

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ГАШЕНИЯ ВРАЩЕНИЯ ГИРОСТАТА

Т. А. Летова

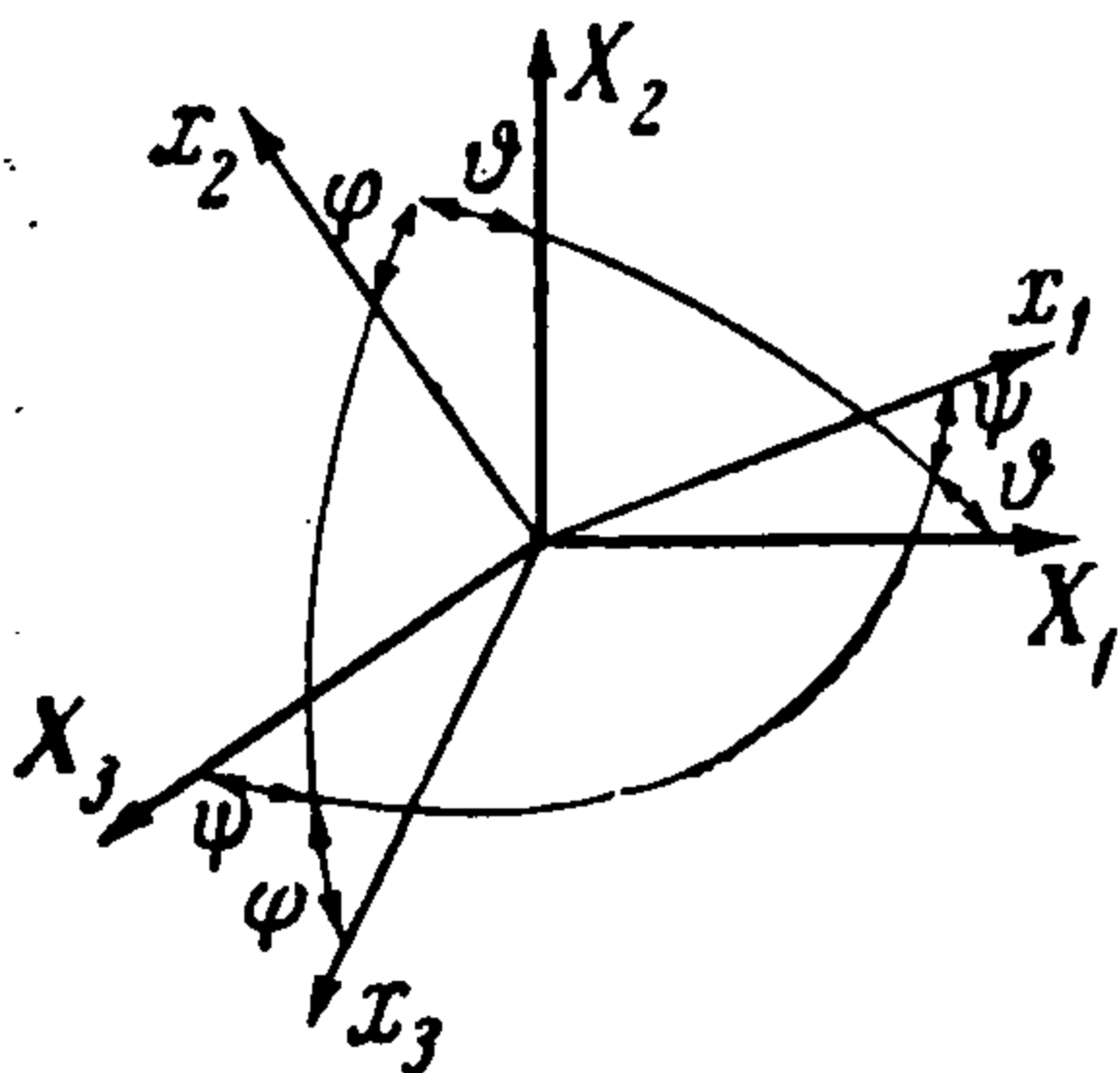
(Москва)

В настоящее время изучаются различные методы стабилизации твердого тела относительно осей, определенным образом ориентированных в пространстве [1-4].

Среди них следует отметить метод, основанный на использовании инертных маховых масс, как обладающий рядом важных технических преимуществ [4].

Представляет интерес рассмотреть применительно к этому методу задачу о построении оптимального закона стабилизации вращения твердого тела около неподвижной точки [5-8].

1. Постановка задачи. Рассмотрим свободное твердое тело, закрепленное в центре масс. Пусть $OX_1X_2X_3$ — неподвижная система координат; $Ox_1x_2x_3$ — система координат, жестко связанная с телом, ориентированная по главным центральным осям инерции (фиг. 1).



Положение связанной системы можно определить, например, углами Эйлера. Допустим, что в теле установлены маховики, оси которых совпадают с осями $X_1X_2X_3$.

По установленной терминологии эта система называется гиростатом. Уравнения движения гиростата — закон момента количества движения — даны Вольтерра [9].

Они имеют вид

$$C_1 p_1' + J_1 \omega_1 + (C_3 - C_2) p_2 p_3 + H_3 p_2 - H_2 p_3 = 0 \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (1.1)$$

$$H_i = J_i \omega_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Здесь C_1, C_2, C_3 — главные центральные моменты инерции гиростата (как если бы маховики не вращались); J_1, J_2, J_3 — соответственно моменты инерции маховиков; $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — угловые скорости вращения маховиков относительно тела; p_1, p_2, p_3 — проекции вектора p угловой скорости тела на оси $x_1x_2x_3$.

Символ (1 2 3) означает, что два последующих уравнения получаются из (1.1) циклической перестановкой.

Уравнения движения маховиков

$$J_i (\omega_i' + p_i') = -U_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (1.2)$$

Здесь U_i — моменты двигателей, приводящих маховики во вращение. Пусть

$$A_i = C_i - J_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Из уравнения (1.1), (1.2) находим

$$A_1 p_1' = U_1 + (C_2 p_2 + H_2) p_3 - (C_3 p_3 + H_3) p_2 \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (1.3)$$

Уравнения (1.3) приняты в основу исследования. Здесь U_i рассматриваются как моменты управления телом.

Обратимся к уравнениям (1.2), (1.3). Введем новые переменные

$$z_i = A_i p_i + J_i (\omega_i + p_i) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.4)$$

Тогда совокупные уравнения примут вид

$$p_1' = A^{-1} (z_2 p_3 - z_3 p_2 + U_1) \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (1.5)$$

$$z_1' = z_2 p_3 - z_3 p_2 \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (1.6)$$

Уравнения (1.6) допускают первый интеграл

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = C, \quad C = \text{const} \quad (1.7)$$

Отсюда следует, что если $z_1(0) + z_2(0) + z_3(0) < \infty$, то функции z_i ($i = 1, 2, 3$) всегда ограничены.

Существование интеграла показывает, что в рассматриваемом случае, вообще говоря, невозможно добиться сведения к нулю одновременно всех переменных p_i, ω_i ($i = 1, 2, 3$). Последнее мыслимо только в сугубо частном случае возникновения движений на подпространстве начальных состояний

$$z_{i0} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.8)$$

Следовательно, система (1.5), (1.6) не стабилизируема по всем переменным p_i, ω_i ($i = 1, 2, 3$). Это свойство не противоречит условиям стабилизируемости системы, приведенным в [10].

Поэтому попытаемся рассмотреть задачу лишь о стабилизации вращения самого твердого тела, каковы бы не были произвольные ограниченные функции z_i ($i = 1, 2, 3$), удовлетворяющие условиям (1.6), (1.7).

Допустим, что необходимо стабилизировать вращения твердого тела около неподвижной точки при помощи маховиков. Возможность стабилизации вытекает из теоремы о моменте количества движения, согласно которой всякое целенаправленное движение маховиков вызывает целенаправленное движение твердого тела.

Каждый маховик приводится во вращение электрическим двигателем, следовательно, управление телом сводится к управлению напряжением, подаваемым на приводные двигатели.

Если $U_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$), то уравнения (1.3) имеют очевидное решение

$$p_1^* = p_2^* = p_3^* = 0 \quad (1.9)$$

которое надлежит стабилизировать.

Относительно решения (1.9) уравнения (1.5) можно трактовать как уравнения возмущенного движения, справедливые при любых ограниченных p_i ($i = 1, 2, 3$).

Примем их за исходные уравнения объекта управления, справедливые при любых z_i ($i = 1, 2, 3$), удовлетворяющих условию (1.6), (1.7).

Будем трактовать уравнения (1.5) как уравнения с переменными коэффициентами. Допустим, что даны следующие соотношения.

а) Уравнения возмущенного движения (1.5) объекта управления.

б) Уравнения (1.5) определяют множество возмущенных движений объекта, возникающих в некоторой окрестности

$$p_{10}^2 + p_{20}^2 + p_{30}^2 \leq A, \quad A = \text{const} > 0 \quad (1.10)$$

состояния (1.9).

в) Оптимизирующий функционал

$$I = \int_0^{\infty} W dt \quad (1.11)$$

в котором W — знакоопределенная положительная функция вида

$$W = \sum_{i=1}^3 (ap_i^2 + U_i^2) \quad (a > 0) \quad (1.12)$$

переменных p_i, U_i ; a — весовая константа.

Назовем допустимыми всякие управления U_i , принадлежащие классу кусочно-непрерывных, при которых $I < \infty$.

Задача. Требуется найти управление

$$U_i = U_i(p, t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.13)$$

при котором удовлетворялись бы уравнения (1.5) (при любых z_i ($i = 1, 2, 3$), удовлетворяющих условиям (1.6), (1.7)), а функционал (1.11) имел бы минимум на всех движениях, возникающих в окрестности (1.10).

2. **Решение задачи.** Для решения поставленной задачи будем пользоваться методом динамического программирования. С этой целью введем обозначения

$$\Psi(p(t), t) = \min_U \int_t^{\infty} W dt, \quad U = \{u_1, u_2, u_3\} \quad (2.1)$$

Составляем уравнение Беллмана. Его можно представить в следующей форме

$$0 = \min_U \left\{ a \sum_{i=1}^3 p_i^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial t} + A_1^{-1}(z_2 p_3 - z_3 p_2) \frac{\partial \Psi}{\partial p_1} + A_2^{-1}(z_3 p_1 - z_1 p_3) \frac{\partial \Psi}{\partial p_2} + \right. \\ \left. + A_3^{-1}(z_1 p_2 - z_2 p_1) \frac{\partial \Psi}{\partial p_3} + \sum_{i=1}^3 \left(U_i + \frac{1}{2} A_i^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial p_i} \right)^2 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 \left(A_i^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial p_i} \right)^2 \right\} \quad (2.2)$$

Отсюда находим оптимальное управление

$$U_i = -\frac{1}{2} A_i^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.3)$$

Ясно, что для решения задачи надлежит прежде найти функцию Ψ , которую назовем производящей функцией. Она должна удовлетворять следующему уравнению:

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial t} = a \sum_{i=1}^3 p_i^2 + A_1^{-1}(z_2 p_3 - z_3 p_2) \frac{\partial \Psi}{\partial p_1} + A_2^{-1}(z_3 p_1 - z_1 p_3) \frac{\partial \Psi}{\partial p_2} + \\ + A_3^{-1}(z_1 p_2 - z_2 p_1) \frac{\partial \Psi}{\partial p_3} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 \left(A_i^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial p_i} \right)^2 \quad (2.4)$$

а также условию

$$\Psi(p(\infty), \infty) = 0 \quad (2.5)$$

Уравнению Беллмана можно удовлетворить, положив

$$\Psi = \rho \sum_{i=1}^3 A_i p_i^2, \quad \rho^2 = a \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.6)$$

Как видно, в данном случае функция Ψ , дающая решение задачи и закон управления, не зависит от t явно.

Следовательно, закон стабилизации определится формулами

$$U_i = -\rho p_i, \quad \rho = \sqrt{a} \quad (2.7)$$

Замкнутая система имеет вид

$$A_1 p_1' = z_2 p_3 - z_3 p_2 - \rho p_1 \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (2.8)$$

3. **Динамика замкнутой системы.** 1°. Асимптотическая устойчивость. Состояние (1.9) — асимптотически устойчиво при любых z_i , удовлетворяющих уравнениям (1.6), (1.7). Действительно, функция Ψ есть знакоопределенная, положительная по p_i ($i = 1, 2, 3$), полная производная которой на траекториях системы (2.8)

$$\Psi' = -W \quad (3.1)$$

Следовательно, удовлетворяются условия второй теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

В силу асимптотической устойчивости состояния (1.9) (при любых z_i ($i=1,2,3$), удовлетворяющих условиям (1.6), (1.7)), условие (2.5) для функции Ψ удовлетворяется и интеграл (2.1) ограничен.

2°. Степень затухания Ψ . Имеем

$$\Psi' = -2a \sum_{i=1}^3 p_i^2 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.2)$$

а) Пусть $A_1 = A_2 = A_3 = A_1$. Тогда имеем интеграл

$$\sum_{i=1}^3 p_i^2 = \sum_{i=1}^3 p_{i0}^2 \exp\left(-\frac{2\sqrt{a}}{A_1} t\right) \quad (3.3)$$

б) В общем случае $A_1 < A_2 < A_3$, поэтому

$$\rho A_1 \sum_{i=1}^3 p_{i0}^2 \exp\left(-\frac{2\sqrt{a}}{A_1} t\right) \leq \Psi \leq \rho A_3 \sum_{i=1}^3 p_{i0}^2 \exp\left(-\frac{2\sqrt{a}}{A_3} t\right) \quad (3.4)$$

Неравенство (3.4) позволяет получить двусторонние оценки скорости затухания для каждой компоненты скорости твердого тела.

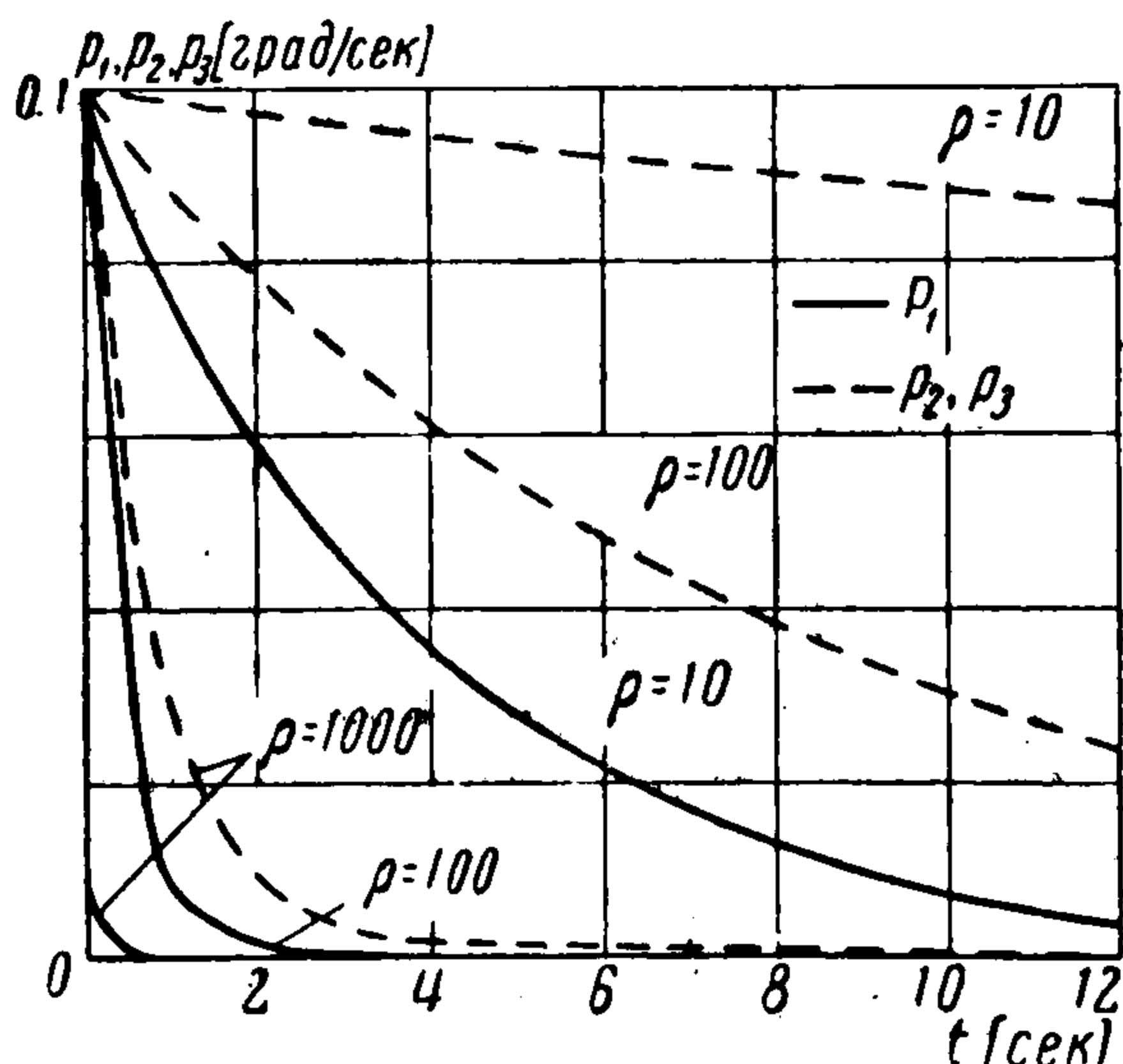
3°. Первый интеграл. Уравнения (1.6) имеют первый интеграл

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \text{const} \quad (3.5)$$

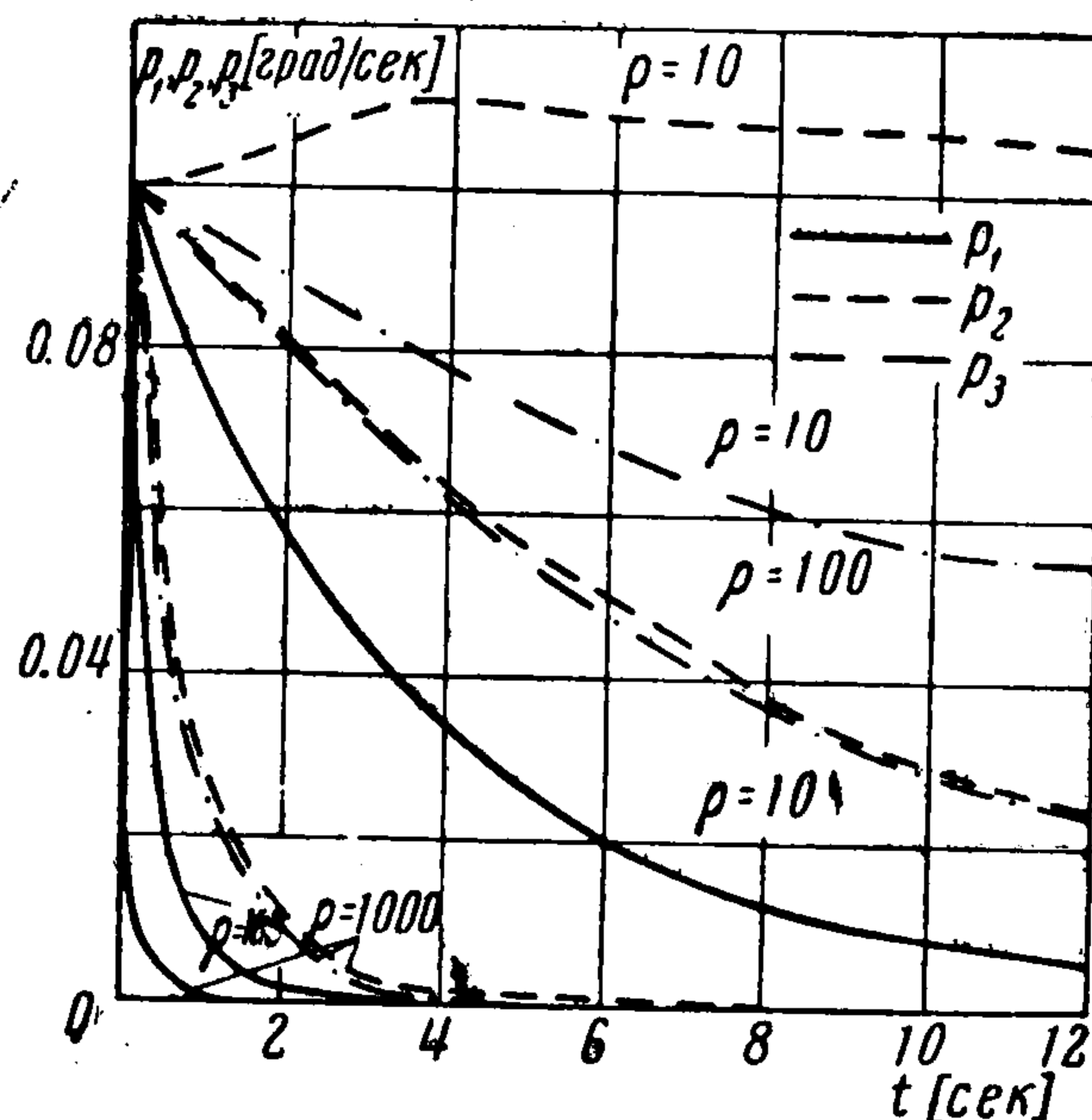
Поскольку $p_i(\infty) = 0$ ($i = 1, 2, 3$), то

$$\left(\sum_{i=1}^3 J_i \omega_i\right)_{\infty} = \text{const} \quad (3.6)$$

Наличие предельного значения интеграла подтверждает заключение о неуправляемости движений маховиков.



Фиг. 2



Фиг. 3

4°. Динамика. Динамика возмущенного движения и, в частности, быстрота его затухания могут быть изучены при интегрировании уравнений (2.8) методом последовательных приближений.

Первое приближение имеет вид

$$p_{i1} = p_{i0} e^{-\lambda_i t}, \quad \omega_{i1} = \omega_{i0} + \frac{\lambda_i + \Phi_i}{\lambda_i} p_{i0} (1 - e^{-\lambda_i t}) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.7)$$

Все последующие приближения решений находятся по формулам

$$p_{ij}^* = -\lambda_i p_{ij} + f_{i,j-1}(t), \quad \omega_{ij}^* = (\lambda_i + \Phi_i) p_{ij} - f_{ij-1}(t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.8)$$

Здесь

$$\lambda_i = \frac{\rho}{A_i}, \quad \Phi_i = \frac{\rho}{J_i}, \quad f_{1,j-1}(t) = \underbrace{(J_2 - J_3)}_{(1 \ 2 \ 3)} p_{2,j-1} p_{3,j-1} + J_2 \omega_{2,j-1} p_{3,j-1} - J_3 \omega_{3,j-1} p_{2,j-1} \quad (3.9)$$

Сходимость приближений может быть обоснована. В ряде конкретных случаев можно ограничиться двумя первыми приближениями.

Для числовых значений [11]

$$\begin{aligned} A_1 &= 40 \text{ кгм сек}^2, J_1 = 0.4 \text{ кгм сек}^2, \omega_{i0} = 0 \\ A_2 &= A_3 = 850 \text{ кгм сек}^2, J_2 = J_3 = 8.5 \text{ кгм сек}^2, p_{i0} = 0.1 \text{ град / сек} \\ &(i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

переходные процессы, построенные при разных значениях ρ , изображены на фиг. 2,3. Все приближения удовлетворяют условию

$$p_i(\infty) = 0$$

Отметим, что при вычислении множителей $\lambda_i + \varphi_i$ ($i = 1, 2, 3$) величины λ_i ($i = 1, 2, 3$) во внимание не принимались как величины второго порядка малости.

4. Изодромный регулятор. В прикладном отношении важно рассмотреть случай, когда твердое тело подвержено действию постоянного возмущающего момента, компоненты которого по осям $X_1 X_2 X_3$ есть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ соответственно.

Поставим задачу: найти уравнение оптимального регулятора, обладающего изодромным эффектом, т. е. такого, при котором действие возмущающего момента компенсируется лишь отклонением регулирующего органа. Это отклонение определяется по формулам

$$U_i^* = -\varepsilon_i^* \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.1)$$

Следовательно, уравнения движения тела при учете возмущающих моментов будут записываться так же, как и уравнения (1.5), если под U_i подразумевать разности

$$U_i - U_i^* = u_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.2)$$

По отношению к этим уравнениям задача аналитического конструирования формулируется обычным образом, если в функционале (1.11) под U_i подразумевать разности (4.2). Ее решение очевидно и имеет вид

$$u_i = -\rho p_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.3)$$

Как и в [12, 13], закон регулирования является комбинированным, т. е. таким, который содержит сигнал по отклонению и сигнал по нагрузке.

5. Оптимальная стабилизация на конечном интервале времени. Рассмотрим задачу об аналитическом конструировании, оценивая меру стабилизации твердого тела функционалом

$$I(u) = \int_0^T e^{\delta t} W dt + k\omega^2(T), \quad \omega^2(T) = \sum_{i=1}^3 p_i^2(T) \quad (5.1)$$

Здесь k, δ — неотрицательные постоянные. Множитель $e^{\delta t}$ способствует ускорению затухания переходных процессов.

Если теперь за производящую функцию принять

$$\Psi(p(t), t) = \min_U \left(\int_t^T e^{\delta t} W dt + k\omega^2(T) \right) \quad (5.2)$$

придем к следующему уравнению Беллмана

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Psi}{\partial t} = & e^{\delta t} a \sum_{i=1}^3 p_i^2 + A_1^{-1} (z_2 p_3 - z_3 p_2) \frac{\partial \Psi}{\partial p_1} + \\ & + A_2^{-1} (z_3 p_1 - z_1 p_3) \frac{\partial \Psi}{\partial p_2} + A_3^{-1} (z_1 p_2 - z_2 p_1) \frac{\partial \Psi}{\partial p_3} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 \left(A_i^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial p_i} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\Psi(p(T), T) = k\omega^2(T)$$

Укажем один частный случай решения задачи. Допустим, что

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_1$$

Тогда уравнению (5.3) можно удовлетворить, положив

$$\Psi = \rho(t) e^{\delta t} A_1 \sum_{i=1}^3 p_i^2 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.4)$$

Здесь Ψ — гладкая функция, удовлетворяющая уравнению Рикатти

$$\rho' = A_1^{-1} (\rho^2 - a) - \delta \rho \quad (5.5)$$

и принимающая лишь положительные значения, такие, что

$$A_1 e^{\delta T} \rho(T) = k, \quad \rho(T) = k A_1^{-1} e^{-\delta T}$$

Исследуем его решение, положив $t = T - \tau$. Имеем

$$\rho_{2,1} = \frac{1}{2} A_1 \delta \pm \sqrt{(\frac{1}{2} A_1 \delta)^2 + a} \quad (5.6)$$

Уравнение имеет следующее решение:

$$\rho = \frac{\rho_2 (k^* - \rho_1) - \rho_1 (k^* - \rho_2) \exp((\rho_2 - \rho_1) / A_1) \tau}{k^* - \rho_1 - (k^* - \rho_2) \exp((\rho_2 - \rho_1) / A_1) \tau} \quad (5.7)$$

Оно соответствует решению задачи, если постоянные $k > \rho_2$, $T > 0$ таковы, что знаменатель дроби положителен.

Управление U_i определяется по формулам (2.7) и имеет вид

$$U_i = -\rho(t) p_i \quad (5.8)$$

где под $\rho(t)$ следует понимать решение (5.7).

Рассмотрим случай $\delta = 0$. Уравнению (5.3) можно удовлетворить, приняв

$$\Psi = \rho(t) A_1 (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \quad (5.9)$$

Здесь $\rho(t)$ — гладкая функция, удовлетворяющая уравнению Рикатти вида

$$\rho' = A_1^{-1} (\rho^2 - a) \quad (5.10)$$

Решение уравнения (5.10) определяется формулой (5.7), где ρ_2, ρ_1 определяются из условия $\rho^2 - a = 0$, $\rho = \pm \sqrt{a}$. Управление U_i имеет вид (5.8), где под ρ следует понимать решение (5.7), в котором ρ_2, ρ_1 определяются по формуле (5.6).

Поступила 23 IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Боднер В. А. Теория автоматического управления полетом. Изд-во «Наука», 1964.
2. Алексеев К. Б., Бебенин Г. Г. Управление космическим летательным аппаратом. Изд. «Машиностроение», 1964.
3. S a v e t P. H. Attitude Control of Orbiting Satellites at High Eccentricity. ARS Journal, 1962, vol. 32, No. 10.
4. C a n n o n R. H. Some Basic Response Relations for Reaction — Wheel Attitude Control. ARS Journal, 1962, vol. 32, No. 1.
5. Фатхуллин Э. Ф. Аналитическое конструирование регулятора для системы твердого тела. Тр. Ун-та дружбы народов имени Патриса Лумумбы. Теоретическая механика, 1963, т. 1, вып. 1.
6. Летова А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. I—III. Автоматика и телемеханика, 1960, т. 21, № 4—6.
7. Летова А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. IV. Автоматика и телемеханика, 1961, т. 22, № 4.
8. Летова А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. Дальнейшее развитие проблемы. V. Автоматика и телемеханика, 1962, т. 23, № 11.
9. Леви-Чивита Т., Амальди Ч. Курс теоретической механики, т. II, ч. 2. Изд. иностр. лит., 1951.
10. Красовский Н. Н. О стабилизации неустойчивого движения дополнительными силами при неполной обратной связи. ПММ, 1963, т. 25, вып. 4.
11. C o r n e l i u s T. L e o n d e s. Guidance and Control of Aerospace vehicles. Mc Graw Hill Book Company, 1963.
12. Салуквадзе М. Е. Об аналитическом конструировании оптимального регулятора при постоянно действующих возмущениях. Автоматика и телемеханика, 1962, т. 23, № 6.
13. Салуквадзе М. Е. Аналитическое конструирование регуляторов. Постоянно действующие возмущения. Автоматика и телемеханика, 1961, т. 22, № 10.