ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА, ОСЛАБЛЕННОГО ПЛОСКОЙ КРУГЛОЙ ЩЕЛЬЮ

Ю. Н. Кузьмин, Я. С. Уфлянд
(Ленинград)

Исследуется упругое равновесие полупространства, содержащего круглую щель, расположенную в плоскости, параллельной границе (фигура). В случае осесимметричного загружения задача поначалу сведена к системе парных интегральных уравнений, а затем — к системе регулярных уравнений Фредгольма. Получены некоторые численные результаты, относящиеся к концентрации напряжений при осевом растяжении.

§ 1. Постановка задачи и сведение ее к системе парных интегральных уравнений.

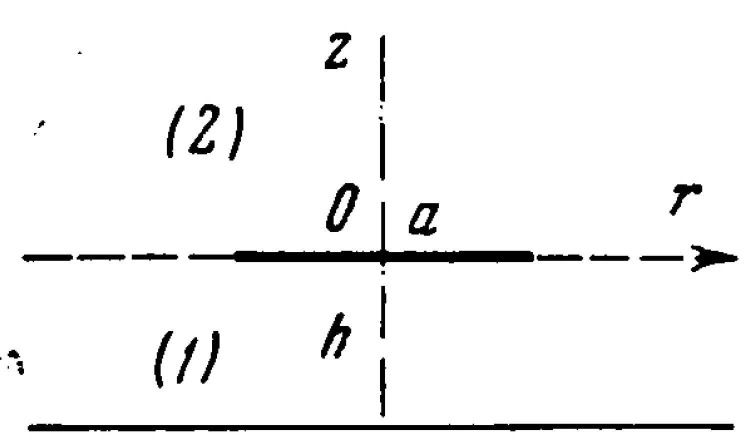
Представим упругие смещения в осесимметричном случае через две гармонические функции Φ и F Папковича — Нейбера по следующим формулам (см., например [1]):

$$2Gu_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} - z\frac{\partial F}{\partial r}, \qquad 2Gu_z = (3-4\nu)F - \Phi - z\frac{\partial F}{\partial z}, \qquad \Phi = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{1.1}$$

Чтобы сформулировать граничные условия поставленной задачи, выразим через введенные функции нормальное σ_z и касательное τ_{rz} напряжения

$$\sigma_z = 2(1-\nu)\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial\Phi}{\partial z} - z\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \qquad \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r}\left[(1-2\nu)F - \Phi - z\frac{\partial F}{\partial z}\right] \tag{1.2}$$

разобьем область тела на две: 1) слой $-h < z < 0$ и 2) полупространство $0 < z < \infty$ и снабдим функции F и Φ в этих областях индексами 1 и 2. Если считать заданными напряжения на поверхности щели и на границе тела, то краевые условия можно записать в виде



$$\begin{aligned} &\sigma_z|_{z=-h} = \sigma_0(r), && \tau_{rz}|_{z=-h} = \tau_0(r) \\ &\sigma_z|_{z=-0} = \sigma_1(r), && \sigma_z|_{z=+0} = \sigma_2(r) \quad (r<a) \\ &\tau_{rz}|_{z=-0} = \tau_1(r), && \tau_{rz}|_{z=+0} = \tau_2(r) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Кроме того, при переходе через плоскость $z=0$ при $r>a$ должны оставаться непрерывными значения перемещений и напряжений. Тогда указанные условия выражаются через функции F_1, Φ_1, F_2, Φ_2 следующим образом:

$$\left[2(1-\nu)\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} + h\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}\right]_{z=-h} = \sigma_0(r) \tag{1.4}$$

$$\left[(1-2\nu)F_1 - \Phi_1 + h\frac{\partial F_1}{\partial z}\right]_{z=-h} = S_0(r) = \int_\infty^r \tau_0(r)\,dr \tag{1.5}$$

$$\left[2(1-\nu)\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right]_{z=0} - \left[2(1-\nu)\frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right]_{z=0} = \begin{cases} 0 & (r>a) \\ \sigma(r) = \sigma_1(r) - \sigma_2(r) & (r<a) \end{cases} \tag{1.6}$$

$$[(1-2\nu)F_1 - \Phi_1]_{z=0} - [(1-2\nu)F_2 - \Phi_2]_{z=0} = \begin{cases} 0 & (r>a) \\ S(r) & (r<a) \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\left[2(1-\nu)\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right]_{z=-0} = \sigma_1(r), \qquad [(1-2\nu)F_1 - \Phi_1]_{z=-0} = S_1(r) + ch \quad (r<a)$$

$$S(r) = \int_a^r [\tau_1(r) - \tau_2(r)]\,dr, \qquad S_1(r) = \int_0^r \tau_1(r)\,dr \tag{1.8}$$

$$F_1|_{z=0} = F_2|_{z=0}, \qquad \left.\frac{\partial F_1}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial F_2}{\partial z}\right|_{z=0} \quad (r>a) \tag{1.9}$$

$$\int_0^a \left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right|_{z=0} r\,dr = \int_0^a \left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right|_{z=0} r\,dr \tag{1.10}$$

причем соотношения (1.9) — (1.10) обеспечивают непрерывность перемещений на плоскости $z = 0$ при $r > a$ (см. [2], стр. 41), а формула (1.10) позволяет, кроме того, определить постоянную c.

Таким образом, поставленная задача сводится к определению четырех функций F_1, Φ_1, F_2, Φ_2, гармонических в областях $-h < z < 0$ и $0 < z < \infty$ соответственно и удовлетворяющих условиям (1.4) — (1.10), а также требованиям на бесконечности, обеспечивающим должное поведение смещений и напряжений.

Неизвестные функции ищем в виде следующих интегральных разложений:

$$F_1 = \int_0^\infty [A \operatorname{ch} \lambda (h+z) + B \operatorname{sh} \lambda (h+z)] J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\operatorname{sh} \lambda h}, \qquad F_2 = \int_0^\infty E e^{-\lambda z} J_0(\lambda r)\, d\lambda$$

$$\Phi_1 = \int_0^\infty [C \operatorname{ch} \lambda (h+z) + D \operatorname{sh} \lambda (h+z)] J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\operatorname{sh} \lambda h}, \qquad \Phi_2 = \int_0^\infty F e^{-\lambda z} J_0(\lambda r)\, d\lambda \tag{1.11}$$

Условия (1.4) — (1.5) позволяют получить две связи

$$D = 2(1-\nu) B + \mu A - \sigma_0^\circ, \quad C = (1-2\nu) A + \mu B - \mu S_0^\circ \tag{1.12}$$

Здесь

$$\sigma_0 = \int_0^\infty \sigma_0(r) J_0(\lambda r)\, r dr, \qquad S_0 = \frac{1}{h} \int_0^\infty S_0(r) J_0(\lambda r)\, r dr, \qquad \mu = \lambda h \tag{1.13}$$

Аналогичным образом из (1.6) — (1.7) находим

$$2(1-\nu)(A + B \operatorname{cth} \mu) - (C + D \operatorname{cth} \mu) - F + 2(1-\nu) E = \sigma^\circ$$

$$(1-2\nu)(A \operatorname{cth} \mu + B) - (C \operatorname{cth} \mu + D) + F - (1-2\nu) E = \mu S^\circ$$

$$\sigma^\circ = \int_0^\infty \sigma(r) J_0(\lambda r)\, r dr, \qquad S^\circ = \frac{1}{h} \int_0^a S(r) J_0(\lambda r)\, r dr \tag{1.14}$$

Зависимости (1.12) и (1.14) дают возможность выразить все искомые величины через две функции параметра λ, в качестве которых удобно выбрать следующие:

$$M = A + B \operatorname{cth} \mu + E, \qquad N = A \operatorname{cth} \mu + B - E \tag{1.15}$$

Тогда оставшиеся условия (1.8) — (1.9) после некоторых преобразований приводят к следующей системе парных интегральных уравнений:

$$\int_0^\infty M J_0(\lambda r)\, \lambda d\lambda = 0, \qquad \int_0^\infty N J_0(\lambda r)\, d\lambda = 0 \qquad (r > a) \tag{1.16}$$

$$\int_0^\infty \left[\frac{N}{2} - \left(\frac{1}{2} + \mu + \mu^2\right) e^{-2\mu} N - \mu^2 e^{-2\mu} M\right] J_0(\lambda r)\, \lambda d\lambda = f_1(r) \qquad (r < a) \tag{1.17}$$

$$\int_0^\infty \left[-\frac{M}{2} + \left(\frac{1}{2} - \mu + \mu^2\right) e^{-2\mu} M + \mu^2 e^{-2\mu} N\right] J_0(\lambda r)\, d\lambda = f_2(r) \qquad (r < a)$$

Здесь (1.18)

$$f_1 = \sigma_1 - \int_0^\infty \left\{(\bar\sigma + \mu \bar S) \frac{1 + \mu - \mu \operatorname{cth} \mu}{1 + \operatorname{cth} \mu} + (\operatorname{cth} \mu - 1) [(1+\mu) \bar\sigma_0 + \mu^2 \bar S_0]\right\} \lambda J_0(\lambda r)\, d\lambda$$

$$f_2 = S_1 + \operatorname{ch} - \int_0^\infty \left\{(\bar\sigma + \mu \bar S) \frac{1 - \mu + \mu \operatorname{cth} \mu}{1 + \operatorname{cth} \mu} + \mu (\operatorname{cth} \mu - 1) [(1-\mu) \bar S_0 + \bar\sigma_0]\right\} J_0(\lambda r)\, d\lambda$$

Заметим еще, что соотношение (1.10) может быть теперь представлено в форме

$$\int_0^\infty M(\lambda) J_1(\lambda a)\, d\lambda = 0 \tag{1.19}$$

§ 2. Сведение парных уравнений к интегральным уравнениям Фредгольма. Если ввести новые неизвестные функции φ и ψ соотношениями

$$M(\lambda) = h\int_0^a \psi(t)\cos\lambda t dt, \qquad N(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\int_0^a \varphi(t)(\cos\lambda t - \cos\lambda a)\, dt \tag{2.1}$$

то при помощи формулы [3]

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r)\sin\lambda t d\lambda = 0 \qquad (0 \leqslant t < r) \tag{2.2}$$

можно установить, что уравнения (1.16) удовлетворяются тождественно.

Далее, подставляя (2.1) в (1.17), получаем при $r < a$ следующие уравнения:

$$\frac{1}{2}\int_0^a \varphi(t)\, dt \int_0^\infty J_0(\lambda r)(\cos\lambda t - \cos\lambda a)\, d\lambda - \int_0^a \varphi(t)\, dt \int_0^\infty h_1(\lambda)(\cos\lambda t -$$

$$- \cos\lambda a) J_0(\lambda r)\, d\lambda - \int_0^a \psi(t)\, dt \int_0^\infty g_1(\lambda)\cos\lambda t J_0(\lambda r)\, d\lambda = f_1(r) \tag{2.3}$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^a \psi(t)\, dt \int_0^\infty J_0(\lambda r)\cos\lambda t d\lambda + \int_0^a \psi(t)\, dt \int_0^\infty g_2(\lambda)\cos\lambda t J_0(\lambda r)\, d\lambda +$$

$$+ \int_0^a \varphi(t)\, dt \int_0^\infty h_2(\lambda)(\cos\lambda t - \cos\lambda a) J_0(\lambda r)\, d\lambda = f_2(r) \tag{2.4}$$

Здесь

$$h_1 = (1/2 + \mu + \mu^2)\, e^{-2\mu}, \qquad g_1 = \mu^3 e^{-2\mu}, \qquad h_2 = \mu e^{-2\mu}, \qquad g_2 = (1/2 - \mu + \mu^2) e^{-2\mu} \tag{2.5}$$

При помощи формулы [3]

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r)\cos\lambda t d\lambda = \begin{cases} 0 & (r < t) \\ (r^2 - t^2)^{-1/2} & (r > t) \end{cases} \tag{2.6}$$

$$J_0(\lambda r) = \frac{2}{\pi}\int_0^{1/2\pi} \cos(\lambda r \sin\theta)\, d\theta \tag{2.7}$$

соотношения (2.3) — (2.4) можно привести к интегральным уравнениям Шлемильха

$$\int_0^{1/2\pi} \Big\{\varphi(r\sin\theta) - \frac{2}{\pi}\int_0^a \varphi(t)\,[H_1(t + r\sin\theta) + H_1(t - r\sin\theta) - H_1(a + r\sin\theta) -$$

$$- H_1(a - r\sin\theta)]\, dt - \frac{2}{\pi}\int_0^a \psi(t)\,[G_1(t + r\sin\theta) + G_1(t - r\sin\theta)]\, dt\Big\}\, d\theta = 2f_1(r) \tag{2.8}$$

$$\int_0^{1/2\pi} \Big\{\psi(r\sin\theta) - \frac{2}{\pi}\int_0^a \psi(t)\,[G_2(t + r\sin\theta) + G_2(t - r\sin\theta)]\, dt - \frac{2}{\pi}\int_0^a \varphi(t)\,[H_2(t +$$

$$+ r\sin\theta) + H_2(t - r\sin\theta) - H_2(a + r\sin\theta) - H_2(a - r\sin\theta)]\, dt\Big\}\, d\theta = -2f_2(r) \tag{2.9}$$

где

$$H_{1,2}(x) = \int_0^\infty h_{1,2}(\lambda)\cos\lambda x d\lambda, \qquad G_{1,2}(x) = \int_0^\infty g_{1,2}(\lambda)\cos\lambda x d\lambda \tag{2.10}$$

После вычислений получаем

$$H_1 = 4h^3 \frac{12h^2 - x^2}{(4h^2 + x^2)^3}, \quad G_1 = Gh^3 \frac{16h^4 - 24x^2h^2 + x^4}{(4h^2 + x^2)^4} \tag{2.11}$$

$$H_2 = h \frac{4h^2 - x^2}{(4h^2 + x^2)^3}, \quad G_2 = 2h \frac{8h^4 - 2h^2x^2 + x^4}{(4h^2 + x^2)^3}$$

Решая уравнения (2.8) — (2.9), приходим к системе интегральных уравнений Фредгольма

$$\varphi(x) - \frac{2}{\pi}\int_0^a \varphi(t) K_1(x, t)\, dt - \frac{2}{\pi}\int_0^a \psi(t) L_1(x, t)\, dt =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[f_1(0) + x \int_0^{1/2\pi} f_1'(x \sin\theta)\, d\theta\right] \qquad (0 < x < a) \tag{2.12}$$

$$\psi(x) - \frac{2}{\pi}\int_0^a \psi(t) L_2(x, t)\, dt - \frac{2}{\pi}\int_0^a \varphi(t) K_2(x, t)\, dt =$$

$$= -\frac{4}{\pi}\left[f_2(0) + x \int_0^{1/2\pi} f_2'(x \sin\theta)\, d\theta\right] \qquad (0 < x < a) \tag{2.13}$$

ядра которых даются формулами

$$\begin{aligned} K_1(x, t) &= H_1(t + x) + H_1(t - x) - H_1(a + x) - H_1(a - x) \\ L_1(x, t) &= G_1(t + x) + G_1(t - x) \\ K_2(x, t) &= H_2(t + x) + H_2(t - x) - H_2(a + x) - H_2(a - x) \\ L_2(x, t) &= G_2(t + x) + G_2(t - x) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Что касается условия (1.19), то оно может быть приведено к виду

$$\int_4^a \psi(t)\, dt = 0 \tag{2.15}$$

Таким образом, решение поставленной задачи дается формулами (1.11), (1.12), (1.14), (1.15), (2.1) (2.12), (2.13).

§ 3. Некоторые численные результаты. Обратимся теперь к частному случаю, когда край полупространства свободен от усилий, а к берегам щели приложена равномерная нормальная нагрузка интенсивности q. При этом $\sigma_0 = \tau_0 = \tau_1 = \tau_2 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = -q$, откуда

$$f_1(r) = -q, \qquad f_2(r) = c \tag{3.1}$$

Введя безразмерные величины

$$x / a = \xi, \qquad t / a = \tau \tag{3.2}$$

$$\varphi(x) = -\frac{4}{\pi}[q\chi_1(\xi) + c\chi_2(\xi)], \qquad \psi(x) = -\frac{4}{\pi}[q\omega_1(\xi) + c\omega_2(\xi)]$$

сводим задачу к решению двух систем интегральных уравнений Фредгольма

$$\chi_1(\xi) = 1 + \int_0^1 M_1(\xi, \tau)\chi_1(\tau)\, d\tau + \int_0^1 N_1(\xi, \tau)\omega_1(\tau)\, d\tau$$

$$\omega_1(\xi) = \int_0^1 N_2(\xi, \tau)\omega_1(\tau)\, d\tau + \int_0^1 M_2(\xi, \tau)\chi_1(\tau)\, d\tau \tag{3.3}$$

$$\chi_2(\xi) = \int_0^1 M_1(\xi, \tau)\chi_2(\tau)\, d\tau + \int_0^1 N_1(\xi, \tau)\omega_2(\tau)\, d\tau$$

$$\omega_2(\xi) = 1 + \int_0^1 N_2(\xi, \tau)\omega_2(\tau)\, d\tau + \int_0^1 M_2(\xi, \tau)\chi_2(\tau)\, d\tau \tag{3.4}$$

В соотношениях (3.3) и (3.4) введены обозначения

$$M_1 = \frac{8\beta^3}{\pi}[S_1(\tau+\xi)+S_1(\tau-\xi)-S_1(1+\xi)-S_1(1-\xi)],$$

$$N_1 = \frac{12\beta^3}{\pi}[R_1(\tau+\xi)+R_1(\tau-\xi)] \tag{3.5}$$

$$M_2 = \frac{2\beta}{\pi}[S_2(\tau+\xi)+S_2(\tau-\xi)-S_2(1+\xi)-S_2(1-\xi)],$$

$$N_2 = \frac{4\beta}{\pi}[R_2(\tau+\xi)+R_2(\tau-\xi)]$$

$$S_1(u) = \frac{12\beta^2-u^2}{(4\beta^2+u^2)^3}, \qquad R_1(u) = \frac{16\beta^4-24\beta^2u^2+u^4}{(4\beta^2+u^2)^4} \tag{3.6}$$

$$S_2(u) = \frac{4\beta^2-u^2}{(4\beta^2+u^2)^2}, \qquad R_2(u) = \frac{8\beta^4-2\beta^2u^2+u^4}{(4\beta^2+u^2)^3}$$

и положено

$$\beta = h/a \tag{3.7}$$

Формула (2.15) дает следующие выражения для величины c:

$$c = -q\left(\int_0^1 \omega_1(\tau)\,d\tau\right)\left(\int_0^1 \omega_2(\tau)\,d\tau\right)^{-1} \tag{3.8}$$

Путем замены систем (3.3), (3.4) алгебраическими по формуле трапеций было получено приближенное решение, причем промежуток интегрирования разбивался на 10 частей. Результаты расчета для двух значений параметра β приведены в таблице.

	$\beta = 1/2$				$\beta = 1$			
ξ	χ_1	ω_1	χ_2	ω_2	χ_1	ω_1	χ_2	ω_2
0	4.49	1.54	0.682	1.81	1.50	0.187	0.462	1.40
0.1	4.37	1.49	0.663	1.80	1.49	0.184	0.457	1.40
0.2	4.07	1.38	0.612	1.77	1.46	0.176	0.440	1.40
0.3	3.61	1.20	0.541	1.73	1.42	0.164	0.412	1.39
0.4	2.95	0.968	0.440	1.70	1.37	0.148	0.375	1.37
0.5	2.21	0.695	0.338	1.65	1.30	0.129	0.329	1.37
0.6	1.46	0.415	0.212	1.60	1.23	0.108	0.277	1.34
0.7	0.729	0.133	0.125	1.54	1.16	0.0851	0.220	1.32
0.8	0.0420	—0.111	—0.024	1.47	1.08	0.0623	0.160	1.30
0.9	—0.463	—0.323	—0.139	1.42	1.01	0.0403	0.0997	1.27
1	—0.800	—0.446	—0.262	1.36	0.954	0.0199	0.0199	1.25

Существенно отметить, что некоторые характеристики напряженно-деформированного состояния могут быть выражены непосредственно через функции $\chi_{1,2}$ и $\omega_{1,2}$. В частности, асимптотическое выражение нормальных напряжений в плоскости $z = 0$ при $r \to +a$ будет

$$\sigma_0 = -\frac{1}{2\sqrt{r^2-a^2}}\int_0^a \varphi(t)\,dt + O(1) \tag{3.9}$$

Отнеся эту величину к ее значению σ_0^∞ в предельном случае $h \to \infty$, соответствующем щели в неограниченном теле [4], находим

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_0^\infty} = \gamma + O\left(\frac{r^2}{a^2}-1\right)^{1/2} \tag{3.10}$$

$$\gamma = \int_0^1 \chi_1(\xi)\,d\xi - \left(\int_0^1 \omega_1(\xi)\,d\xi\right)\left(\int_0^1 \omega_2(\xi)\,d\xi\right)^{-1}\left(\int_0^1 \chi_2(\xi)\,d\xi\right) \tag{3.11}$$

Значения коэффициента γ, характеризующего степень увеличения концентрации напряжений, связанного с наличием свободного края полупространства, оказываются следующими:

$$\gamma = 2.19 \quad \text{при} \quad \beta = {}^1/_2, \qquad \gamma = 1.27 \quad \text{при} \quad \beta = 1$$

Для получения приближенного решения рассматриваемой задачи при больших значениях h / a может быть применен метод разложения в ряды по степеням малого параметра $\alpha = a / h$.

Произведя соответствующие выкладки, можно получить следующие выражения для основных неизвестных функций:

$$\varphi(x) = -\frac{4q}{\pi}\left[1 + \frac{5}{3\pi}\alpha^3 - \frac{21}{20\pi}(1 + 5\xi^2)\alpha^5 + O(\alpha^7)\right]$$

$$\psi(x) = -\frac{16q}{3\pi}\left[\frac{5}{16\pi}(1 - 3\xi^2)\alpha^5 + O(\alpha^7)\right] \tag{3.12}$$

Коэффициент γ может быть вычислен по формуле

$$\gamma = 1 + \frac{5}{3\pi}\alpha^3 - \frac{14}{5\pi}\alpha^5 + O(\alpha^7) \tag{3.13}$$

которая при $\alpha = {}^1/_2$ и $\alpha = {}^1/_3$ дает соответственно $\gamma = 1.04$ и $\gamma = 1.02$, так что при $h / a \approx 2 - 3$ наличие свободного края практически не сказывается на факторе концентрации напряжений.

Метод разложения по малому параметру может быть использован и в задаче о деформации неограниченного тела, ослабленного двумя плоскими круглыми щелями (см. работу [2]). При этом для коэффициента γ получается формула

$$\gamma = 1 - \frac{2}{3\pi}\alpha^3 + \frac{4}{5\pi}\alpha^5 + O(\alpha^7) \tag{3.14}$$

наглядно показывающая, что в этом случае имеет место уменьшение концентрации напряжений по сравнению со случаем одиночной щели.

Укажем в заключение, что развитый в данной работе метод может быть применен также и к тому случаю, когда граница полупространства жестко заделана. При этом, вместо первых двух условий (1.3) следует положить

$$u_z|_{z=-h} = u_r|_{z=-h} = 0 \tag{3.15}$$

Наличие последнего условия приводит к тому, что вместо функции Φ приходится искать функцию φ (см. (1.1)) — это несколько осложняет выкладки, однако задача по-прежнему может быть сведена к системе регулярных уравнений Фредгольма. Следует заметить, что, в отличие от случая свободного края или двух щелей, при закрепленном крае как ядра уравнений Фредгольма, так и другие характеристики (например коэффициент γ — см. (3.10)) оказываются зависящими от коэффициента Пуассона ν. Приведем здесь только формулу для γ в виде разложения по степеням α

$$\gamma = 1 - \frac{\varkappa^2 + 19}{12\pi\varkappa}\alpha^3 + \frac{\varkappa^2 + 41}{15\pi\varkappa}\alpha^5 + O(\alpha^7) \qquad (\varkappa = 3 - 4\nu) \tag{3.16}$$

При $\nu = {}^1/_3$, $\alpha = {}^1/_2$ находим $\gamma = 0,97$.

Поступила 12 IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд-во АН СССР, 1963.
2. Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С. Пространственная задача теории упругости для неограниченного тела, ослабленного двумя плоскими круглыми щелями. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1960, т. 210, стр. 39.
3. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Изд. иностр. лит., 1949.
4. Снеддон И. Преобразования Фурье. Изд. иностр. лит., 1955.
5. Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С. Осесимметричная контактная задача для упругого слоя. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3, стр. 320.