}^{(1)}(1 + b_h - a_1;\quad 1 + b_h - b_\alpha,\quad 1 + b_h - d_\gamma;\ \xi)$$

где α и γ принимают значения 1, 2, 3 при выполнении условий $\alpha \neq h$, $\gamma \neq h$, $\alpha < \gamma$, $a_1 = -1/4$, $\xi = 1/4 rt^2$. Отсюда видно, что $K_3 \to 0$ при $r \to 0$, как $r^{9/4}$. Для $t > 0$ и $r \to \infty$ легко показать, что $K_3 \to \infty$ не быстрее, чем r^1, а поэтому $\varkappa_3{}^0 \to \infty$ при $r \to \infty$, как $r^{11/4}$. На основании (1.13) и (1.15) имеем представление в таком виде

$$\eta_3{}^0 = \sum_{k=1}^{5} B_k \qquad (1.16)$$

$$B_{1,2} = t\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \varphi_{1,2}(r,\,\theta)\exp\,[iRr\cos(\theta-\gamma] \pm i\sqrt{r}t]\,dr\,d\theta, \quad \varphi_{1,2} = -(\pm i)^{3/2} r^{15/4} Z_0(r,\,\theta)$$

$$B_{3,4} = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty \varphi_{3,4}(r,\,\theta)\exp\,[iRr\cos(\theta-\gamma) \pm i\sqrt{r}t]\,dr\,d\theta, \quad \varphi_{3,4} = -1/2(\pm i)^{1/2} r^{13/4} Z_0(r,\,\theta)$$

$$B_5 = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty \varphi_5(r,\,\theta)\exp\,[iRr\cos(\theta-\gamma)]\,dr\,d\theta, \qquad \varphi_5 = K_3 Z_0(r,\,\theta)$$

Будем предполагать, что $Z_0(r,\,\theta) \to 0$ при $r \to \infty$ не медленнее r^{-5} при соответствующих ограничениях на $\zeta_0(x,\,y)$. При этом условии все интегралы B_k будут абсолютно сходящимися. Выражение $B_{1,\,2}$ содержит множитель t перед двойным интегралом; методом стационарных фаз легко показать, что этот интеграл для больших t есть величина порядка t^{-1}. Поэтому $B_{1,\,2}$ с ростом t будут оставаться ограниченными. Итак, η_3 при $\varepsilon \to 0$ остается ограниченной. Совершенно аналогично показывается, что η_2 будет оставаться ограниченной при $\varepsilon \to 0$ при тех же предположениях относительно функции $Z_0(r,\,\theta)$. Таким образом, формула (1.14) с точностью до ε в первой степени включительно дает выражение вида свободной поверхности жидкости.

Интеграл $\varkappa_1$ на основании леммы Жордана вычисляется при помощи теоремы о вычетах. Так как уравнение $\Delta = 0$ имеет корни $\alpha_{1,\,2} = -2\varepsilon r^2 \pm i\sqrt{r}$, то

$$\varkappa_1 = -\sum_{k=1}^{2}\frac{\alpha_k + 4\varepsilon r^2}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_k t}(-1)^k \qquad (1.17)$$

Формула (1.14) теперь принимает вид

$$\zeta = \frac{\sigma^4}{2\pi g^2}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty Z_0(r,\,\theta)\,\varkappa_1(r,\,t)\exp\,[iRr\cos(\theta-\gamma)]\,r\,dr\,d\theta \qquad (1.18)$$

Здесь $\varkappa_1(r,\,t)$ дается формулой (1.17). Легко проверить, что начальное условие $\zeta(x,\,y,\,0) = \zeta_0(x,\,y)$ удовлетворяется.

Полученная формула (1.18) с точностью до ε в первой степени включительно представляет собою вид свободной поверхности жидкости в любой момент времени $t > 0$.

§ 2. Пусть в начальный момент $t=0$ свободная поверхность жидкости имеет вид

$$\zeta_0(x, y) = \begin{cases} \zeta_0 (1 - R^2 a^{-2})^\mu & (R < a) \\ 0 & (R > a) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \mu > 0 \\ \zeta_0 = \text{const} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

В этом случае

$$Z_0(r, \theta) = \zeta_0 a^2 k^{-2} \varphi(r), \qquad \varphi(r) = 2^\mu \Gamma(\mu + 1)(ar)^{-(\mu+1)} J_{\mu+1}(ar) \tag{2.2}$$

и интегралы η_2 и η_3 будут абсолютно сходящимися для $\mu > 3.25$. Учитывая, что интеграл в формуле (1.18) представляет предел интеграла

$$\int_0^{2\pi}\int_0^\infty Z_0(r, \theta)\, \varkappa_1(r, t) \exp[iRr\cos(\theta - \gamma) + zr]\, rdr\, d\theta$$

при $z \to -0$, запишем выражение для ζ в виде

$$\zeta = \zeta_0 \frac{\sigma^4 a^2}{g^2 k^2} \int_0^\infty \varphi(r)\, \varkappa_1(r, t)\, J_0(rR)\, e^{zr}\, r\, dr \tag{2.3}$$

Заметим, что объем Q начального возвышения жидкости вычисляется по формуле $Q = \pi a^2 \zeta_0 (\mu + 1)^{-1}$. Для упрощения дальнейших вычислений рассмотрим предельный случай, когда $a \to 0$, $\zeta_0 \to \infty$, так что величина Q остается неизменной (начальное возвышение типа дельта-функции). В этом предельном случае $\varphi(r)$ равно $[2(\mu + 1)]^{-1}$, и выражение (2.3) принимает вид

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} Q\sigma^4 g^{-2} \lim_{z \to -0} \psi(\varepsilon), \qquad \psi(\varepsilon) = \int_0^\infty rJ_0(rR)\, \varkappa_1(r, t)\, e^{zr}\, dr$$

$$\varkappa_1 = (\cos\sqrt{r}t + 2\varepsilon r^{3/2} \sin\sqrt{r}t)\exp(-2\varepsilon r^2 t) \tag{2.4}$$

Разлагая функцию $\psi(\varepsilon)$ в ряд по параметру ε и ограничиваясь первыми тремя членами ряда, имеем

$$\psi(\varepsilon) = \psi(0) + \varepsilon\psi'(0) + \varepsilon^2\, {}^1/_2 \varphi''(0) + R_3$$

$$\psi^{(k)}(0) = 2^{k+1}(-1)^k r^{2k} \int_0^\infty [rt^k \cos\sqrt{r}t - kt^{k-1}\sqrt{r}\sin\sqrt{r}t]\, J_0(rR)\, e^{zr} dr \qquad (k = 0, 1, 2)$$

Используя выражение остаточного члена ряда Тейлора [4], находим, что R_3 будет порядка ε^3. Разлагая $\sin\sqrt{r}t$ и $\cos\sqrt{r}t$ в ряды, получим выражение (2.4)в виде

$$\zeta = \frac{Q\sigma^4}{2\pi g^2} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k (\alpha_k + 2\varepsilon\beta_k + 4\varepsilon^2\gamma_k), \qquad \left(A_k = \int_0^\infty r^k J_0(rR)\, e^{zr}\, dr\right)$$

$$\alpha_k = \frac{1}{(2k)!} t^{2k} A_{k+1}, \qquad \beta_k = -\frac{2k}{(2k+1)!} t^{2k+1} A_{k+3}, \qquad \gamma_k = \frac{2k-1}{(2k+1)!} t^{2k+2} A_{k+5}$$

Учитывая, что

$$A_{k+1} = (z^2 + R^2)^{-1/_2(k+2)}\Gamma(k+2)\, P_{k+1}^0 (-z(z^2 + R^2)^{-1/_2})$$

$$P_{k+1}^0(0) = \sqrt{\pi}\,[\Gamma(k + {}^3/_2)\,\Gamma(-{}^1/_2 k)]^{-1} \tag{2.5}$$

где Γ — гамма-функция, P_{k+1} — шаровые функции первого рода, находим окончательное выражение для возвышения ζ

$$\zeta = \frac{Q\omega}{2\pi} R^{-2}\left[H_0 + \frac{\nu t}{R^2} H_1 + \left(\frac{\nu t}{R^2}\right)^2 H_2\right], \quad \omega = \frac{gt^2}{2R}$$

$$H_j = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \delta_{kj}\omega^{2k} \quad (j = 0, 1, 2), \qquad \delta_{k0} = \frac{[(2k+1)!!]^2\, 2^{2k+1}}{[2(2k+1)]!}$$

$$\delta_{k1} = \frac{2(4k+2)[(2k+3)!!]^2\, 2^{2k+1}}{(4k+3)!}, \qquad \delta_{k2} = \frac{4(4k+1)[(2k+5)!!]^2\, 2^{2k+1}}{(4k+3)!}$$

Здесь t и R — первоначальные размерные величины. Выражение (2.6) при $\nu =$ совпадает с выражением для возвышения жидкости, полученным при решении аналогичной задачи для идеальной жидкости [3, 5].

Ряды (2.6) для H_j будут сходящимися для любых значений ω, но для вычислений они удобны только при малых значениях ω. Н. Е. Кочин [3] нашел выражение ряда H_0 через бесселевы функции, удобное для вычислений при любых значениях ω. Это выражение имеет вид

$$H_0 = {}^1/_8\, \pi \sqrt{2} J_{1/4} J_{-1/4} - {}^1/_{32} \pi \sqrt{2} \omega \left(J_{1/4} J_{3/4} - J_{-1/4} J_{-3/4}\right) \tag{2.7}$$

У всех этих функций один и тот же аргумент ${}^1/_4\omega$. Найдем теперь выражение ряда H_1 через бесселевы функции. Этот ряд можно представить интегралом вида

$$H_1 = \int_0^{1/2\pi} F\left({}^1/_2\omega \cos^2\varphi\right) \cos^3\varphi \, d\varphi \qquad \left(F(x) = 2\left[9 - 6x^2\right) J_0(x) - \left(10x - x^3\right) J_1(x)\right]\right) \tag{2.8}$$

Выражение (2.8) легко проверить, подставляя вместо J_0 и J_1 их выражения в виде рядов и интегрируя почленно. С другой стороны, используя известную из теории бесселевых функций формулу

$$J_\mu(z) J_\nu(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} J_{\mu+\nu}(2z\cos\theta) \cos(\mu - \nu)\theta \, d\theta \tag{2.9}$$

если $\mu + \nu > -1$, интеграл (2.8) можно выразить через бесселевы функции в виде

$$\begin{aligned} H_1 = {}^1/_2\pi \sqrt{2}\, [&{}^9/_4 J_{1/2} J_{-1/2} + {}^{21}/_8 J_1 J_0 - {}^{295}/_{64} J_{3/4} J_{-3/4} + {}^5/_{32} J_{-1/4} J_{-3/4} - \\ &- {}^{33}/_{16} J_{1/4} J_{-1/4} + {}^1/_{32}\omega \left(53 J_{-1/4} J_{-3/4} - 58 J_{1/4} J_{3/4}\right) - \\ &- {}^1/_{64}\omega^2 \left(36 J_{1/4} J_{-1/4} + 33 J_{3/4} J_{-3/4}\right) + {}^1/_{16}\omega^3 \left(J_{1/4} J_{3/4} - J_{-1/4} J_{-3/4}\right)] \end{aligned}$$

Здесь у всех функций один и тот же аргумент ${}^1/_4\omega$. Аналогичным образом можно получить выражение ряда H_2 через бесселевы функции, представив его в виде

$$H_2 = 4V_1 - 8t \frac{dV_2}{dt}$$

$$V_1 = \int_0^{1/2\pi} F_1\left({}^1/_2\omega\cos^2\varphi\right) \cos\varphi \, d\varphi, \qquad V_2 = \omega \int_0^{1/2\pi} F_1\left({}^1/_2\omega\cos^2\varphi\right)\cos^3\varphi \, d\varphi$$

$$F_1(x) = \left(225 + 263x^2 + 15x^4\right) J_0(x) - \left(x^5 - 70x^3 + 252x\right) J_1(x)$$

и проведя интегрирование выражений V_1 и V_2, аналогичных выражению (2.8).

§ 3. Проведем асимптотический анализ выражения (1.18) для больших значений R. Для этого запишем это выражение так:

$$\zeta = \frac{\sigma^4}{2\pi g^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{2} f_k(r, \theta) e^{iRM_k(r,\theta)} \, r \, dr \, d\theta \tag{3.1}$$

$$f_k = (-1)^k \frac{i\sqrt{r}\,(-1)^k - 2\varepsilon r^2}{2i\sqrt{r}} e^{-2\varepsilon r^2 t} Z_0(r, \theta)$$

$$M_k = r\cos(\theta - \gamma) - \xi\sqrt{r}\,(-1)^k, \qquad \xi = tR^{-1}$$

Используя известную формулу метода стационарных фаз для двойных интегралов [6], получим такое выражение для возвышения жидкости при больших значениях R для произвольного начального возвышения:

$$\zeta = \frac{2\sqrt{2}\sigma^2}{gR} \operatorname{Re}\left[f(r_1, \theta_1) \exp\left(i\frac{gt^2}{4R}\right)\right] \exp\left(-\frac{\nu g^2 t^5}{8R^4}\right) \tag{3.2}$$

$$f(r, \theta) = \frac{i\sqrt{r} + 2\varepsilon r^2}{2i} \sqrt{r} Z_0(r, \theta), \qquad r_1 = \frac{\xi^2}{4}, \qquad \theta_1 = \pi + \gamma$$

Так как в выражение $M_k(r, \theta)$ входит параметр ξ, то он должен быть малым в сравнении с параметром R, по которому проводится асимптотическая оценка интеграла (3.1). Поэтому асимптотическая формула (3.2) будет справедлива для $0 \leqslant t \leqslant T$, где T есть величина порядка $g^{-1}R\sigma$. Для начального возвышения вида (2.1), сосредоточенного в окрестности начала и имеющего объем Q, выражение (3.2) принимает вид

$$\zeta = \frac{gt^2 Q}{4\sqrt{2\pi R^3}}\left(\cos\frac{gt^2}{4R} + \frac{\nu g t^3}{4R^3}\sin\frac{gt^2}{4R}\right) \tag{3.3}$$

Заметим, что предельное значение выражения (3.3) при $\nu \to 0$ совпадает с выражением вида волн, решения аналогичной задачи для идеальной жидкости [5].

Для получения асимптотической оценки выражения (3.1) при больших значениях t запишем (3.1) в виде

$$\zeta = \frac{\sigma^4}{2\pi g^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\sum_{k=1}^{2} f_k(r, \theta)\, e^{itN_k(r, \theta)}\, r\, dr\, d\theta$$

$$N_k(r, \theta) = \xi_1 r\cos(\theta - \gamma) - \sqrt{r}\,(-1)^k, \qquad \xi_1 = Rt^{-1}$$

и, аналогично предыдущему, получим, что формула (3.2) будет справедлива и для больших значений t при $0 \leqslant R \leqslant R_1$, где R_1 — величина порядка t.

§ 4. В предыдущих параграфах рассмотрена задача о волнах, вызываемых начальным возвышением свободной поверхности. В настоящем параграфе рассмотрим задачу о волнах, вызываемых произвольным импульсом давлений, приложенным к свободной поверхности.

Пусть к горизонтальной поверхности покоящейся вязкой жидкости, занимающей полупространство $z < 0$, в течение весьма малого промежутка времени τ прикладывается произвольное импульсное давление. Тогда проекции скоростей, вызываемых этим импульсом давления, определяются формулами

$$u_0 = -\rho^{-1}\Phi_x, \quad v_0 = -\rho^{-1}\Phi_y, \quad w_0 = -\rho^{-1}\Phi_z \left(\Phi = \int_0^{\tau} p\, d\tau\right) \tag{4.1}$$

Так как импульс давлений задан только на свободной поверхности, то и функция $\Phi(x, y, z)$ будет известна только при $z = 0$. Пусть $\Phi(x, y, 0) = F(x, y)$. Так как жидкость несжимаемая, то $\Delta\Phi = 0$, и поэтому функция

$$\Phi = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} K(m, n)\exp\left[i(mx + ny) + z\sqrt{m^2 + n^2}\right] dm\, dn$$

$$\left(K(m, n) = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} F(x, y)\exp\left[-i(mx + ny)\right] dx\, dy\right)$$

удовлетворяющая уравнению Лапласа и требуемому условию при $z = 0$, будет искомой. Таким образом, начальные скорости, вызванные импульсом давления $F(x, y)$, теперь известны во всей жидкости. Так как время τ бесконечно мало, а скорости конечны, то перемещением частиц за время τ пренебрегаем. Принимая момент прекращения действия импульса за начальный, приходим к следующей задаче: найти решение системы (1.1) с начальными условиями $u = u_0$, $v = v_0$, $w = w_0$, $\zeta = 0$ при $t = 0$, где u_0, v_0, w_0 даются формулами (4.1), и граничными условиями (1.3). Применяя к уравнениям (1.6) и граничным условиям (1.5) преобразование Лапласа по времени t и преобразование Фурье по переменным x и y, получим с учетом начальных условий систему для изображений

$$U_{zz} - (r^2 + \alpha\nu^{-1})U - im\nu^{-1}\Psi = -\alpha\nu^{-1}U_0$$

$$V_{zz} - (r^2 + \alpha\nu^{-1})V - in\nu^{-1}\Psi = -\alpha\nu^{-1}V_0 \tag{4.2}$$

$$W_{zz} - (r^2 + \alpha\nu^{-1})W - \nu^{-1}\Psi_z = -\alpha\nu^{-1}W_0, \qquad i(mU + nV) + W_z = 0$$

Здесь большими буквами обозначены изображения функций, записанных выше малыми буквами, при этом

$$U_0 = -imL, \quad V_0 = -inL, \quad W_0 = -rL, \quad L = \rho^{-1}K(m, n)e^{zz}$$

граничные условия (1.5) в изображениях принимают вид (при $z = 0$)

$$gZ = \Psi - 2\nu W_z, \quad \alpha Z = W, \quad U_z + imW = 0, \quad V_z + inW = 0 \tag{4.3}$$

Решая систему (4.2) с граничными условиями (4.3) и применяя затем формулу обращения, находим выражение для возвышения жидкости (4.4)

$$\zeta = -\frac{\sigma^5}{2\pi\rho g^3}[\eta_1 + \varepsilon^{3/2}\eta_2 + \varepsilon^2\eta_3], \qquad \eta_j = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} K(r, \theta)\varkappa_j(r, t, \varepsilon)\, e^{iRr\cos(\theta-\gamma)} r\, dr\, d\theta$$

$$\varkappa_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \varphi_j(\alpha, r)\, e^{\alpha t}\, d\alpha \quad (j = 1, 2, 3), \quad \varphi_1 = \frac{r}{\Delta}, \quad \varphi_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta\Delta_1}, \quad \varphi_3 = -\frac{2r^4}{\Delta_1}$$

Величины Δ, Δ_1, Δ_2, ε, k даются формулами (1.13). Выражение (4.4) представляет точное решение поставленной задачи для произвольной функции $F(x, y)$, относительно которой будем предполагать, что она допускает преобразование Фурье по переменным x, y. Для выражений η_2 и η_3 тем же методом, что и в § 1, можно показать, что η_2 и η_3 имеют конечный предел при $\varepsilon \to 0$ при тех же ограничениях для функции $F(x, y)$, что и для $\zeta_0(x, y)$. Поэтому для $\varepsilon \ll 1$ выражение (4.4) с ошибкой порядка $\varepsilon^{3/2}$ можно записать так:

$$\zeta = -\frac{\sigma^5}{2\pi\rho g^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r^{3/2}K(r, \theta)\sin\sqrt{r}t \exp[iRr\cos(\theta-\gamma) - 2\varepsilon r^2 t]\, dr\, d\theta \tag{4.5}$$

Итак, с точностью до ε в первой степени включительно вид волн, возникающих от рассматриваемого импульса давлений, дается формулой (4.5).

§ 5. Пусть функция $F(x, y)$ имеет вид

$$F(x, y) = \begin{cases} \Pi(1 - R^2a^{-2})^{\mu} & (R \leqslant a) \\ 0 & (R > a) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \mu > 0 \\ \Pi = \mathrm{const} \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

В этом случае $K(r, \theta) = \Pi a^2 k^{-2}\varphi(r)$, где $\varphi(r)$ дается формулой (2.2), и интегралы η_2 и η_3 будут абсолютно сходящимися для $\mu > 3.5$. Учитывая, что интеграл в формуле (4.5) представляет предел интеграла

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r^{3/2}K(r, \theta)\sin\sqrt{r}t \exp[iRr\cos(\theta-\gamma) - 2\varepsilon r^2 t + zr]\, dr\, d\theta$$

при $z \to -0$, запишем выражение для ζ в виде

$$\zeta = -\frac{\sigma^5\Pi a^2}{\rho g^3 k^2}\int_0^{\infty} \varphi(r) J_0(rR)\sin\sqrt{r}t \exp[iRr\cos(\theta-\gamma) - 2\varepsilon r^2 t + zr]\, r^{3/2}\, dr\, d\theta \tag{5.2}$$

Заметим, что полная величина импульса давлений q вычисляется по формуле $q = \pi a^2\Pi(\mu + 1)^{-1}$. Для упрощения дальнейших вычислений рассмотрим предельный случай $a \to 0$, $\Pi \to \infty$ так, что величина q остается неизменной. В этом предельном случае $\varphi(r)$ равно $[2(\mu + 1)]^{-1}$, и выражение (5.2) принимает вид

$$\zeta = -\frac{q\sigma^5}{2\pi\rho g^3}\lim_{z\to -0}\psi(\varepsilon), \qquad \psi(\varepsilon) = \int_0^{\infty} r^{3/2}J_0(rR)\sin\sqrt{r}t e^{-2\varepsilon r^2 t + zr}\, dr$$

Разлагая $\psi(\varepsilon)$ в ряд по степеням ε и ограничиваясь первыми тремя членами ряда имеем

$$\psi(\varepsilon) = \psi(0) + \varepsilon\psi'(0) + {}^1/_2\varepsilon^2\psi''(0) + R_3$$

$$\psi^k(0) = (-2t)^k\int_0^{\infty} r^{3/2+2k}J_0(rR)\sin\sqrt{r}t e^{zr}\, dr$$

Здесь R_3, на основании формулы остаточного члена ряда Тейлора,— величина порядка ε^3. Разлагая $\sin\sqrt{rt}$ в ряд и учитывая (2.5), находим такое выражение для возвышения ζ

$$\zeta = \frac{qt}{2\pi\rho R^3}\left[H_0 + \frac{\nu t}{R^2}H_1 + \frac{\nu^2 t^2}{R^4}H_2\right], \quad H_j = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \delta_{kj}\omega^{2k} \tag{5.3}$$

$$\omega = \frac{gt^2}{2R}, \quad \delta_{k0} = \frac{[(2k+1)!!]^2\, 2^{2k}}{(4k+1)!}, \quad \begin{matrix}\delta_{k1} = \delta_{k0}(2k+3)^2 \\ \delta_{k2} = \delta_{k1}(2k+5)^2\end{matrix} \qquad (j = 1, 2, 3)$$

Здесь t и R — первоначальные размерные переменные. Выражение при $\nu = 0$ совпадает с выражением для возвышения жидкости, полученным при решении аналогичной задачи для идеальной жидкости [3]. Полученные ряды будут сходящимися для любых значений ω, но для вычислений они удобны только для малых ω. Н. Е. Кочин [3] нашел выражение ряда H_0 через бесселевы функции, удобное для вычислений при любых ω. Это выражение имеет вид

$$H_0 = \frac{\pi\sqrt{2}}{32}\left[2J_{1/4}J_{-1/4} - 3\omega\left(J_{3/4}J_{1/4} - J_{-3/4}J_{-1/4}\right) - \omega^2\left(J_{1/4}J_{-1/4} + J_{3/4}J_{-3/4}\right)\right]$$

у всех функций один и тот же аргумент $^1/_4\omega$. Найдем теперь выражение ряда H_1 через бесселевы функции. Этот ряд можно представить интегралом вида

$$H_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} F\left(\tfrac{1}{2}\omega\cos^2\varphi\right)\cos\varphi\, d\varphi \tag{5.4}$$

$$F(x) = 2\left[(9 - 17x^2 + x^4)J_0(x) + (-12x + 6x^3)J_1(x)\right]$$

Используя формулу (2.9), найдем такое выражение для интеграла (5.4) через бесселевы функции:

$$\begin{aligned} H_1 = {}^1/_2\sqrt{2}\pi\,[&{}^1/_{64}\omega^4\left(J_{3/4}J_{-3/4} + {}^1/_4 J_{1/4}J_{-1/4}\right) + {}^{21}/_{64}\omega^3\left(J_{1/4}J_{3/4} - J_{-1/4}J_{-3/4}\right) - \\ &- {}^1/_{64}\omega^2\left(335J_{1/4}J_{-1/4} + 741J_{3/4}J_{-3/4}\right) + {}^{41}/_{64}\omega\left(J_{3/4}J_{1/4} - J_{-3/4}J_{-1/4}\right) - \\ &- {}^3/_2\omega\left(J_0J_1 - J_{-1/2}^2\right) + {}^{329}/_{32}J_{-1/4}J_{1/4} - 6J_{1/2}J_{-1/2}] \end{aligned}$$

Аналогичным образом можем получить выражение ряда H_2 через бесселевы функции, представив его в виде интеграла

$$H_2 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} F_1\left(\tfrac{1}{2}\omega\cos^2\varphi\right)\cos\varphi\, d\varphi \tag{5.5}$$

$$F_1(x) = 2\left[(-x^6 + 96x^4 - 568x^2 + 225)J_0(x) + (-15x^5 + 223x^3 + 195x)J_1(x)\right]$$

и проводя интегрирование выражения (5.5), аналогичного выражению (5.4).

§ 6. Проведем асимптотический анализ выражения (4.5) для больших значений R Запишем это выражение в виде

$$\zeta = \frac{\sigma^5}{4\pi i\rho g^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\sum_{k=1}^{2} f_k(r, \theta)\exp\left[iRM_k(r, \theta)\right]dr\, d\theta \tag{6.1}$$

$$f_k(r, \theta) = r^{3/2}K(r, \theta)\exp(-2\varepsilon r^2 t)(-1)^k$$

Здесь $M_k(r, \theta)$ дается формулой (3.1). Для больших значений R получаем такое асимптотическое выражение для возвышения жидкости от произвольного начального импульса:

$$\zeta = -\frac{\sqrt{2}\sigma^3}{\rho g^2 R}\,\mathrm{Im}\left\{f(r_1, \theta_1)\exp\left(i\frac{gt^2}{4R}\right)\right\}\exp\left(-\frac{\nu g^2 t^5}{8R^4}\right) \tag{6.2}$$

$$f(r, \theta) = r^{3/2}K(r, \theta), \quad r_1 = {}^1/_4\xi^2, \quad \theta_1 = \pi + \gamma.$$

Формула (6.2) будет справедлива для $0 \leqslant t \leqslant T$, где T — величина порядка $g^{-1}R\sigma$; в формуле (6.2) величины R и t размерные. Для начального импульса вида (5.1), сосредоточенного в окрестности начала координат, полная величина которого равна q, выражение (6.2) принимает вид

$$\zeta = -\frac{qgt^3}{8\sqrt{2}\pi\rho R^4}\sin\frac{gt^2}{4R}\exp\left(-\frac{\nu g^2t^5}{8R^4}\right) \tag{6.3}$$

Аналогично тому, как это было показано в § 3, получаем, что выражение (6.2) будет справедливо при больших значениях t для $0 \leqslant R \leqslant R_1$, где R_1 — величина порядка t.

Полученные формулы (6.2) и (6.3) дают возможность элементарными средствами построить картину движения свободной поверхности на некотором удалении от области приложения импульса давлений в указанном интервале времени и аналогичную картину для больших значений времени t в указанной области изменения R.

Поступила 10 II 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. О волнах на поверхности вязкой жидкости. Тр. ЦАГИ, 1941, № 541.
2. Никитин А. К., Подрезов С. А. К пространственной задаче о волнах на поверхности вязкой жидкости бесконечной глубины. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
3. Кочин Н. Е. Собр. соч., т. 2. Изд-во АН СССР, 1949.
4. Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н. Курс современного анализа, ч. I. Физматгиз, 1963.
5. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. ОНТИ, 1936.
6. Федорюк М. В. Метод стационарных фаз для многомерных интегралов. Ж. вычисл. матем. физ., 1962, т. 2, № 1.

ПО ПОВОДУ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК В ТЕОРИИ ТОНКИХ ПЛАСТИН

И. И. Ворович, Р. Л. Салганик

(Ростов-на-Дону, Москва)

Рассмотрев: 1) работу [1], в которой для ошибки в смещениях вдали от краев тонкой пластинки получена оценка, пропорциональная логарифму относительной толщины, и приведены соображения о неулучшаемости этой оценки и 2) критику [2] работы [1], авторы настоящей заметки пришли к следующим заключениям.

1. Сама оценка, содержащая логарифмический множитель, верна.

2. Ее неулучшаемость приведенным в работе [1] примером не доказана. В этом примере эквивалентные объемные силы, действием которых заменяется задание смещений на границе, положены пропорциональными соответствующим компонентам тензора Грина в окружающей границу узкой области, где эти силы отличны от нуля. Это можно осуществить, но тогда нужный (логарифмический) рост ошибки получится за счет логарифмического возрастания граничных функций, происходящего при увеличении размеров пластинки.

Таким образом, результаты работы [1] не могут служить основанием для опровержения показательно степенных оценок, получающихся при построении решений в виде асимптотических рядов по степеням малой относительной толщины.

Поступила 2 III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Салганик Р. Л. Об оценке ошибки, совершаемой при переходе от точных уравнений теории упругости к уравнениям плоского напряженного состояния. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
2. Ворович И. И. Некоторые замечания к работе Р. Л. Салганика «Об оценке ошибки, совершаемой при переходе от точных уравнений теории упругости к уравнениям плоского напряженного состояния» ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.