Здесь полезно обратить внимание на следующее обстоятельство. В работах [1, 2] уравнения малых колебаний получены в прецессионной постановке задачи. В то же время уравнения (3.2) включают в себя уравнения малых колебаний гирогоризонткомпаса и двугироскопической вертикали, и при выводе их не использовано ограничение рамками прецессионной теории. Таким образом, однородные уравнения малых колебаний оси z гирогоризонткомпаса и двугироскопической вертикали, полученные в работах [1, 2] в прецессионной постановке, остаются в силе и за рамками прецессионной теории, коль скоро соблюдены все три условия (1.12).

Поступила 16 XII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
2. Ишлинский А. Ю. Теория двугироскопической вертикали, ПММ, 1957, т. 21, вып. 2.
3. Климов Д. М. Об условиях невозмущаемости гироскопической рамы. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
4. Андреев В. Д. Об одном случае малых колебаний физического маятника с подвижной точкой опоры. ПММ, 1958, т. 22, вып. 6.
5. Ишлинский А. Ю. Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры. ПММ, 1956, т. 20, вып. 3.
6. Андреев В. Д. Об общих уравнениях инерциальной навигации. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.

О ВЫЧИСЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МЕТОДОМ БУБНОВА — ГАЛЕРКИНА И ПРИМЕНЕНИИ ЕГО В ТЕОРИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В. Т. Харин (Москва)

Рассматриваются две возможности для повышения эффективности метода Бубнова — Галеркина в задачах о собственных значениях: ускорение сходимости метода для некоторых задач и способ численного решения характеристического уравнения, удобный для реализации на ЭВМ. Результаты применяются к задаче об устойчивости плоского течения Пуазейля.

1. Рассмотрим в гильбертовом пространстве H уравнение

$$\varphi - \lambda K\varphi = 0 \tag{1.1}$$

с вполне непрерывным в H оператором K, а также сопряженное к (1.1) уравнение

$$\varphi - \lambda K^*\varphi = 0 \tag{1.2}$$

Применим к уравнению (1.1) метод Бубнова — Галеркина, взяв в качестве базисных элементов ортонормированную в H систему $\{u_k\}_1^\infty$. Пусть λ_0 — точное собственное значение уравнения (1.1), являющееся простым полюсом резольвенты этого уравнения, а $\{\lambda_n\}$ — приближенные собственные значения этого же уравнения по методу Бубнова — Галеркина и такие, что $\lambda_n \to \lambda_0$ при $n \to \infty$. Согласно [1], имеем оценку (C — константа)

$$|\lambda_n - \lambda_0| \leqslant C \max\left\{\left\|u_0 - \sum_{k=1}^{n}(u_0, u_k)u_k\right\| \left\|v_0 - \sum_{k=1}^{n}(v_0, u_k)u_k\right\|\right\} \tag{1.3}$$

где максимум берется по всем нормированным собственным элементам u_0 и v_0 уравнений (1.1) и (1.2) соответственно, принадлежащим собственным значениям λ_0 и $\bar{\lambda}_0$ соответственно. Из (1.3) следует, что точность вычисления собственного значения в n-м приближении определяется тем, насколько близки собственные функции к их проекциям на линейную оболочку элементов $u_1, \ldots, u_n$.

Пусть теперь метод Бубнова — Галеркина применяется к нахождению собственных чисел краевой задачи для линейного дифференциального уравнения. Как известно [2], во многих случаях алгебраическая система уравнений метода Бубнова—Галеркина этой задачи эквивалентна системе метода Бубнова—Галеркина для некоторого уравнения вида (1.1) в соответствующим образом выбранном гильбертовом пространстве H; эта эквивалентность существенным образом используется при доказательстве сходимости метода. Неравенство (1.3) показывает, что эту эквивалентность можно использовать и для оценки скорости сходимости собственных чисел. Именно, последняя определяется скоростью сходимости рядов Фурье для собственных функций по базисным функциям в норме пространства H. Как правило, оказывается, что сходимость в H есть сходимость в среднем вместе с производными до некоторого порядка.

Рассмотрим, например, краевую задачу для уравнения

$$(-1)^s \frac{d^{2s}\varphi}{dx^{2s}} - \lambda \sum_{i=0}^{2s-1} q_i(x) \frac{d^i\varphi}{dx^i} = 0 \qquad (1.4)$$

где $q_i(x)$ — достаточно гладкие функции, при граничных условиях

$$\left.\frac{d^j\varphi}{dx^j}\right|_{x=a,\ x=b} = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, s-1) \qquad (1.5)$$

Можно показать [2], что система метода Бубнова — Галеркина для задачи (1.4), (1.5) по базисным функциям $\{u_k(x)\}$, удовлетворяющим условиям (1.5), совпадает с системой метода Бубнова—Галеркина для однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с непрерывным ядром относительно функции $d^s\varphi / dx^s$ по базисным функциям $\{d^s u_k / dx^s\}$. В силу (1.3) желательно подобрать функции $\{u_k\}$ так, чтобы ряд Фурье для $d^s\varphi / dx^s$ по функциям $\{d^s u_k / dx^s\}$ быстро сходился в среднем.

Далеко не всегда такой подбор практически осуществим. В частности, производные решения ведут себя, как правило, значительно сложней, чем сами собственные функции в краевых задачах для уравнений с малым параметром при старшей производной. Весьма трудно, не зная решения, найти такие базисные функции $\{u_k\}$, чтобы ряд Фурье, упомянутый в предыдущем абзаце, быстро сходился. Значительно легче добиться быстрой сходимости в среднем ряда для φ по $\{u_k\}$.

Из сказанного выше следует, что можно ожидать ускорения сходимости приближенных собственных чисел к точным, если применять метод Бубнова—Галеркина в несколько иной форме.

Именно, система Бубнова—Галеркина должна быть эквивалентна системе Бубнова—Галеркина для интегрального уравнения относительно собственной функции, а не ее производных. Этого можно достичь, или предварительно сведя краевую задачу к интегральному уравнению указанного типа, или применяя непосредственно к краевой задаче не классический метод Бубнова—Галеркина, а обобщение этого метода, предложенное Г. И. Петровым [3]. При этом указанное условие эквивалентности приводит к определенному соотношению между двумя базисами метода Бубнова—Галеркина — Петрова. Поясним сказанное на примере задачи (1.4), (1.5). Пусть $g(x, y)$ — функция Грина для оператора $(-1)^s d^{2s}\varphi / dx^{2s}$ при условиях (1.5). Коэффициенты алгебраической системы уравнений метода Бубнова—Галеркина—Петрова по базисам $\{u_k\}$, $\{v_k\}$, удовлетворяющим условиям (1.5), имеют вид

$$\gamma_{jk}(\lambda) = \int_a^b \left[(-1)^s \frac{d^{2s}u_k}{dx^{2s}} - \lambda \sum_{i=1}^{2s-1} q_i(x) \frac{d^i u_k}{dx^i}\right] \bar{v}_j dx$$

Проведя интегрирование по частям $2s$ раз в сторону понижения порядка производной в первом сомножителе и используя условия (1.5), получим

$$\gamma_{jk}(\lambda) = \int_a^b \left[u_k(x) - \sum_{i=1}^{2s-1} \int_a^b g(x, y)\, q_i(y) \frac{d^i u_k(y)}{dy^i}\, dy\right] (-1)^s \frac{d^{2s} v_j(x)}{dx^{2s}}\, dx$$

Интегралы, стоящие в квадратных скобках, снова преобразуем интегрированием по частям, избавляясь от производных функции $u_k(y)$.

Это можно сделать, используя свойства функции Грина. Если теперь положить

$$v_j(x) = \int_a^b g(x, y)\, u_j(y)\, dy \tag{1.6}$$

то увидим, что $\gamma_{jk}(\lambda)$ суть коэффициенты системы метода Бубнова—Галеркина для интегрального уравнения относительно функции φ с квадратично интегрируемым ядром по базисным функциям $\{u_k(x)\}$. Формула (1.6) дает, таким образом, упомянутое выше соотношение между двумя базисами.

2. При применении метода Бубнова—Галеркина или другого прямого метода к решению задачи о собственных значениях дело сводится, как правило, к нахождению корней полинома, заданного в виде определителя. Если порядок определителя достаточно высок и отсутствуют сколько-нибудь детальные сведения о расположении его корней в комплексной плоскости, то вычисление этих корней сильно осложняется. Основная трудность состоит в вычислении коэффициентов полинома. Ниже предлагается удобный для реализации на ЭВМ способ нахождения этих коэффициентов.

Итак, пусть задан определитель $\Delta(\lambda)$, элементы которого суть функции комплексного параметра λ, которые можно вычислить при любом λ. Пусть известно, что этот определитель есть полином степени n от λ

$$\Delta(\lambda) = p_0 + p_1\lambda + p_2\lambda^2 + \ldots + p_n\lambda^n \tag{2.1}$$

Требуется вычислить коэффициенты этого многочлена p_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Обозначим через λ_j $(j = 0, 1, \ldots, n)$ все решения уравнения $\lambda^{n+1} = 1$, т. е.

$$\lambda_j = \exp\left(i\,\frac{2\pi j}{n+1}\right) \qquad (j = 0, 1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

Очевидно, $\lambda_j = \lambda_1{}^j$. Если обозначить $\Delta_j = \Delta(\lambda_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$, то для нахождения коэффициентов p_k имеем систему уравнений

$$\sum_{k=0}^{n} p_k\lambda_j{}^k = \Delta_j \qquad (j = 0, 1, \ldots, n) \tag{2.3}$$

с матрицей Вандермонда, плохо поддающейся численному обращению. Система (2.3) при произвольном выборе узлов λ_j известна в теории интерполяции [4]. Однако формулы Лагранжа, Ньютона и др. не дают способа вычисления коэффициентов p_k более удобного, чем непосредственное численное решение этой системы.

Покажем, что при выборе узлов по формуле (2.2) система (2.3) точно решается в общем виде при любых n и Δ_j, причем формулы для p_k получаются простыми и удобными для программирования. Умножим j-е уравнение системы (2.3) на λ_1^{-js}, где s — целое число, и сложим получившиеся уравнения по j. Получим

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \sum_{j=0}^{n} \lambda_1{}^{j(k-s)} = \sum_{j=0}^{n} \lambda_1{}^{-js}\Delta_j \tag{2.4}$$

В левой части (2.4) имеем сумму $n + 1$ членов геометрической прогрессии; поэтому, используя (2.2), имеем

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_1{}^{j(k-s)} = (n+1)\,\delta_{ks}$$

где δ_{ks} — символ Кронекера. Теперь из (2.4) следует

$$p_s = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} \lambda_1{}^{-js}\Delta_j = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} \bar{\lambda}_s{}^j\Delta_j \qquad (s = 0, 1, \ldots, n) \tag{2.5}$$

(черта сверху — знак комплексного сопряжения).

При вычислениях по формуле (2.5) следует запастись числами

$$\bar{\lambda}_s = \cos\frac{2\pi s}{n+1} - i\sin\frac{2\pi s}{n+1} \qquad (s = 0, 1, \ldots, n)$$

и использовать их в круговом порядке: для p_1 — подряд, для p_2 — через одно, для p_3 — через два, и так далее.

Нетрудно получить формулу, аналогичную (2.5), если в качестве узлов взять все решения уравнения $\lambda^{n+1} = R^{n+1}$, где $R > 0$. В этом случае будет

$$p_s = \frac{1}{R^s(n+1)} \sum_{j=0}^{n} \overline{\lambda}_s^{\,j} \Delta(R\lambda_j) \qquad (s = 0, 1, \ldots, n) \tag{2.6}$$

где λ_s по-прежнему определяются формулой (2.2).

3. Рассмотрим задачу о линейной устойчивости плоского течения Пуазейля по отношению к плоским возмущениям с функцией тока, симметричной относительно оси канала. Как известно [5], эта задача сводится к задаче о собственных значениях для уравнения

$$\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi - i\alpha R\,[(1 - x^2 - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) + 2\varphi] = 0 \tag{3.1}$$

с граничными условиями

$$\varphi'(0) = \varphi'''(0) = \varphi(1) = \varphi'(1) = 0 \tag{3.2}$$

В последних формулах использованы обозначения: $\varphi(x)$ и α — соответственно комплексная амплитуда и волновое число возмущений, i — мнимая единица, R — число Рейнольдса, $c = c_r + ic_i$ — параметр, характеризующий развитие возмущений со временем. Относительно него ставится задача о собственных значениях. Все величины безразмерны, длины отнесены к полуширине канала, скорости — к максимальной скорости основного потока.

Эта задача уже исследовалась ранее [5-7]. В частности, к ней применялся и метод Бубнова — Галеркина [7] с базисными функциями, рекомендованными в [3]. Небольшой участок нейтральной кривой при этом был с приемлемой точностью рассчитан лишь в 20-м приближении.

Имея целью проверить эффективность результатов п. 2,3 настоящей статьи, применим к задаче (3.1), (3.2) два метода.

1. Метод Бубнова — Галеркина, базисные функции — полиномы четной степени, удовлетворяющие граничным условиям. Для удобства вычисления интегралов запишем эти функции в виде

$$u_k(x) = \frac{p_{2k+2}(x)}{4k+3} - \frac{2(4k+1)\,p_{2k}(x)}{(4k-1)(4k+3)} + \frac{p_{2k-2}(x)}{4k-1} \tag{3.3}$$

где

$$p_{2k}(x) = \frac{1}{2^{2k}(2k)!}\,\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}(x^2-1)^{2k} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3.4}$$

суть полиномы Лежандра. Легко показать, что для сходимости этого метода достаточно полноты системы $\{u''_k\}$ в среднем в классе интегрируемых с квадратом по промежутку (0.1) функций, ортогональных константе. Система (3.3), как нетрудно убедиться, этим свойством обладает.

2. Метод Бубнова—Галеркина с теми же базисными функциями, но примененный к интегральному уравнению для $\varphi(x)$, эквивалентному задаче (3.1), (3.2), или, что то же, метод Бубнова—Галеркина с двумя базисными системами функций $\{u_k(x)\}$ и $\{v_k(x)\}$, первая из которых определяется формулой (3.3), а вторая получается из условия

$$v_k^{IV} = u_k, \quad v_k'(0) = v_k'''(0) = v_k(1) = v_k'(1) = 0$$

Для сходимости метода достаточно полноты функций $\{u_k\}$ в среднем на промежутке (0.1). Это условие выполнено.

Таблица 1

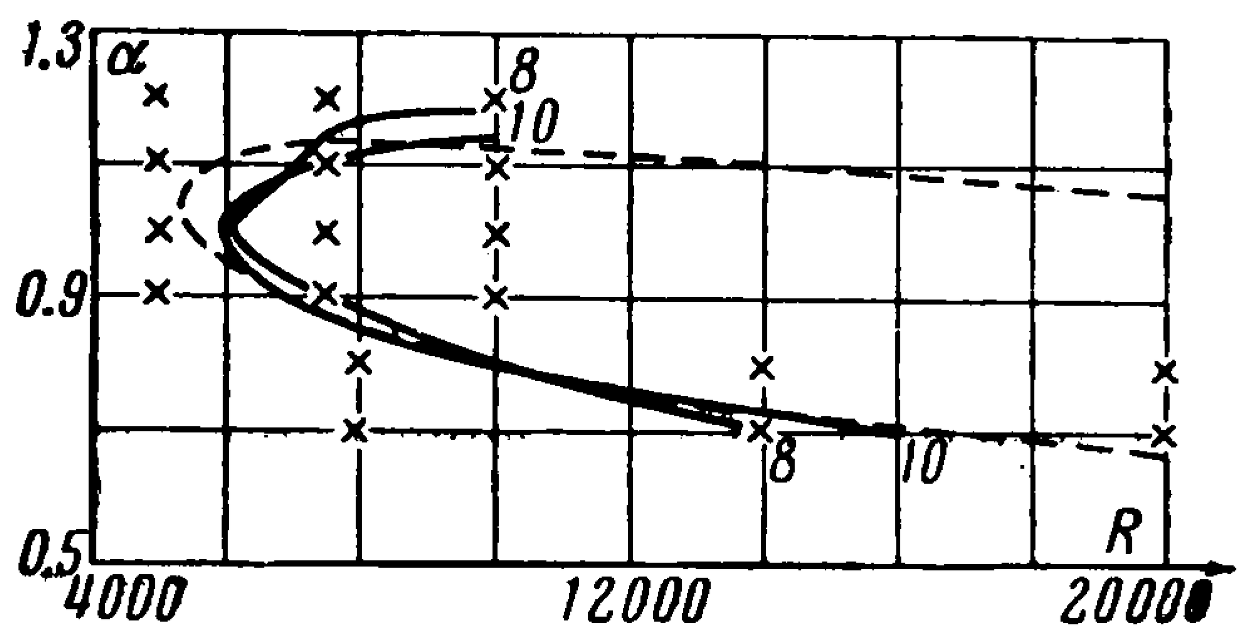
n	c		Δc	
	c_r	c_i	Δc_r	Δc_i
5	0.2837	0.0199	—	—
6	0.2542	0.0295	—0.0295	0.0017
7	0.2386	0.0155	—0.0156	—0.0061
8	0.2341	0.0062	—0.0045	—0.0093
9	0.2383	0.0046	0.0042	—0.0016
10	0.2364	0.0050	—0.0019	0.0004

Таблица 2

α \ R		2500		10 000	
		c_r	c_i	c_r	c_i
0.9	$n=9$	0.2856	—0.0215	0.2270	0.0048
	$n=10$	0.2857	—0.0211	0.2253	0.0050
	T	0.2857	—0.0212	0.2261	0.0040
1.0	$n=9$	0.3011	—0.0145	0.2382	0.0046
	$n=10$	0.3011	—0.0141	0.2365	0.0050
	T	0.3011	—0.0142	0.2375	0.0037
1.1	$n=9$	0.3148	—0.0112	0.2475	0.0001
	$n=10$	0.3148	—0.0106	0.2457	0.0018
	T	0.3148	—0.0108	0.2470	—0.0003

Характеристические определители, полученные этими методами, раскрывались способом, указанным в п. 3 до 10-го приближения включительно. Все корни полученных полиномов вычислялись методом парабол [8] и в случае необходимости уточнялись методом Ньютона. Вычисления проводились на ЭВМ.

В первой серии расчетов находились собственные значения c при $\alpha = 1$, $R = 10\,000$ для сравнения методов *1* и *2*, а также для сравнения результатов с данными Томаса [6]. Метод *1* не привел к какой-либо практически сходящейся последовательности приближенных собственных значений. Метод *2* позволил получить приближенное собственное число с относительной точностью меньше 1% (см. табл. 1). Результаты сравнения с [6] приведены в табл. 2, где значение c по Томасу обозначено буквой T.



Во второй серии расчетов исследовалась зависимость скорости сходимости метода *2* от числа R. При $R = 100$, $\alpha = 1$ до 10-го приближения получаются пять первых собственных чисел с относительной точностью $\approx 0.1\%$, при $R = 1000$, $\alpha = 1$ — три собственных числа.

В результате последней серии расчетов построена нейтральная кривая $c_i(\alpha, R) = 0$ в 8-м и 10-м приближениях по методу *2* (см. фигуру). Вычислялось собственное значение с максимальным c_i в точках плоскости α, R, отмеченных на фигуре. Точки нейтральной кривой получались интерполяцией. Для сравнения на той же фигуре приведена нейтральная кривая Линя [5].

Поступила 5 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайникко Г. М. Асимптотические оценки погрешности проекционных методов в проблеме собственных значений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 3.
2. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. Гостехиздат, 1957.
3. Петров Г. И. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости. ПММ, 1940, т. 4, вып. 3.
4. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Физматгиз, 1959.
5. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. Изд. иностр. лит., 1958.
6. Thomas L. H. The stability of plane Poiseuille flow. Phys. Rev., 1953, vol. 91, p. 780—783.
7. Dolph C. L., Lewis D. C. On the application of infinite sistems of ordinary differential equations to perturbations of plane Poiseuille flow. Quart. Appl. Math., 1958, vol. 16, No. 2.
8. Miller D. E. A method for solving algebraic equations using an automatic computer. Math. Tables and Other Aids. Comput., 1956, vol. 10, No. 56.