

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ ПРИ НАЛИЧИИ УПРУГИХ ГРАНИЦ

А. И. Короткин (Ленинград)

Исследование устойчивости течения Пуазейля в канале с податливыми стенками ведется на основе метода малых колебаний [1-4].

В силу приближенности способа нахождения решений уравнения Орра — Зоммерфельда [5], возможно получение различных расчетных формул для критического числа Рейнольдса в зависимости от степени приближения. Поэтому в работе приведена схема расчета критического числа Рейнольдса для течения Пуазейля между твердыми стенками, которая затем обобщается на случай упругих границ. Формулировка граничных условий для возмущений на податливой поверхности отличается от соответствующих формулировок, содержащихся в работах [6-11].

**§ 1. Устойчивость течения Пуазейля между твердыми стенками.** Рассмотрим устойчивость течения Пуазейля по отношению к возмущениям с амплитудой функции тока, являющейся четной функцией в системе координат с началом на оси канала [9]. Вопрос об устойчивости течения Пуазейля сводится к нахождению общего решения уравнения

$$(u - c)(f'' - \alpha^2 f) - u''f = -\frac{i}{\alpha R}(f^{IV} - 2\alpha^2 f'' + \alpha^4 f) \quad (1.1)$$

при граничных условиях

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = f'''(1) = 0 \quad (1.2)$$

Здесь  $u(y)$  — распределение скорости в течении Пуазейля;  $f(y)$  — амплитуда функции тока возмущающего движения;  $\alpha$  — волновое число, определяющее длину волны возмущающего движения;  $c$  — скорость распространения возмущающего движения;  $R$  — число Рейнольдса, построенное по половине ширины канала  $h$  и максимальной скорости.

Все величины, входящие в (1.1), (1.2), безразмерные. За масштаб скорости взята максимальная скорость в канале, за масштаб длины — половина ширины канала. Для существования нетривиального решения уравнения (1.1) при граничных условиях (1.2) необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) & f_3(0) & f_4(0) \\ f_1'(0) & f_2'(0) & f_3'(0) & f_4'(0) \\ f_1'(1) & f_2'(1) & f_3'(1) & f_4'(1) \\ f_1'''(1) & f_2'''(1) & f_3'''(1) & f_4'''(1) \end{vmatrix} = 0 \quad (1.3)$$

Здесь  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) — частные решения уравнения (1.1) [9]. Производя оценку отдельных членов уравнения (1.3), можно его преобразовать к виду

$$-\frac{1}{y_k} \frac{f_3(0)}{f_3'(0)} (1 + \Delta) = \frac{cu_0' f_2'(1)}{u_0' c f_2'(1) + f_1'(1)} \quad \left( \Delta = \frac{u_0' y_k}{c} - 1 \right) \quad (1.4)$$

Здесь  $u_0' = u'(0)$ ,  $u'(y_k) = u_k = c$ . Поправка  $\Delta$  в левой части (1.4) в первом приближении может быть принята равной нулю. Ее численное значение для второго приближения определяется расчетами первого приближения [5]. В дальнейшем ограничимся первым приближением, т. е. положим  $\Delta = 0$ . Выразим левую часть (1.4) через функцию Титьенса [12] и подставим значения  $f_1'(1)$ ,  $f_2'(1)$ ; получим

$$F^0(w) = \frac{1}{1 - F(w)} = 1 + u_0' c \left( \int_0^1 (u - c)^2 dy \right)^{-1} \int_0^1 (u - c)^2 dy \int_0^y (u - c)^{-2} dy + u_0' c \left( \alpha^2 \int_0^1 (u - c)^2 dy \right)^{-1} + O(\alpha^2) \quad (1.5)$$

В комплексном уравнении (1.5) значения функции Титьенса  $F(w)$  и функции Линя  $F^\circ(w)$  не зависят от распределения скоростей  $u(y)$ . Подробные таблицы этих функций содержатся в работе [13]. Слагаемое  $O(\alpha^2)$  в правой части (1.5) объединяет все члены порядка  $\alpha^2$  и выше. Аргумент  $w$  определяется произведением

$$w = y_k (u_k' \alpha R)^{1/3} \quad (1.6)$$

Определяя выражения для интегралов, входящих в (1.5), с учетом распределения скоростей в течении Пуазейля  $u = 2y - y^2$ , получаем два вещественных равенства

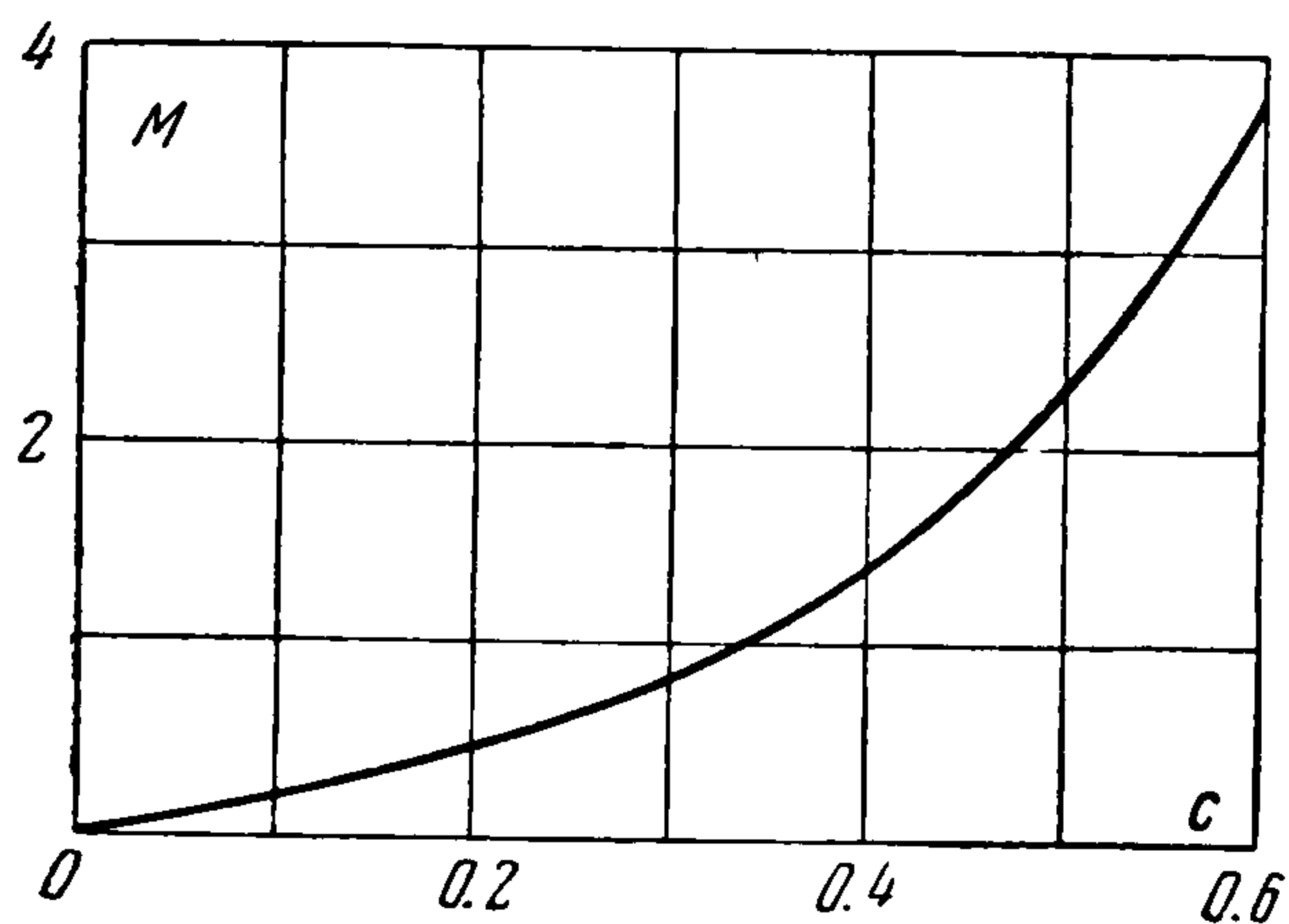
$$F_r^\circ(w) = -\frac{4c \ln c}{u_k'^3} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{2c}{8/15 - 4/3c + c^2}, \quad F_i^\circ(w) = \frac{4\pi c}{u_k'^3} \quad (1.7)$$

Равенства (1.6), (1.7) позволяют проводить расчет кривой нейтральной устойчивости в следующем порядке.

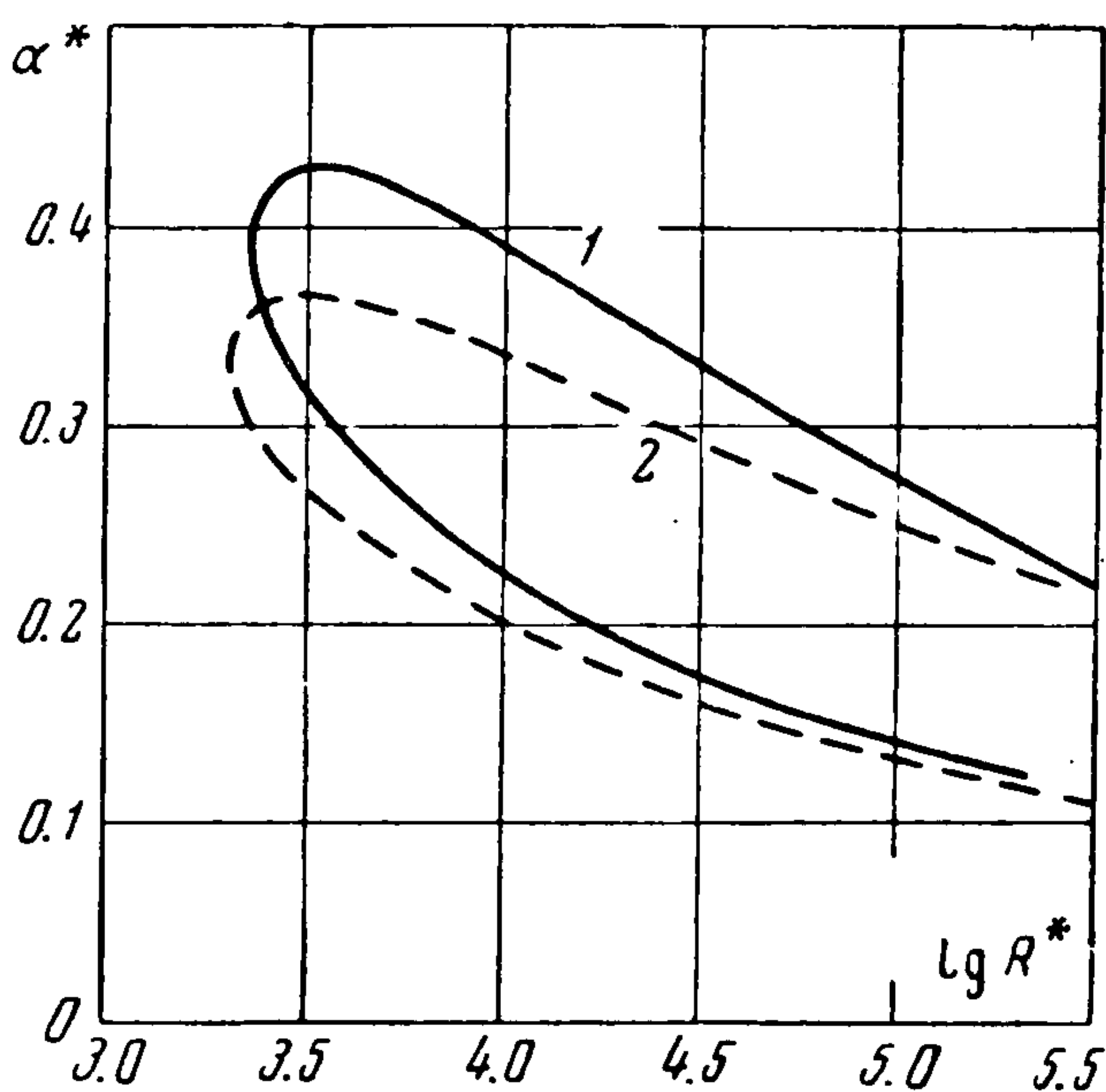
1. Задаем значение  $0 \leq F_i^\circ \leq 0.58$ . По графику (фиг. 1)  $M(c) = 4\pi c / u_k'^3$  и при помощи зависимости  $F_i^\circ = F_i^\circ(w)$  находим значения  $c$  и  $w$ .
2. По найденному  $c$  определяем  $y_k, u_k'$ .
3. Для полученного  $w$  находим  $F_r^\circ$ .
4. Используя первое равенство (1.7), находим параметр  $\alpha$ .
5. При помощи (1.6) определяем соответствующее значение числа  $R$ .
6. Вычисляем

$$\alpha^* = \alpha \frac{\delta^*}{h} = \frac{1}{3} \alpha, \quad R^* = \frac{1}{3} R \quad \left( \frac{\delta^*}{h} = \int_0^1 (1-u) dy \right)$$

На фиг. 2 представлена нейтральная кривая  $I_2$ , рассчитанная для течения Пуазейля по изложенной схеме, а также кривая 2, полученная Линем [5]. Критическое число Рейнольдса для кривой 1 равно  $R_{*}^* = 2120$ . Для сравнения приведем значения критических чисел Рейнольдса, вычисленные Линем  $R_{*}^* = 1970$  (первое приближение),  $R_{*}^* = 1780$  (второе приближение) и Мексингом [14]  $R_{*}^* = 2260$ . Первое приближение



Фиг. 1



Фиг. 2

Линя отвечает рассмотренному выше случаю  $\Delta = 0$ . Второе приближение Линя делает с учетом поправки  $\Delta$ . Обратимся теперь к случаю, когда возмущения, возникающие в течении Пуазейля, имеют амплитуду функции тока, являющуюся нечетной функцией относительно оси канала.

Граничные условия для уравнения (1.1) в данном случае запишутся так [3]:

$$f(0) = f'(0) = f(1) = f''(1) = 0 \quad (1.8)$$

Характеристическое уравнение задачи, соответствующее условиям (1.8), имеет вид

$$\begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) & f_3(0) & f_4(0) \\ f_1'(0) & f_2'(0) & f_3'(0) & f_4'(0) \\ f_1(1) & f_2(1) & f_3(1) & f_4(1) \\ f_1''(1) & f_2''(1) & f_3''(1) & f_4''(1) \end{vmatrix} = 0 \quad (1.9)$$

Проведя преобразования определителя (1.9), аналогичные изложенным выше в случае четной функции тока, получим

$$F^{\circ}(w) = 1 + u_0'c \int_0^1 (u-c)^{-2} dy + u_0'c\alpha^2 \left[ \int_0^1 (u-c)^{-2} dy \int_0^y (u-c)^2 dy \int_0^y (u-c)^{-2} dy - \int_0^1 (u-c)^{-2} dy \int_0^1 (u-c)^{-2} dy \int_0^y (u-c)^2 dy \right] + O(\alpha^4) \quad (1.10)$$

Приравняем вещественные и мнимые части (1.10), подставив выражения для интегралов; получим

$$F_r^{\circ}(w) = \quad (1.11)$$

$$= 1 - \frac{u_0'}{u_k'} + \frac{u_0'cu_k''}{u_k'^3} \ln c + \frac{u_0'c}{u_k'^2} \alpha^2 \left[ -\frac{1}{3} + \frac{7}{36} \frac{u_k''}{u_k'} + \frac{25}{432} \left( \frac{u_k''}{u_k'} \right)^2 - \frac{1}{32} \left( \frac{u_k''}{u_k'} \right)^3 \right]$$

$$F_i^{\circ}(w) = -\pi \frac{u_0'cu_k''}{u_k'^3} \quad (1.12)$$

На кривой нейтральной устойчивости должны выполняться оба условия (1.11), (1.12). Диапазон изменения  $w$ , в котором может соблюдаться соотношение (1.12), определяется неравенством  $w \geq 2.3$ , так как  $F_i^{\circ}(w) \geq 0$ . При изменении  $w$  в области  $w \geq 2.3$  для профиля Пуазейля имеют место следующие оценки:

$$c \leq 0.246, \quad \frac{u_0'}{u_k'} \leq 1.151, \quad \frac{u_0'cu_k''}{u_k'^3} \ln c \leq 0.263, \quad -0.195 \geq \frac{7}{36} \frac{u_k''}{u_k'} \geq -0.224$$

$$\frac{25}{432} \left( \frac{u_k''}{u_k'} \right)^2 \leq 0.0766, \quad -0.0313 \geq \frac{1}{32} \left( \frac{u_k''}{u_k'} \right)^3 \geq 0.0473, \quad F_r^{\circ}(w) > 0.96$$

Таким образом, из (1.11) видно, что в случае выполнения равенства (1.12) имеем  $\alpha^2 < 0$ . Это свидетельствует об устойчивости ламинарного течения Пуазейля ко всем малым возмущениям вида  $f(y) \exp[i\alpha(x-ct)]$ , где  $f(y)$  — нечетная функция относительно оси канала.

Полученный результат можно проиллюстрировать следующими соображениями. В случае  $f(y)$  четной относительно оси канала скорость возмущающего движения  $v_x(y)$  будет функцией нечетной, и следовательно, всегда будет выполняться равенство

$$\int_0^2 v_x(y) dy = 0 \quad (1.13)$$

выражающее условие неразрывности, так как через любое сечение канала протекает в данный момент одно и то же количество жидкости. В случае  $f(y)$  нечетной относительно оси канала составляющая скорости возмущающего движения  $v_x$  будет функцией четной, и, следовательно, интеграл в левой части (1.13) может не быть равным нулю. Это обстоятельство говорит о невозможности существования в силу уравнения неразрывности таких возмущений. Подобные рассуждения позволяют сделать, не прибегая даже к подробному анализу, вывод, о том, что не все возмущения с нечетной относительно оси канала функцией тока могут существовать в течении Пуазейля.

§ 2. Граничные условия для уравнения Орра — Зоммерфельда в случае упругой поверхности. Задача об устойчивости ламинарной формы течения вблизи упругой поверхности отличается от аналогичной задачи для твердой стенки граничным условием при  $y = 0$ .

Если в случае твердой поверхности составляющие скорости возмущающего движения на стенке равны нулю, то в случае упругой поверхности естественно предположить, что в силу выполнения условия прилипания они равняются соответствующим составляющим скоростей точек поверхности стенки.

Деформация упругой поверхности, в свою очередь, связана с касательным и нормальным напряжениями на поверхности тела, вызванными пульсациями скоростей возмущающего движения в потоке.

Будем рассматривать только малые деформации стенки, такие, что их влиянием на основной профиль скоростей можно пренебречь.

Зададимся следующими уравнениями связи между напряжениями и деформациями поверхности:

$$y_1 = k_1 p_1 e^{i\theta_1}, \quad x_1 = m_1 \tau_1 e^{i\theta_2} \quad \left( \tau_1 = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y_1} \right) \quad (2.1)$$

Здесь  $k_1, m_1$  — постоянные величины, зависящие от свойств покрытия,  $p_1$  — переменная составляющая давления на поверхности тела,  $\tau_1$  — переменная составляющая касательного напряжения на поверхности тела,  $\theta_1, \theta_2$  — сдвиги фаз между колебаниями напряжений на поверхности тела и соответствующими деформациями.

Пульсации давления на стенке можно определить из линеаризованных уравнений Навье — Стокса, выписанных для возмущающего движения [7].

Дифференцируя равенства (2.1) по времени и выражая входящие в них переменные величины через функцию тока возмущающего движения, получаем следующие граничные условия на упругой поверхности:

стенка податлива только в нормальном направлении

$$-\frac{kc}{i\alpha R} f'''(0) + f(0) [e^{-i\theta_1} - kcu_0'] = 0, \quad f'(0) = 0 \quad (2.2)$$

стенка податлива только в касательном направлении

$$f(0) = 0, \quad f'(0) + i \frac{m\alpha c}{R} f''(0) e^{i\theta_2} = 0 \quad (2.3)$$

В равенствах (2.2), (2.3) безразмерные величины

$$k = k_1 \frac{\rho U^2}{h}, \quad m = m_1 \frac{\rho U^2}{h}$$

играют роль критериев подобия, характеризующих свойства покрытия. При одних и тех же механических характеристиках покрытия эффективность его работы зависит от плотности жидкости, движущейся в канале, квадрата максимальной скорости и ширины канала.

Полученные граничные условия на стенке являются следствием принятой связи между деформацией поверхности и соответствующими напряжениями (2.1), которая, несмотря на свою простоту, является весьма общей. Так, например, первое соотношение (2.1) охватывает все покрытия, деформация которых описывается уравнением типа

$$L\left(y, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right) = p(x, t)$$

где  $L$  — линейная комбинация своих аргументов с постоянными коэффициентами,  $p$  — давление возмущающего движения на поверхности стенки,  $y$  — координата поверхности упругого покрытия. Предполагается, как обычно в методе малых колебаний, что все величины, связанные с возмущающим движением, меняются по гармоническому закону

$$A(x, y, t) = [A_r(y) + iA_i(y)] \exp[i\alpha(x - ct)]$$

§ 3. Устойчивость течения Пуазейля на поверхности, податливой в нормальном направлении. Используя граничные условия (2.2), можно получить следующее характеристическое уравнение:

$$-\frac{1}{y_k} \frac{f_3(0)}{f_3'(0)} - \frac{u_0' kc}{e^{-i\theta_1} - kcu_0'} = \frac{cu_0' f_2'(1)}{u_0' c f_2'(1) + f_1'(1)} \quad (3.1)$$

Оно представляет собой обобщение соотношения (1.4) на случай упругой поверхности. При выводе (3.1) принимались во внимание только члены, старшие по отноше-

нию к величине  $\alpha R$ , которая предполагается достаточно большой. На основании (3.1) находим два вещественных уравнения

$$N_r = G_r(w, kc, \theta_1, u_0'), \quad N_i = G_i(w, kc, \theta_1, u_0') \quad (3.2)$$

связывающих характеристики возмущающего движения  $\alpha, c$ , число Рейнольдса  $R$ , данные профиля скоростей и параметры упругого покрытия  $k, \theta_1$ .

Функции, входящие в (3.2), имеют следующие выражения:

$$N_r = -\frac{4c \ln c}{u_k'^3} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{2c}{8/15 - 4/3c + c^2}, \quad N_i = \frac{4\pi c}{u_k'^3}$$

$$G_r = \frac{A - F_r(w)}{(A - F_r)^2 + (B - F_i)^2}, \quad G_i = \frac{F_i(w) - B}{(A - F_r)^2 + (B - F_i)^2} \quad (3.3)$$

$$A = \frac{1 - kcu_0' \cos \theta_1}{1 - 2kcu_0' \cos \theta_1 + k^2c^2u_0'^2}, \quad B = \frac{kcu_0' \sin \theta_1}{1 - 2kcu_0' \cos \theta_1 + k^2c^2u_0'^2} \quad (3.4)$$

Используя систему уравнений (3.2), можно предложить следующий порядок расчета критического числа Рейнольдса для течения Пуазейля между упругими поверхностями.

1. Задавшись численными значениями параметров  $kc, \theta_1$  и зная величину  $u_0'' = 2$  (для профиля Пуазейля), вычисляем  $A$  и  $B$  по формулам (3.4).
2. Используя известные [13, 15] зависимости  $F_i(w), F_r(w)$ , строим при помощи формулы (3.3) для найденных  $A$  и  $B$  график функции  $G_i(w)$ .
3. По графику  $G_i = G_i(w)$  определяем  $G_{i\max}$  и соответствующее значение  $w_{\max}$ .
4. Решая графически относительно  $c$  второе уравнение (3.2), определяем величину  $c_m$ , а следовательно, и соответствующие значения  $y_k, u_k'$ .
5. По формуле (3.3) для значения  $w = w_m$  определяем  $G_{rm}$ .
6. Вычисляем параметр  $\alpha$ , используя первое равенство (3.2).
7. Определяем критическое число Рейнольдса при помощи соотношения (1.6).
8. Находим величину параметра  $k$ , которому соответствует найденное число Рей-

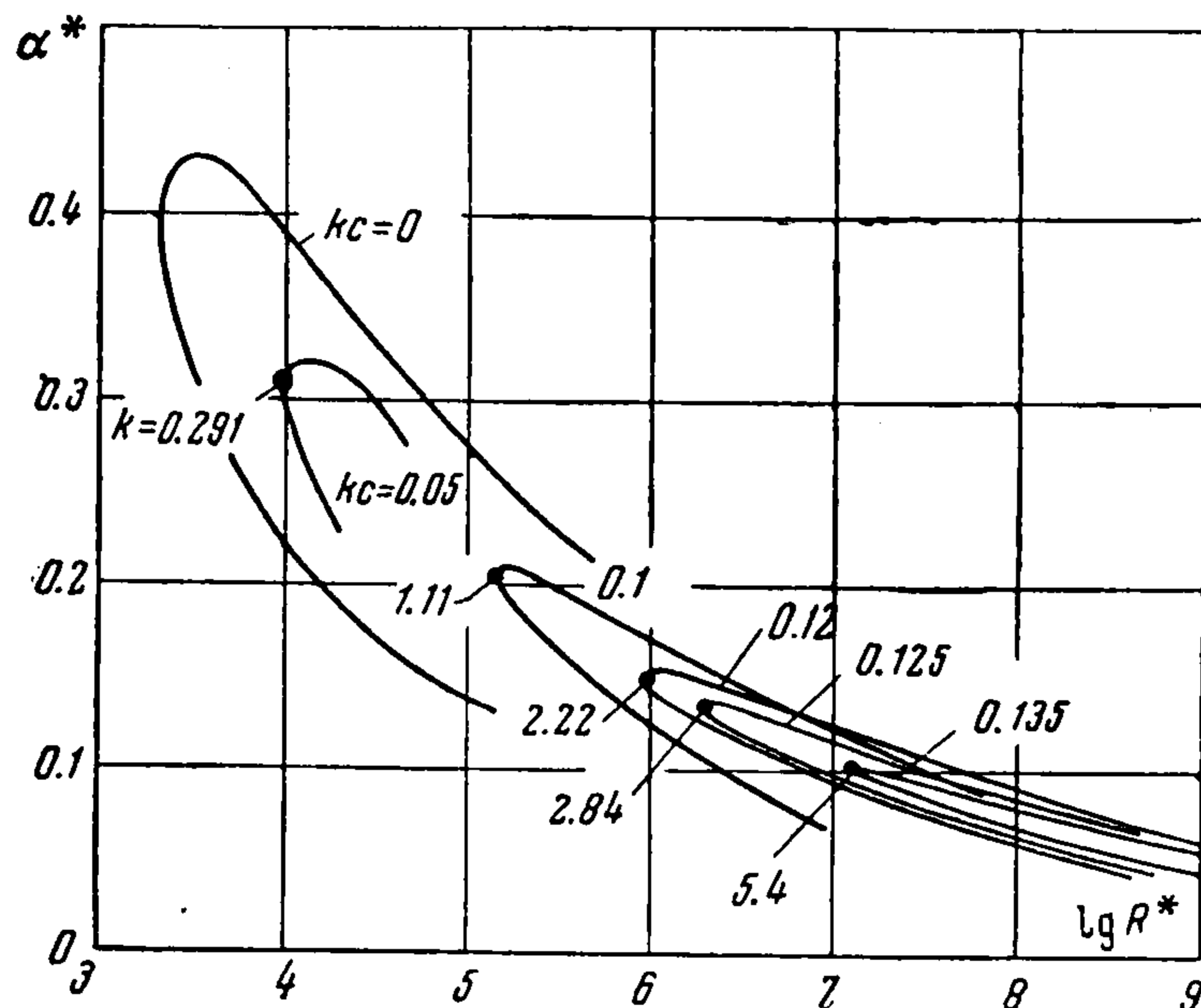
нольдса  $R_* k = kc / c_m$ .

Проделав указанные вычисления для различных значений произведения  $kc$  при постоянном  $\theta_1$ , можно получить зависимость

$$R_*^* = R_*^*(k, \theta_1 = \text{const})$$

На фиг. 3 представлены кривые нейтральной устойчивости для профиля Пуазейля, построенные по изложенной схеме в случае  $\theta_1 = 60^\circ$ .

Расчеты показывают, что податливость поверхности в нормальном направлении может как повышать устойчивость ламинарной формы течения ( $\theta_1 \approx 60 - 90^\circ$ ), так и уменьшать ее ( $\theta_1 \approx 150 - 180^\circ$ ).



Фиг. 3

§ 4. Устойчивость течения Пуазейля на поверхности, податливой в касательной плоскости. Используя однородные граничные условия на стенке (2.3) и условия на оси канала из (1.2), можно получить с учетом только старших членов относительно величины  $\alpha R$  следующее характеристическое уравнение:

$$\{1 - F(w) [1 - m\alpha^2 c^2 y_k w^{-3/2} \exp(i(\theta_2 + 1/4\pi))]\}^{-1} = N_r + iN_i \quad (4.1)$$

Величины  $N_r, N_i, F(w)$  определяются аналогичными выражениями, что и в равенствах (3.2).

Комплексное уравнение (4.1) можно заменить двумя вещественными

$$\Phi_r = N_r, \quad \Phi_i = N_i \quad \left( \Phi_r = \frac{D_r(w, M, \theta_2)}{D_r^2 + D_i^2}, \quad \Phi_i = -\frac{D_i(w, M, \theta_2)}{D_r^2 + D_i^2} \right) \quad (4.2)$$

Здесь

$$D_r(w, M, \theta_2) = 1 - F_r(w) + F_r(w) M w^{-3/2} \cos(\theta_2 + 1/4\pi) - F_i(w) M w^{-3/2} \sin(\theta_2 + 1/4\pi)$$

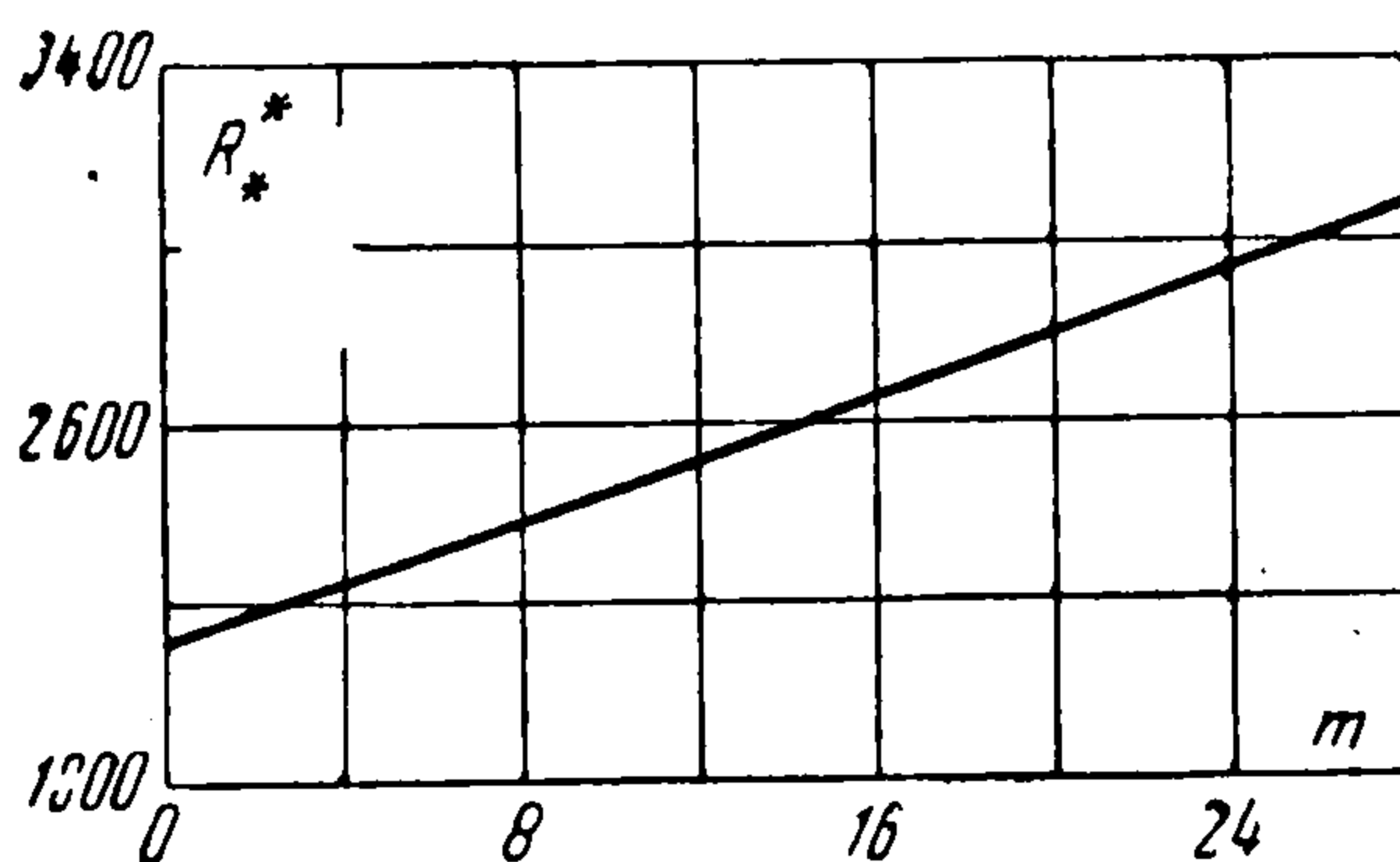
$$D_i(w, M, \theta_2) = -F_i(w) + F_i(w) M w^{-3/2} \cos(\theta_2 + 1/4\pi) + F_r(w) M w^{-3/2} \sin(\theta_2 + 1/4\pi)$$

$$M = m\alpha^2 c^2 y_k$$

Используя (4.2), нетрудно вычислить, придерживаясь схемы, изложенной в § 3, критическое число Рейнольдса и соответствующее значение параметра  $m$ .

Результаты расчетов критического числа Рейнольдса течения Пуазейля между двумя гибкими стенками, податливыми в касательной плоскости, представлены на фиг. 4. Расчеты велись для  $\theta_2 = 0$ .

Сравнение характеристик устойчивости течения Пуазейля между гибкими стенками, податливыми в нормальном направлении, и гибкими стенками, податливыми в касательном направлении, при оптимальных сдвигах фаз  $\theta_1$  и  $\theta_2$  позволяет сделать вывод, что способность стенки деформироваться в нормальном к поверхности направлении под действием пульсаций нормального давления влияет на устойчивость ламинарной формы течения в значительно большей степени, чем соответствующая способность стенки деформироваться в касательной плоскости. Объясняется указанное обстоятельство тем, что влияние податливости поверхности в касательной плоскости на устойчивость ламинарной формы течения обратно пропорционально числу Рейнольдса, как это следует из второго граничного условия (2.3).



Фиг. 4

Поступила 15 III 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Изд. иностр. лит., 1956.
2. Шлихтинг Г. Возникновение турбулентности. Изд. иностр. лит., 1962.
3. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. Изд. иностр. лит., 1958.
4. Монин А. С., Яглом А. М. Гидродинамическая неустойчивость и возникновение турбулентности (обзор). ПМТФ, 1962, № 5.
5. Lin C. C. On the stability of two-dimensional parallel flows. Parts 1, 2, 3. Quart. Appl. Math., 1945, vol. 3.
6. Benjamin T. B. Effects of a flexible boundary on hydrodynamic stability. J. Fluid Mech., 1960, vol. 9, No 4.
7. Boggs F. W., Tokita N. A theory of the stability of laminar flow along compliant plates. Thierd Symposium on Naval Hydrodynamics, 1960, Wageningen.
8. Becker E. Die laminare incompressible Grenzschicht an einer durch laufende Wellen deformierten ebenen Wand. Z. Flugwiss., 1960, H. 10/11.
9. Betchov R. Simplified analysis of boundary-layer oscillations. J. Ship Res., 1960, vol. 4, No. 2.
10. Landahl M. T. On the stability of a laminar incompressible boundary layer over a flexible surface. J. Fluid Mech., 1962, vol. 13, No. 4.
11. Hains F. D., Price J. F. Effect of a flexible wall on the stability of Poiseuille flow. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 3.
12. Tietjens O. Beiträge zur Entstehung der Turbulenz. Z. angew. Math. und Mech., 1925, B. 5, H. 3.
13. Miles J. W. The hydrodynamic stability of a thin of liquid in uniform shearing motion. J. Fluid Mech., 1960, vol. 8, No. 4.
14. Meksyn D. Fluid motion between parallel planes. Proc. Roy. Soc. A, 1946, vol. 186.
15. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе И. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II, Гостехиздат, 1948.