

О РЕЖИМЕ РЕГУЛЯРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН

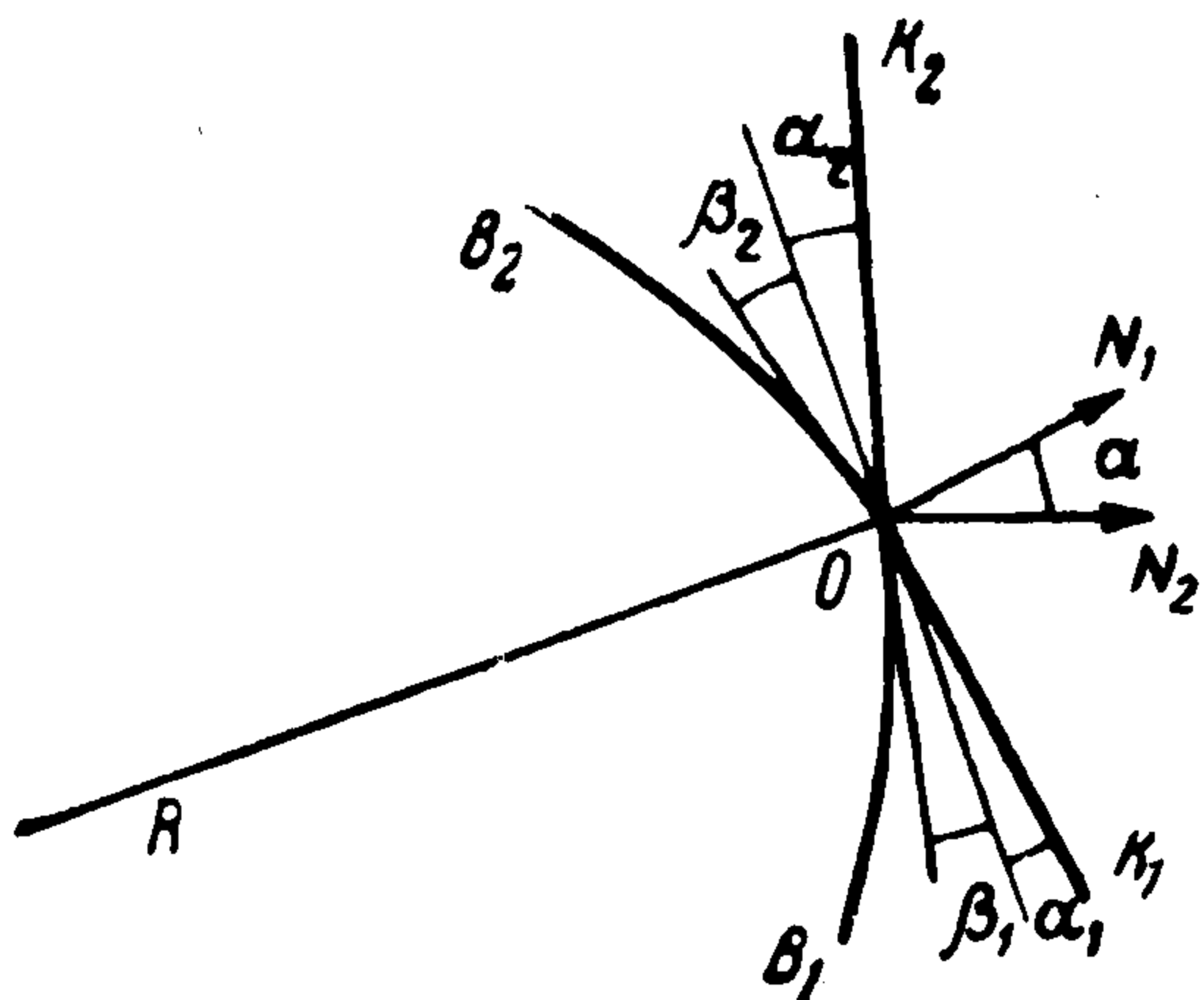
Г. П. Шиндяпин (Саратов)

Проблемы взаимодействия слабых ударных волн возникают во многих физических явлениях, а также, например, при рассмотрении взаимодействия ударных волн, вызванных взрывом двух зарядов или двумя быстро летящими снарядами.

Задачи такого типа очень тесно связаны с задачами отражения слабых ударных волн. Эти исследования, как правило, опираются на использование теории коротких волн, развитой в работах А. А. Гриба, О. С. Рыжова и С. А. Христиановича [1,2].

В настоящей работе, используя основные предпосылки теории коротких волн, рассматривается режим регулярного взаимодействия ударных волн, определяются основные параметры потока в точке взаимодействия, находится критическое соотношение для исходных значений (интенсивностей и угла взаимодействия ударных волн), характеризующее режим регулярного взаимодействия. Для величины избыточного давления в точке взаимодействия строится поверхность зависимости от исходных значений. В случае симметричного взаимодействия результаты исследования совпадают с данными регулярного отражения слабых ударных волн от жесткой стенки [3].

1. Исследуем случай регулярного взаимодействия слабых ударных волн. Пусть две плоские ударные волны OK_1 , OK_2 с избыточными давлениями p_1 , p_2 распространяются в покоящейся среде и пересекаются под малым углом α . При этом точка пересечения ударных волн описывает со временем траекторию RO . Поместим начало отсчета цилиндрической системы координат r , ϑ в



Фиг. 1

точку R , точку начального взаимодействия ударных волн, ось $\vartheta = 0$ направим по касательной к траектории. Для достаточно большого момента времени t картина проникновения (фиг. 1) будет состоять из падающих фронтов OK_1 , OK_2 с постоянными избыточными давлениями p_1 , p_2 и отраженных фронтов OB_1 , OB_2 , где избыточные давления падают от некоторого значения p_0 в точке O до p_1 , p_2 в точках B_1 , B_2 соответственно.

В случае $p_1 = p_2$ это дает картину симметричного проникновения, которая аналогична регулярному отражению ударных волн

от жесткой стенки. По аналогии назовем углы α_1 , α_2 (между нормалью к траектории движения в точке O и фронтами ударных волн) углами падения, а β_1 , β_2 (между той же нормалью и касательными к отраженным фронтам) — углами отражения.

При постоянной по времени интенсивности ударных волн p_1 , p_2 траектория движения точки взаимодействия будет прямолинейной, а вся картина проникновения автомодельной. Поэтому для исследования течения в окрестности точки O удобно перейти к принятым в теории коротких волн [1,2] безразмерным функциям скорости μ , ν и координатам δ , Y , τ , связанным со скоростями и координатами цилиндрической системы соотношениями

$$\mu = \frac{M}{M_0} = \frac{1}{M_0} \frac{u}{a_0}, \quad \nu = \frac{1}{M_0 \sqrt{1/2(n+1)M_0}} \frac{v}{a_0} \quad (1.1)$$

$$\delta = \frac{1}{1/2(n+1)M_0} \left(\frac{r}{a_0 t} - 1 \right), \quad Y = \frac{\vartheta}{\sqrt{1/2(n+1)M_0}}, \quad \tau = \ln t, \quad M = \frac{p}{nP_0}$$

Здесь P_0 , a_0 — давление и скорость звука в покоящейся среде, n — отношение теплоемкостей (для воздуха $P_0 = 1$ атм, $n = 1.4$), M_0 — некоторое характерное значение числа M . В рассматриваемом случае M_0 равно значению M в точке взаимодействия O .

На ударных фронтах будут выполняться условия для нормальной составляющей скорости $M = p / nP_0$, и условия сохранения касательной составляющей скорости

при переходе через фронт типа [3]

$$u\psi - v = u'(\psi + \vartheta + \alpha') \quad (1.2)$$

Здесь α' — угол между направлением скорости потока q' перед фронтом волны и осью $\vartheta = 0$, ψ — угол между нормалью к ударному фронту и направлением радиус-вектора. Значение угла ψ определяется из уравнения распространения фронта ударной волны $\partial r / \partial t = N(1 + \frac{1}{2}\psi^2)$ (N — скорость фронта) соотношением

$$\psi = \sqrt{\frac{1}{2}(n+1)M_0} \sqrt{2\delta - (\mu + \mu')} \quad (1.3)$$

2. Граничные условия (1.2) на ударных фронтах OB_1 , OB_2 примут вид

$$u\psi_1 + v = u_1(\psi_1 + \alpha_1 - \vartheta), \quad u\psi_2 - v = u_2(\psi_2 + \alpha_2 + \vartheta) \quad (2.1)$$

В обозначениях (1.1) соотношения (1.3), (2.1) на ударных фронтах OK_1 , OK_2 дают

$$\alpha_1 - \vartheta = \sqrt{\frac{1}{2}(n+1)M_0} \sqrt{2\delta - \mu_1}, \quad \alpha_2 + \vartheta = \sqrt{\frac{1}{2}(n+1)M_0} \sqrt{2\delta - \mu_2} \quad (2.2)$$

а на фронтах OB_1 , OB_2 условия

$$(\mu - \mu_1)\psi_1 + v \sqrt{\frac{1}{2}(n+1)M_0} = \mu_1(\alpha_1 - \vartheta), \quad \psi_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(n+1)M_0} \sqrt{2\delta - (\mu + \mu_1)} \quad (2.3)$$

$$(\mu - \mu_2)\psi_2 - v \sqrt{\frac{1}{2}(n+1)M_0} = \mu_2(\alpha_2 + \vartheta), \quad \psi_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(n+1)M_0} \sqrt{2\delta - (\mu + \mu_2)} \quad (2.4)$$

3. Исследуем течение в окрестности точки O . Так как M_0 — значение M в точке O , то $\mu_0 = 1$. Условия на ударных фронтах (2.2), (2.3), (2.4) в точке O принимают вид

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(n+1)M_0} \sqrt{2\delta_0 - \mu_1}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(n+1)M_0} \sqrt{2\delta_0 - \mu_2} \quad (3.1)$$

$$(1 - \mu_1)\beta_1 + v_0 \sqrt{\frac{1}{2}(n+1)M_0} = \mu_1\alpha_1, \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(n+1)M_0} \sqrt{2\delta_0 - (\mu_1 + 1)} \quad (3.2)$$

$$(1 - \mu_2)\beta_2 - v_0 \sqrt{\frac{1}{2}(n+1)M_0} = \mu_2\alpha_2, \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(n+1)M_0} \sqrt{2\delta_0 - (\mu_2 + 1)} \quad (3.3)$$

При этом

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha \quad (3.4)$$

Складывая условия (3.1), получим для δ_0 выражение

$$\delta_0 = \frac{2\alpha^2}{2M_0}, \quad a = \frac{\frac{1}{4}[a^2/(n+1) + M_1 + M_2]^2 - M_1M_2}{2\alpha^2/(n+1)} \quad (3.5)$$

а M_1 , M_2 определяются согласно (1.2) через p_1 , p_2 .

Для углов взаимодействия α_1 , α_2 , β_1 , β_2 и скорости v_0 имеем теперь значения

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(n+1)(a - M_1)}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(n+1)(a - M_2)}$$

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(n+1)(a - M_1 - M_0)}, \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(n+1)(a - M_2 - M_0)} \quad (3.6)$$

$$v_0 = (1 - M_2/M_0) \sqrt{(a - M_2 - M_0)/M_0} - (M_2/M_0) \sqrt{(a - M_2)/M_0}$$

Наконец, складывая первые условия (3.2), (3.3), получим для M_0 уравнение

$$AM_0^3 + BM_0^2 + CM_0 + D = 0 \quad (3.7)$$

с коэффициентами

$$A = (M_1 - M_2)^2$$

$$B = 8aM_1M_2 - 2(M_1 + M_2)(M_1^2 + M_2^2) + 8M_1M_2 \sqrt{(a - M_1)(a - M_2)} \quad (3.8)$$

$$C = (M_1^2 - M_2^2)^2 + 4M_1^2M_2[M_1 - \sqrt{(a - M_1)(a - M_2)}] + \\ + 4M_1M_2^2[M_2 - \sqrt{(a - M_1)(a - M_2)}] - 8aM_1M_2[a + \sqrt{(a - M_1)(a - M_2)}]$$

$$D = 4M_1M_2[(M_2^2 - 2aM_1)(M_1 - \sqrt{(a - M_1)(a - M_2)}) + \\ + (M_1^2 - 2aM_2)(M_2 - \sqrt{(a - M_1)(a - M_2)})] + 8aM_1M_2[a(M_1 + M_2) - M_1M_2]$$

Найдем условие для исходных параметров M_1 , M_2 , α , при котором M_0 или, что тоже, давление в точке взаимодействия имеет максимальное значение.



Фиг. 2

Критическое соотношение (3.9) при этом принимает вид $1/2\alpha^\vee = 2$, т. е. имеем режим течения, аналогичный регулярному отражению от жесткой стенки [1,3].

5. Для исследования уравнения (3.7) введем параметры

$$\eta = \frac{M_2}{M_1}, \quad \alpha^\vee = \frac{\alpha}{\sqrt{1/2(n+1)M_1}} \quad (5.1)$$

Тогда получим для величины относительного избыточного давления в точке взаимодействия уравнение

$$A^\circ \left(\frac{M_0}{M_1} \right)^3 + B^\circ \left(\frac{M_0}{M_1} \right)^2 + C^\circ \left(\frac{M_0}{M_1} \right) + D^\circ = 0 \quad (5.2)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} A^\circ &= (1 - \eta)^2, \quad B^\circ = 2(2\alpha^\vee{}^2\eta - 1 + \eta + \eta^2 - \eta^3) \\ C^\circ &= \alpha^\vee{}^4\eta - 4\alpha^\vee{}^2\eta(1 + \eta) + 1 + \eta - 4\eta^2 + \eta^3 + \eta^4 \\ D^\circ &= \eta[\alpha^\vee{}^4(1 + \eta) + 4\alpha^\vee{}^2\eta - 1 + \eta + \eta^2 - \eta^3] \end{aligned} \quad (5.3)$$

Критическое соотношение (3.9)

$$4(3A^\circ C^\circ - B^{\circ 2}) + [9A^\circ(3A^\circ D^\circ - B^\circ C^\circ) + 2B^{\circ 3}]^2 = 0 \quad (5.4)$$

при подстановке коэффициентов (5.3) примет вид

$$\begin{aligned} &4\eta(\eta + 1)^2\alpha^\vee{}^{12} - 8\eta^2(\eta + 1)(5\eta^2 + 6\eta + 5)\alpha^\vee{}^{10} + (\eta - 1)^2 \\ &(\eta^4 + 116\eta^3 + 214\eta^2 + 116\eta + 1)\alpha^\vee{}^8 - 8(\eta - 1)^4(\eta + 1)(\eta^2 + 17\eta + 1)\alpha^\vee{}^6 + \\ &+ 2(\eta - 1)^6(7\eta^2 + 36\eta + 7)\alpha^\vee{}^4 - 8(\eta - 1)^8(\eta + 1)\alpha^\vee{}^2 + (\eta - 1)^{10} = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Решение (3.10) над критическим многообразием (5.5)

$$\frac{M_0}{M_1} = \frac{-B^\circ + \sqrt{B^{\circ 2} - 3A^\circ C^\circ}}{3A^\circ} \quad (5.6)$$

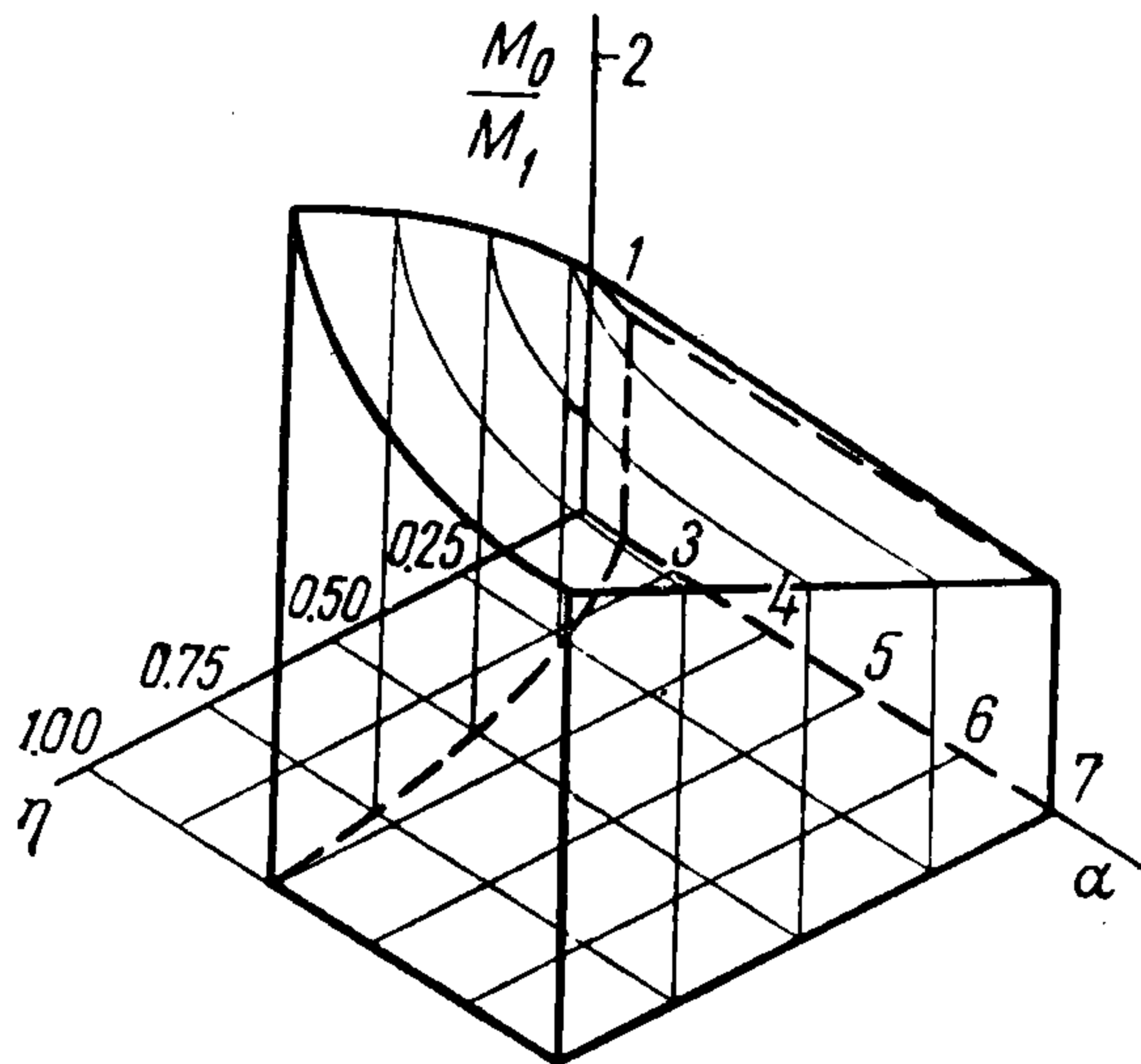
примет вид

$$\begin{aligned} \frac{M_0}{M_1} &= \frac{2[(\eta + 1)(\eta - 1)^2 - 2\alpha^\vee{}^2\eta]}{3(1 - \eta)^2} + \\ &+ \frac{\sqrt{(\eta - 1)^4(\eta^2 - \eta + 1) - 4\alpha^\vee{}^2\eta(\eta - 1)^2(\eta + 1) + \alpha^\vee{}^4\eta(\eta + 3)(3\eta + 1)}}{3(1 - \eta)^2} \end{aligned} \quad (5.7)$$

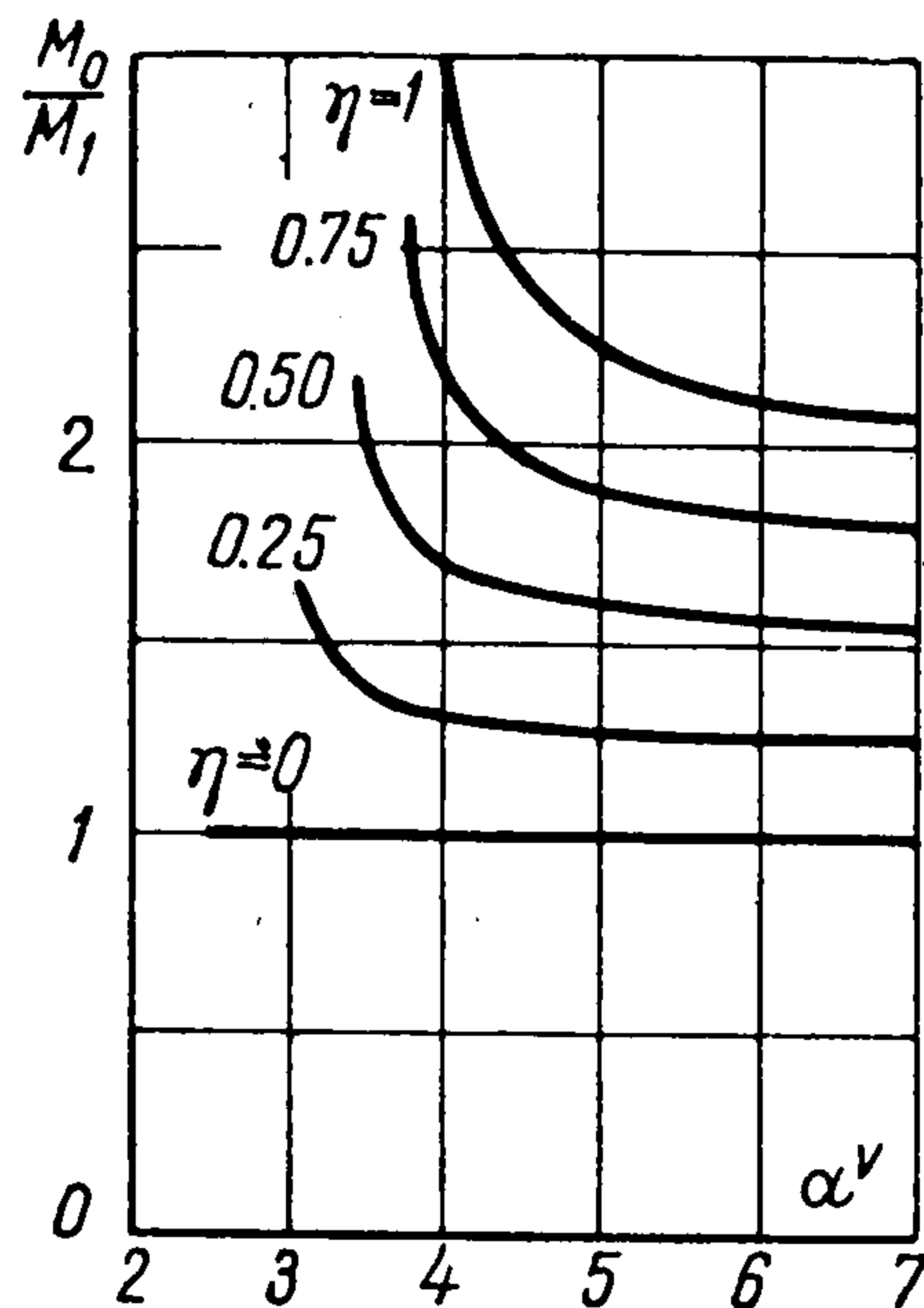
В силу симметрии уравнения (3.7) относительно параметров M_1, M_2 уравнения (5.2), (5.5), (5.7) инвариантны относительно преобразования

$$\eta_2 = \frac{1}{\eta_1}, \quad \frac{M_0}{M_2} = \frac{M_0}{M_1} \frac{1}{\eta_1}, \quad \alpha_2^\vee = \alpha_1^\vee \frac{1}{\sqrt{\eta_1}} \quad \left(\eta_1 = \frac{M_2}{M_1} \right) \quad (5.8)$$

т. е. для уравнений (5.2), (5.5), (5.7) достаточно рассмотреть решения для η в диапазоне $0 \leq \eta_1 \leq 1$, значения при $1 \leq \eta_2 \leq \infty$ будут выражаться через них по формулам (5.8).



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 2 приведена кривая численного решения уравнения (5.5), проходящая при $\eta = 1$ согласно (4.3) через $\alpha^\vee = 4$. При этом в окрестности $\eta = 1$ для уравнения (5.5) имеем решение

$$\alpha^\vee = \left[\frac{2(5\eta^2 + 6\eta + 5)}{(\eta + 1)} \right]^{1/2} \quad (5.9)$$

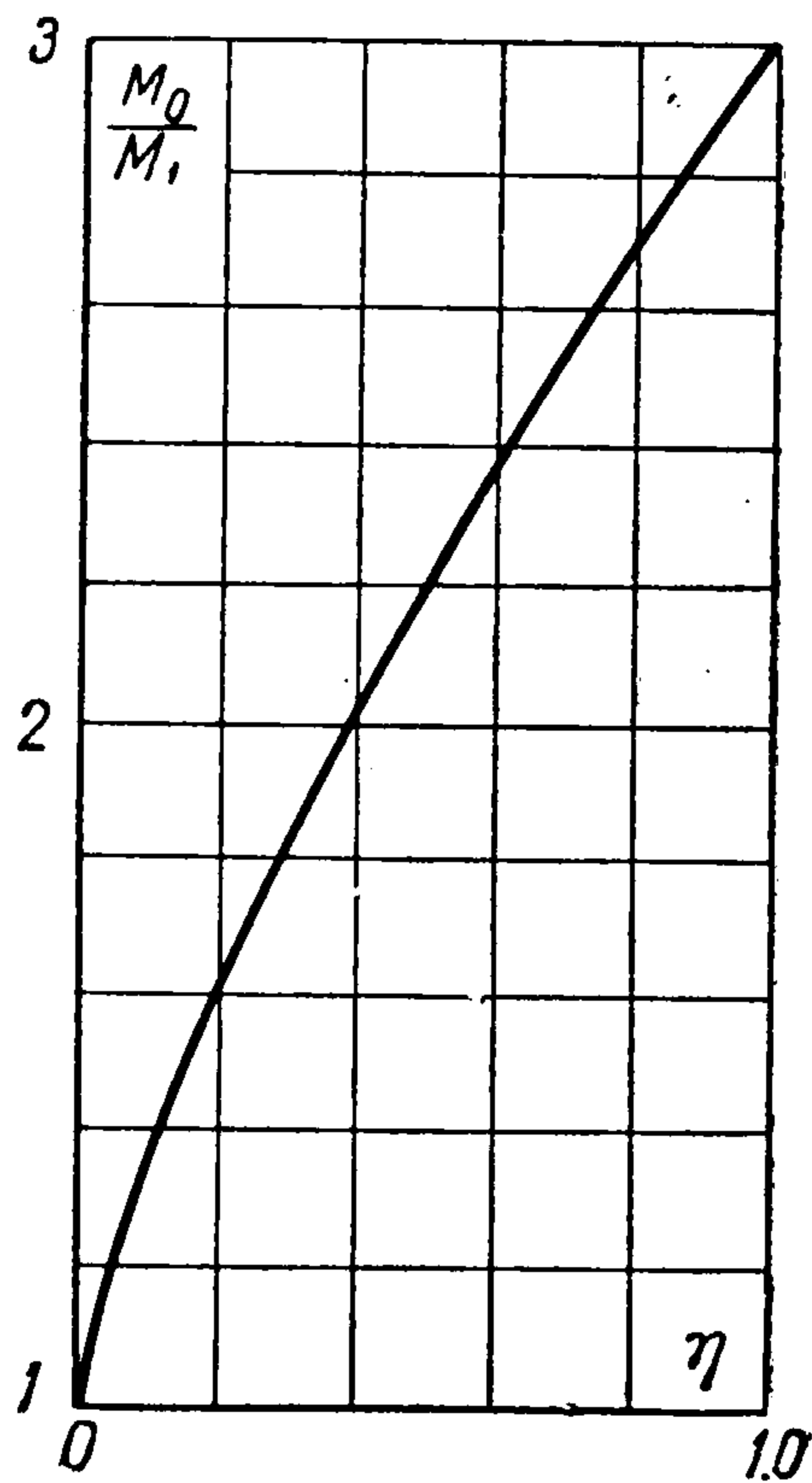
Решение принимает значение

$$\alpha^\vee = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \quad \text{при } \eta = 0$$

Решение, согласно (5.8), стремится к

$$\alpha^\vee = \sqrt{(3 + 2\sqrt{2})} \eta \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty$$

На фиг. 3 построена поверхность решения M_0/M_1 уравнения (5.2). Отдельные сечения этой поверхности плоскостями $\eta = \text{const}$ приведены на фиг. 4. При $\eta = 0$ имеем постоянное значение $M_0/M_1 = 1$, что соответствует случаю нулевой интенсивности волны OK_2 . При $\eta = 1$ получаем известное решение (4.2) симметричного регулярного взаимодействия [1,3]. При $\eta \rightarrow \infty$ решение, согласно (5.8), стремится к цилиндрической поверхности $M_0/M_1 = \eta$, что соответствует случаю нулевой интенсивности волны OK_1 . На фиг. 5 дается вид по оси α^\vee сечения поверхности решения цилиндрической поверхностью, проходящей через критическое многообразие параллельно оси M_0/M_1 .



Фиг. 5

Автор благодарит С. В. Фальковича за советы при обсуждении работы.

Поступила 12 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
2. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.
3. Шиндяпин Г. П. О регулярном отражении слабых ударных волн от жесткой стенки. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.