К ТЕОРИИ МАЯТНИКОВО-ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕЙ УСЛОВИЯМ М. ШУЛЕРА

В. Д. Андреев (Москва)

Рассматривается механическая система, включающая в себя гироскопы и подвешенная в трехстепенном подвесе на движущемся вблизи поверхности Земли объекте. Центр масс системы не совпадает с центром подвеса. Частными случаями такой механической системы являются схемы гирогоризонткомпаса и двухгироскопической вертикали. Их теория дана в работах А. Ю. Ишлинского [1, 2]. В работе Д. М. Климова [3] получены условия, которым должна удовлетворять маятниково-гироскопическая система, чтобы для произвольного движения объекта существовало положение относительного равновесия, при котором ось z системы, проходящая через центр масс и центр подвеса, совпадала с направлением к центру Земли.

Ниже показывается, что условия Д. М. Климова сохраняют силу при учете несферичности поля тяготения Земли, и рассматривается возмущенное движение маятниково-гироскопической системы, т. е. колебания ее около указанного положения относительного равновесия. Показывается приводимость этого движения к движению физического маятника, рассмотренного в работах [4, 5].

1. Рассмотрим произвольную механическую систему, подвешенную на движущемся объекте в некотором трехстепенном подвесе так, что центр масс системы не совпадает с центром подвеса. Система может включать в себя различные, движущиеся одно по отношению к другому механические устройства, в том числе — гироскопы. Такую механическую систему можно назвать маятниково-гироскопической.

Свяжем с рассматриваемой системой правый ортогональный трехгранник $Oxyz$, начало которого совместим с центром подвеса, а ось z направим вдоль прямой, проходящей через центр масс и центр подвеса, в сторону от центра масс. Обозначим через a расстояние между центром масс C и центром подвеса O. Тогда координаты центра масс

$$x_c = y_c = 0, \qquad z_c = -a \tag{1.1}$$

Найдем условия, при которых ось z системы в положении относительного равновесия будет совпадать с направлением к центру Земли.

Применив к системе в целом в ее движении около центра масс теорему о кинетическом моменте, получим

$$\mathbf{K}^{\cdot} = \mathbf{M} \tag{1.2}$$

Здесь и далее точка означает дифференцирование по времени, $\mathbf{K}$ — суммарный кинетический момент системы, $\mathbf{M}$ — суммарный момент относительно центра подвеса. Суммарный момент $\mathbf{M}$ будет, очевидно, образовываться силами притяжения масс системы Землей и силами инерции переносного движения центра подвеса.

Будем считать действие сил притяжения сводящимся лишь к силе $\mathbf{F}$, приложенной в центре масс тела и совпадающей по направлению с направлением напряженности поля тяготения в точке O. Неоднородностью поля тяготения в объеме системы пренебрегаем. Добавив к моменту силы $\mathbf{F}$ момент сил инерции переносного движения, а также некоторый искусственно сформированный момент $\mathbf{M}^*$, получим из (1.1), (1.2)

$$\mathbf{K}^{\cdot} = \mathbf{a} \times (\mathbf{F} - m\mathbf{r}^{\cdot\cdot}) + \mathbf{M}^* \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки O с началом в центре Земли O_1, через $\mathbf{a}$ обозначен радиус-вектор точки C с началом в точке O. Обозначим трехгранник xyz в положении относительного равновесия через $x_0y_0z_0$. Тогда

$$\mathbf{F} = F_{x_0}\mathbf{x}_0 + F_{y_0}\mathbf{y}_0 + F_{z_0}\mathbf{z}_0, \qquad \mathbf{M}^* = M_{x_0}{}^*\mathbf{x}_0 + M_{y_0}{}^*\mathbf{y}_0 + M_{z_0}{}^*\mathbf{z}_0 \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$ — орты соответствующих осей. Так как в положении относительного равновесия вектор $\mathbf{a}$ коллинеарен $\mathbf{r}$, то из (1.3), (1.4) следует

$$\mathbf{K}^{\cdot} = -\mathbf{a} \times m\mathbf{r}^{\cdot\cdot} + (M_{x_0}{}^* - aF_{y_0})\,\mathbf{x}_0 + (M_{y_0}{}^* + aF_{x_0})\,\mathbf{y}_0 + M_{z_0}{}^*\mathbf{z}_0 \tag{1.5}$$

Пусть
$$M_{y_0}{}^* = -aF_{x_0}, \qquad M_{x_0}{}^* = aF_{y_0}, \qquad M_{z_0}{}^* = 0 \tag{1.6}$$

Тогда равенство (1.5) принимает вид
$$\mathbf{K}^{\cdot} = -\mathbf{a} \times m\mathbf{r}^{\cdot\cdot} = 0 \tag{1.7}$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие
$$a = kr \tag{1.8}$$
т. е. чтобы расстояние между центром масс системы и центром подвеса было пропорционально расстоянию до центра Земли. Для выполнения этого условия при переменном r в систему, разумеется, должна поступать информация о величине r.

Если (1.8) выполняется, то в положении относительного равновесия $\mathbf{a} = -k\mathbf{r}$, $\mathbf{a}^{\cdot} \times \mathbf{r}^{\cdot} = 0$, и поэтому равенство (1.7) может быть записано в виде
$$\mathbf{K}^{\cdot} = km\,(\mathbf{r} \times \mathbf{r}^{\cdot})^{\cdot} \tag{1.9}$$

Теперь его можно проинтегрировать, в результате чего получается
$$\mathbf{K} - m\mathbf{a} \times \mathbf{r}^{\cdot} = \mathbf{b} = \mathrm{const} \tag{1.10}$$

Полагая $\mathbf{b} = 0$, вводя обозначение $\mathbf{v} = \mathbf{r}^{\cdot}$ и проектируя на оси $x_0y_0z_0$, находим
$$K_{x_0} + mav_{y_0} = 0, \qquad K_{y_0} - mav_{x_0} = 0, \qquad K_{z_0} = 0 \tag{1.11}$$

Условия (1.6), (1.8), (1.11) и являются условиями, которым должны удовлетворять параметры системы, чтобы в положении относительного равновесия ось z ее совпадала с направлением к центру Земли. Кроме них, должны быть выполнены, разумеется, начальные условия. Именно, в начальный момент вектор $\mathbf{a}$ должен быть ориентирован вдоль $\mathbf{r}$, а начальная скорость изменения ориентации вектора $\mathbf{a}$ должна быть равна начальной скорости изменения ориентации вектора $\mathbf{r}$ из-за движения объекта.

Условия (1.8), (1.11) получены Д. М. Климовым [3] путем, который лишь формой записи отличается от изложенного. Вывод условий (1.8), (1.11) повторен потому, что в дальнейшем понадобятся промежуточные соотношения, получаемые в ходе этого вывода. Попутно показано, что учет несферичности поля тяготения Земли не меняет условий (1.8), (1.11), а требует лишь дополнения их условиями (1.6).

Из условий (1.6), (1.8), (1.11) получаются как частные случаи условия существования положения относительного равновесия для физического маятника [4, 5], гирогоризонт-компаса [1], двухгироскопической вертикали [2].

2. Получим уравнения малых колебаний рассматриваемой маятниково-гироскопической системы около положения относительного равновесия, которые имеют место, если условия (1.6), (1.8), (1.11) выполнены неточно, либо если неточно выполнены начальные условия. Варьируя уравнение (1.2) в окрестности положения относительного равновесия, имеем
$$\delta\mathbf{K}^{\cdot} = \delta\mathbf{M} \tag{2.1}$$

Кинетический момент $\mathbf{K}$ должен быть сформирован согласно равенству (1.10), в котором нужно положить $\mathbf{b} = 0$, $\mathbf{a} = -k\mathbf{r}$. Поэтому
$$\delta\mathbf{K} = mk\delta\mathbf{r} \times \mathbf{r}^{\cdot} + mk\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}^{\cdot} + \Delta\mathbf{K} \tag{2.2}$$

Здесь $\Delta\mathbf{K}$ — некоторая инструментальная погрешность,
$$\mathbf{r} = r\mathbf{z}_0, \qquad \delta\mathbf{r} = \delta x\mathbf{x}_0 + \delta y\mathbf{y}_0 + \Delta r\mathbf{z}_0 \tag{2.3}$$
где Δr — погрешность внешней информации о величине r.

Чтобы получить $\delta\mathbf{M}$, заметим, что вариация момента определяется вариацией $\delta\mathbf{a}$, вариацией корректирующего момента $\delta\mathbf{M}^*$ и моментом $\Delta\mathbf{M}$ из-за инструментальных погрешностей (например, момент трения в подвесе или момент остаточного дебаланса). Поэтому, приняв во внимание выражение для $\mathbf{M}$, стоящее в правой части уравнения (1.3), находим
$$\delta\mathbf{M} = \delta\mathbf{a} \times (\mathbf{F} - m\mathbf{r}^{\cdot\cdot}) + \delta\mathbf{M}^* + \Delta\mathbf{M} \tag{2.4}$$

В (2.4) величина $\delta\mathbf{a}$ определена равенством
$$\delta\mathbf{a} = -k\delta\mathbf{r} - \Delta a\mathbf{z}_0 \tag{2.5}$$

Первое слагаемое правой части вызвано погрешностью информации о величине r и отклонением оси z системы от направления к центру Земли, второе — инструментальной погрешностью Δa фиксирования величины расстояния a между центром подвеса и центром масс системы. Дифференцируя (2.2) и замечая, что

$$\delta\mathbf{r}^{\cdot} \times \mathbf{r}^{\cdot} + \mathbf{r}^{\cdot} \times \delta\mathbf{r}^{\cdot} = 0 \qquad (2.6)$$

находим

$$\delta\mathbf{K}^{\cdot} = km\delta\mathbf{r} \times \mathbf{r}^{\cdot\cdot} + km\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}^{\cdot\cdot} + \Delta\mathbf{K}^{\cdot} \qquad (2.7)$$

Теперь надо подставить (2.7) и (2.4) в (2.1).

Прежде чем это сделать, удобно несколько упростить выражение (2.4) для вариации момента. Прежде всего, можно пренебречь по малости вариацией $\delta\mathbf{M}^*$ момента $\mathbf{M}^*$, корректирующего действие горизонтальной составляющей поля тяготения. Далее, обратившись к первому равенству (1.4), получим

$$\delta\mathbf{a} \times \mathbf{F} = \delta\mathbf{a} \times (F_{x_0}\mathbf{x}_0 + F_{y_0}\mathbf{y}_0 + F_{z_0}\mathbf{z}_0) \qquad (2.8)$$

Пренебрегая в правой части произведением $\delta\mathbf{a}$ на сумму первого и второго слагаемых в круглых скобках, которое имеет второй порядок малости, и замечая, что с этой же точностью можно положить $F_{z_0} = -\mu m / r^2$, где μ — произведение гравитационной постоянной на массу Земли, находим

$$\delta\mathbf{M} = \delta\mathbf{a} \times (-\mu m r^{-2}\mathbf{z}_0 - m\mathbf{r}^{\cdot\cdot}) + \Delta\mathbf{M} \qquad (2.9)$$

Вводя в (2.9) выражение (2.5) для $\delta\mathbf{a}$, приходим к формуле

$$\delta\mathbf{M} = mk\delta\mathbf{r} \times (\mu r^{-2}\mathbf{z}_0 + \mathbf{r}^{\cdot\cdot}) + m\Delta a\mathbf{z}_0 \times \mathbf{r}^{\cdot\cdot} + \Delta\mathbf{M} \qquad (2.10)$$

Подставим теперь (2.10), (2.7) в (2.1). После приведения подобных и некоторых группировок, в которых используется первое равенство (2.3), получим уравнение

$$km\mathbf{r} \times (\delta\mathbf{r}^{\cdot\cdot} + \mu r^{-3}\delta\mathbf{r}) = -\Delta\mathbf{K}^{\cdot} + \Delta\mathbf{M} + m\Delta a\mathbf{z}_0 \times \mathbf{r}^{\cdot\cdot} \qquad (2.11)$$

Это уравнение и является векторным уравнением малых колебаний около положения относительного равновесия маятниково-гироскопической системы, удовлетворяющей (с некоторыми погрешностями) условиям (1.6), (1.8), (1.11).

3. Чтобы получить скалярные уравнения, надо подставить в (2.11) выражения $\mathbf{r}$ и $\delta\mathbf{r}$ из (2.3) и спроектировать результат на оси x_0, y_0, z_0 с учетом равенств

$$\mathbf{z}_0^{\cdot}\cdot\mathbf{x}_0 = \omega_{y_0}, \quad \mathbf{z}_0^{\cdot\cdot}\cdot\mathbf{x}_0 = \omega_{y_0}^{\cdot} + \omega_{x_0}\omega_{z_0}, \quad \mathbf{z}_0^{\cdot}\cdot\mathbf{y}_0 = -\omega_{x_0}, \quad \mathbf{z}_0^{\cdot\cdot}\cdot\mathbf{y}_0 = -\omega_{x_0}^{\cdot} + \omega_{y_0}\omega_{z_0} \qquad (3.1)$$

в которых через $\omega_{x_0}, \omega_{y_0}, \omega_{z_0}$ обозначены проекции абсолютной угловой скорости трехгранника $x_0y_0z_0$ на его оси. Выполнив указанную подстановку и проектирование, после очевидных группировок и упрощений придем к уравнениям

$$\begin{gathered}
\delta x^{\cdot\cdot} + (\mu r^{-3} - \omega_{y_0}^2 - \omega_{z_0}^2)\,\delta x + (\omega_{x_0}\omega_{y_0} - \omega_{z_0}^{\cdot})\,\delta y - 2\omega_{z_0}\delta y^{\cdot} = -\Delta r\,(\omega_{x_0}\omega_{z_0} + \omega_{y_0}^{\cdot}) - \\
- 2\omega_{y_0}\Delta r^{\cdot} + (ma)^{-1}(-\Delta K_{y_0}^{\cdot} - \omega_{z_0}\Delta K_{x_0} + \omega_{x_0}\Delta K_{z_0}) + (ma)^{-1}\Delta M_{y_0} + \\
+ a^{-1}\Delta a\,[r\,(\omega_{y_0}^{\cdot} + \omega_{x_0}\omega_{z_0}) + 2r^{\cdot}\omega_{y_0}]
\end{gathered} \qquad (3.2)$$

$$\begin{gathered}
\delta y^{\cdot\cdot} + (\mu r^{-3} - \omega_{x_0}^2 - \omega_{z_0}^2)\,\delta y + (\omega_{x_0}\omega_{y_0} + \omega_{z_0}^{\cdot})\,\delta x + 2\omega_{z_0}\delta x^{\cdot} = -\Delta r\,(\omega_{y_0}\omega_{z_0} - \omega_{x_0}^{\cdot}) + \\
+ 2\omega_{x_0}\Delta r^{\cdot} + (ma)^{-1}(\Delta K_{x_0}^{\cdot} + \omega_{y_0}\Delta K_{z_0} - \omega_{z_0}\Delta K_{y_0}) - (ma)^{-1}\Delta M_{x_0} - \\
- a^{-1}\Delta a\,[r\,(\omega_{x_0}^{\cdot} - \omega_{y_0}\omega_{z_0}) + 2r^{\cdot}\omega_{x_0}]
\end{gathered}$$

$$\Delta K_{z_0}^{\cdot} + \omega_{x_0}\Delta K_{y_0} - \omega_{y_0}\Delta K_{x_0} = \Delta M_{z_0}$$

Обозначим через α и β углы малых отклонений оси z системы от направления к центру Земли в плоскостях z_0x_0 и z_0y_0; очевидно, $\alpha = r^{-1}\delta x$, $\beta = -r^{-1}\delta y$. Поэтому уравнения (3.2) являются уравнениями малых колебаний оси z системы около направления к центру Земли. Однородная система первых двух уравнений (3.2) совпадает с уравнениями малых колебаний маятника М. Шулера [4] и с первой группой уравнений ошибок инерциальной системы с двумя ньютонометрами [6]. К ней приводятся также уравнения малых колебаний двугироскопической вертикали и гирогоризонт-компаса, полученные в [1, 2].

Здесь полезно обратить внимание на следующее обстоятельство. В работах [1, 2] уравнения малых колебаний получены в прецессионной постановке задачи. В то же время уравнения (3.2) включают в себя уравнения малых колебаний гирогоризонткомпаса и двугироскопической вертикали, и при выводе их не использовано ограничение рамками прецессионной теории. Таким образом, однородные уравнения малых колебаний оси z гирогоризонткомпаса и двугироскопической вертикали, полученные в работах [1, 2] в прецессионной постановке, остаются в силе и за рамками прецессионной теории, коль скоро соблюдены все три условия (1.12).

Поступила 16 XII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
2. Ишлинский А. Ю. Теория двугироскопической вертикали, ПММ, 1957, т. 21, вып. 2.
3. Климов Д. М. Об условиях невозмущаемости гироскопической рамы. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
4. Андреев В. Д. Об одном случае малых колебаний физического маятника с подвижной точкой опоры. ПММ, 1958, т. 22, вып. 6.
5. Ишлинский А. Ю. Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры. ПММ, 1956, т. 20, вып. 3.
6. Андреев В. Д. Об общих уравнениях инерциальной навигации. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.

О ВЫЧИСЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МЕТОДОМ БУБНОВА — ГАЛЕРКИНА И ПРИМЕНЕНИИ ЕГО В ТЕОРИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В. Т. Харин (Москва)

Рассматриваются две возможности для повышения эффективности метода Бубнова — Галеркина в задачах о собственных значениях: ускорение сходимости метода для некоторых задач и способ численного решения характеристического уравнения, удобный для реализации на ЭВМ. Результаты применяются к задаче об устойчивости плоского течения Пуазейля.

1. Рассмотрим в гильбертовом пространстве H уравнение

$$\varphi - \lambda K\varphi = 0 \tag{1.1}$$

с вполне непрерывным в H оператором K, а также сопряженное к (1.1) уравнение

$$\varphi - \lambda K^*\varphi = 0 \tag{1.2}$$

Применим к уравнению (1.1) метод Бубнова — Галеркина, взяв в качестве базисных элементов ортонормированную в H систему $\{u_k\}_1^\infty$. Пусть λ_0 — точное собственное значение уравнения (1.1), являющееся простым полюсом резольвенты этого уравнения, а $\{\lambda_n\}$ — приближенные собственные значения этого же уравнения по методу Бубнова — Галеркина и такие, что $\lambda_n \to \lambda_0$ при $n \to \infty$. Согласно [1], имеем оценку (C — константа)

$$|\lambda_n - \lambda_0| \leqslant C \max \left\{ \left\| u_0 - \sum_{k=1}^{n} (u_0, u_k) u_k \right\| \left\| v_0 - \sum_{k=1}^{n} (v_0, u_k) u_k \right\| \right\} \tag{1.3}$$

где максимум берется по всем нормированным собственным элементам u_0 и v_0 уравнений (1.1) и (1.2) соответственно, принадлежащим собственным значениям λ_0 и $\bar{\lambda}_0$ соответственно. Из (1.3) следует, что точность вычисления собственного значения в n-м приближении определяется тем, насколько близки собственные функции к их проекциям на линейную оболочку элементов $u_1, \ldots, u_n$.

Пусть теперь метод Бубнова — Галеркина применяется к нахождению собственных чисел краевой задачи для линейного дифференциального уравнения. Как известно [2], во многих случаях алгебраическая система уравнений метода Бубнова—Галеркина этой