При выводе (6.8) предполагалось, что малая величина ε имеет более высокий порядок, чем g_0. При этом пренебрегается воздействием нецентральности поля тяготения Земли по сравнению с воздействием атмосферы.

Поступила 19 X 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И., Валеев К. Г. О движении спутника в поле тяготения Земли. ПММ, 1964, т. 29, вып. 1.
2. Уорд Дж. А. Расчет и оптимизация траектории. Библиотека сборника «Механика». Изд. иностр. лит., 1963, стр. 92.
3. Эрике К. Космический полет. Т. 1, Физматгиз, 1963.

О ПЕРМАНЕНТНЫХ ОСЯХ ВРАЩЕНИЯ ГИРОСТАТА С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКОЙ

Н. С. Цодокова (Москва)

Перманентные вращения тяжелого твердого тела были открыты Б. К. Млодзеевским [1] и Штауде [2].

Необходимые условия устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела исследованы Граммелем [3]. Достаточные условия устойчивости перманентных вращений как для общего случая, при произвольном распределении масс твердого тела, так и для ряда частных случаев найдены В. В. Румянцевым [4]. Подробное исследование перманентных вращений гиростата, движущегося по инерции, и изучение их устойчивости принадлежит Вольтерра [5]. Геометрическую интерпретацию движения гиростата в этом случае дал впервые Н. Е. Жуковский [6]. Неполным образом вопрос о распределении перманентных осей вращения тяжелого гиростата решен А. Анчевым [7] и В. Н. Дрофой [8]. Необходимые и достаточные условия устойчивости некоторых движений тяжелых гиростатов найдены В. В. Румянцевым [9].

В настоящей работе определяются перманентные оси вращения гиростата, находящегося под действием сил, зависящих только от положения гиростата и допускающих силовую функцию U.

Предполагается, что гиростат S состоит из твердого тела S_1, имеющего закрепленную точку O и связанных с ним не неизменно других тел S_2. Момент количеств движения тел S_2 в их движении относительно тела S_1 считаем постоянным. При помощи второго метода Ляпунова исследуется устойчивость некоторых движений гиростатов.

1. Положение гиростата S с закрепленной точкой O будем определять положением прямоугольных осей $OXYZ$, неизменно связанных с телом S_1 и направленных по главным осям инерции гиростата S для его неподвижной точки, относительно неподвижной в пространстве прямоугольной системы $O\xi\eta\zeta$. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — направляющие косинусы оси ζ относительно подвижных осей X, Y, Z; A, B, C — главные моменты инерции гиростата S для его точки O; p, q, r — проекции на оси XYZ вектора мгновенной угловой скорости тела S_1. Если момент количеств относительного движения $\mathbf{k}$ тел S_2 постоянен, а U — функция только $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, то движение гиростата описывается системой шести уравнений

$$A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr + qk_3 - rk_2 = \frac{\partial U}{\partial \gamma_2}\gamma_3 - \frac{\partial U}{\partial \gamma_3}\gamma_2 \qquad \begin{pmatrix} p, & q, & r \\ A & B & C \\ 1, & 2, & 3 \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3 \qquad (1.2)$$

Здесь k_1, k_2, k_3 — проекции вектора $\mathbf{k}$ на оси XYZ; в скобках указываются буквы и индексы, круговой перестановкой которых получаются невыписанные уравнения.

Уравнения (1.1) и (1.2) допускают три первых интеграла

$$W_1 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2U = \text{const}$$

$$W_2 = (Ap + k_1)\gamma_1 + (Bq + k_2)\gamma_2 + (Cr + k_3)\gamma_3 = \text{const}, \qquad W_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

2. Рассуждая так же, как при движении твердого тела с одной неподвижной точкой [1], увидим, что гиростат может перманентно вращаться с постоянной угловой скоростью ω вокруг постоянной оси ζ. Обозначая направляющие косинусы перманентной оси с осями XYZ через a, b, c, проекции вектора ω ($\omega = \mathrm{const}$) на те же оси можно написать в виде

$$p = \omega a, \qquad q = \omega b, \qquad r = \omega c \tag{2.1}$$

При этом уравнения (1.1) принимают вид

$$\omega^2 (C - B) bc + \omega (bk_3 - ck_2) = \beta_2 c - \beta_3 b \qquad (ABC,\ abc,\ 123)$$

$$\beta_i = \left(\frac{\partial U}{\partial \gamma_i}\right)_{\gamma_i = a, b, c} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2.2}$$

а уравнения (1.2) удовлетворяются тождественно. Система уравнений (2.2) вместе с соотношением

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \tag{2.3}$$

может быть принята для определения величины ω, a, b, c. Умножим уравнения (2.2) на a, b, c соответственно и сложим их. Тождественное равенство нулю полученной суммы означает, что всякая четверка чисел ω, a, b, c, удовлетворяющая любой паре из уравнений (2.2), удовлетворяет и третьему уравнению системы (2.2). Итак, будем рассматривать только два из уравнений (2.2), например — первое и второе, предполагая сначала

$$A \neq B \neq C \tag{2.4}$$

$$\omega^2 - 2D_1\omega + E_1 = 0, \qquad \omega_2 - 2D_2\omega + E_2 = 0 \tag{2.5}$$

$$D_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{bk_3 - ck_2}{(C - B) bc}, \qquad D_2 = \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{ck_1 - ak_3}{(A - C) ac}$$

$$a \neq 0, \qquad b \neq 0, \qquad c \neq 0 \tag{2.6}$$

$$E_1 = (-1)\frac{\beta_2 c - \beta_3 b}{(C - B) bc}, \qquad E_2 = (-1)\frac{\beta_3 a - \beta_1 c}{(A - C) ac} \tag{2.7}$$

Для любой тройки чисел a, b, c имеем два квадратных уравнения относительно ω, эквивалентность этих уравнений возможна только при

$$D_1 \equiv D_2, \qquad E_1 \equiv E_2 \tag{2.8}$$

Однако в предположениях (2.4) соотношения (2.8) не имеют места. Необходимое и достаточное условие совместности уравнений (2.5) состоит в обращении в нуль их результанта

$$(E_2 - E_1)^2 - 4 (D_2 - D_1)(D_1E_2 - E_1D_2) = 0 \tag{2.9}$$

Уравнение (2.9) в переменных a, b, c, имеющее вид

$$\begin{gathered}\{ab\,[\beta_3 (A - B)] + bc\,[(B - C)\beta_1] + ac\,[\beta_2 (C - A)]\}^2 + \{ab\,[k_3 (A - B)] + \\ + bc\,[k_1 (C - B)] + ac\,[k_2 (A - C)]\}\,\{a\,[\beta_2 k_3 - \beta_3 k_2] + b\,[\beta_3 k_1 - \beta_1 k_3] + \\ + c\,[\beta_1 k_2 - k_1 \beta_2]\} = 0\end{gathered} \tag{2.10}$$

определяет геометрическое место перманентных осей гиростата. Если провести сферу единичного радиуса с центром в точке O, то геометрическое место точек пересечения поверхности (2.10) со сферой представится в виде некоторой сферической кривой. Прямая, соединяющая любую точку, лежащую на этой сферической кривой с началом координат, может быть перманентной осью, если угловая скорость ω, определяемая из уравнений (2.5) для этой прямой, действительна. Точки сферической кривой, обладающие этими свойствами, будем называть допускаемыми.

Пусть, например, $U = \mathrm{const}$, тогда геометрическое место парманентных осей — конус второго порядка

$$bc\,[k_1 (C - B)] + ac\,[k_2 (A - C)] + ab\,[k_3 (B - A)] = 0$$

Все точки сферической кривой, или, что то же, все образующие этого конуса — допускаемые, а угловая скорость перманентного вращения найдется из соотношения

$$\omega = -\frac{bk_3 - ck_2}{(C - B) bc} \tag{2.11}$$

Если же

$$U = mg(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) + \frac{3g}{2R}(A\gamma^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2)$$

где (x_0, y_0, z_0) — координаты центра тяжести, R — расстояние от центра притяжения до точки O, то геометрическим местом перманентных осей будет поверхность

$$\begin{aligned} & mg\{ab[z_0(A-B)] + bc[x_0(B-C)] + ac[y_0(C-A)]\}^2 + \\ & + 3gR^{-1}\{ab[k_3(A-B)] + bc[k_1(B-C)] + ac[k_2(C-A)]\}^2 - \\ & - mg\{a[y_0k_3 - z_0k_2] + b[z_0k_1 - x_0k_3] + c[x_0k_2 - y_0k_1]\} \times \\ & \times \{ab[k_3(A-B)] + bc[k_1(B-C)] + ac[k_2(C-A)]\} = 0 \end{aligned}$$

Если $U = \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3$ и, например, $A > B > C$, а $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, $\beta_3 > 0$, то геометрическое место перманентных осей представляет собой поверхность четвертого порядка. Уравнение этой поверхности имеет вид (2.10), где $\beta_1, \beta_2, \beta_3 = \text{const}$.

Пусть $\operatorname{grad} U \neq \lambda\mathbf{k}$. Поверхность (2.10) имеет в качестве образующих: 1) главные оси инерции X, Y, Z; 2) прямую, проведенную из точки $(0, 0, 0)$ в точку $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Точки пересечения этих образующих со сферой обозначим соответственно через X^+, Y^+, Z^+, G^+; диаметрально противоположные им — через X^-, Y^-, Z^-, G^-.

Введем обозначения Θ_i для телесных углов, образованных полуплоскостями, проходящими через указанные точки, а именно:

$$\begin{aligned} &\Theta_1 = \{X^+Y^+X^-, \ X^+G^+X^-\}, && \Theta_2 = \{X^+G^+X^-, \ X^+X^-Z^+\} \\ &\Theta_3 = \{X^+X^-Z^+, \ X^+X^-Y^-\}, && \Theta_4 = \{X^+X^-Y^-, \ X^+X^-G^-\} \\ &\Theta_5 = \{X^+X^-G^-, \ X^+X^-Z^-\}, && \Theta_6 = \{X^+X^-Z^-, \ X^+X^-Y^+\} \end{aligned}$$

Для угловой скорости имеем либо $\omega = D_1 + \sqrt{D_1^2 - E_1}$, либо $\omega = D_1 - \sqrt{D_1^2 - E_1}$. Поэтому точки сферической кривой, лежащие в углах $\Theta_1, \Theta_3, \Theta_5$, допускаемы, если для них $E_1 < 0$; точки сферической кривой, лежащие в углах $\Theta_2, \Theta_4, \Theta_6$, не будут допускаемыми при $D_1 = 0$ и могут быть допускаемыми, если $D_1^2 - E_1 \geqslant 0$.

Поставим теперь следующую задачу: определить, какова угловая скорость вращения гиростата вокруг перманентной оси $l\{a, b, c\}$.

Ось l — перманентная ось тогда и только тогда, когда a, b, c удовлетворяют уравнению (2.10) или, что то же,— одному из четырех соотношений

$$D_1 \pm \sqrt{D_1^2 - E_1} = D_2 \pm \sqrt{D_2^2 - E_2} \qquad (2.12)$$

Если числа a, b, c удовлетворяют только одному из соотношений (2.12) и при этом $D_1^2 - E_1 > 0$, то вокруг оси l действительно может происходить вращение с угловой скоростью ω, равной левой части соответствующего соотношения из (2.12). Легко видеть, что если числа a, b, c удовлетворяют только двум из соотношений (2.12), то либо $D_1 = D_2$ и $E_1 = E_2$, либо $D_1^2 - E_1 = 0$ или $D_2^2 - E_2 = 0$. В первом случае вокруг оси l гиростат может вращаться в разные стороны с разными угловыми скоростями $\omega_1 = D_1 + \sqrt{D_1^2 - E_1}$ и $\omega_2 = D_1 - \sqrt{D_1^2 - E_1}$. Во втором случае угловая скорость вокруг оси l равна ω_1 или соответственно ω_2. Можно показать, что если числа a, b, c удовлетворяют трем из соотношений (2.12), то они удовлетворяют и четвертому. В этом случае вокруг перманентной оси $l\{a, b, c\}$ возможно вращение с угловой скоростью $\omega = D_1$. Можно провести аналогичные рассуждения, отказываясь от предположений (2.4) и (2.6).

3. Исследуем устойчивость перманентных вращений гиростата в предположениях, что U — дважды дифференцируемая функция $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Пусть $l\{a, b, c\}$ — какая-нибудь перманентная ось вращения ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$). Проекции угловой скорости тела S_1 на подвижные оси

$$p_0 = \omega a, \qquad q_0 = \omega b, \qquad r_0 = \omega c \qquad (\omega = \text{const})$$

Обозначим

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \gamma_i}\right)_{\gamma_i = a,b,c} = \beta_i, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_i^2}\right)_{\gamma_i = a,b,c} = \delta_i, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j}\right)_{\gamma_{i,j} = a,b,c} = \varkappa_i \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3 \end{pmatrix} i \neq j$$

Устойчивость перманентных вращений исследуем по отношению к переменным $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Полагая в возмущенном движении

$$p = p_0 + \xi_1, \quad q = q_0 + \xi_2, \quad r = r_0 + \xi_3, \quad \gamma_1 = a + \eta_1, \quad \gamma_2 = b + \eta_2, \quad \gamma_3 = c + \eta_3$$

получаем уравнения возмущенного движения, которые допускают следующие первые интегралы: (3.1)

$$V_1 = A(\xi_1^2 + 2p_0\xi_1) + B(\xi_2^2 + 2q_0\xi_2) + C(\xi_3^2 + 2r_0\xi_3) - 2\beta_1\eta_1 - 2\beta_2\eta_2 - 2\beta_3\eta_3 - \\ - \delta_1\eta_1^2 - \delta_2\eta_2^2 - \delta_3\eta_3^2 - 2\varkappa_1\eta_1\eta_2 - 2\varkappa_2\eta_2\eta_3 - 2\varkappa_3\eta_3\eta_1 + \ldots = \mathrm{const}$$

$$V_2 = A(p_0\eta_1 + \xi_1 a + \xi_1\eta_1) + B(q_0\eta_2 + \xi_2 b + \xi_2\eta_2) + \\ + C(r_0\eta_3 + \xi_3 c + \xi_3\eta_3) + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3 = \mathrm{const}$$

$$V_3 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + 2(a\eta_1 + b\eta_2 + c\eta_3) = 0 \qquad (3.2)$$

Построим функцию Ляпунова в виде [9]

$$V = V_1 - 2\omega V_2 + \lambda V_3 + {}^1/_4\nu V_3^2 \qquad (3.3)$$

где, в силу уравнений (2.2),

$$\lambda = A\omega^2 = \frac{\beta_1 + \omega k_1}{a} = B\omega^2 + \frac{\beta_2 + \omega k_2}{b} = C\omega^2 + \frac{\beta_3 + \omega k_3}{c} \qquad (3.4)$$

$$V = A\xi_1^2 + B\xi_2^2 + C\xi_3^2 - 2\omega A\xi_1\eta_1 - 2\omega B\xi_2\eta_2 - 2\omega C\xi_3\eta_3 + \mu_1\eta_1^2 + \mu_2\eta_2^2 + \mu_3\eta_3^2 - \\ - 2\varkappa_1'\eta_1\eta_2 - 2\varkappa_2'\eta_2\eta_3 - 2\varkappa_3'\eta_1\eta_3 + \ldots \qquad (3.5)$$

Здесь

$$\mu_1 = \lambda - \delta_1 - \nu a^2, \quad \varkappa_1' = -2\varkappa_1 + 2\nu ab \qquad (123,\ abc)$$

Необходимыми и достаточными условиями положительной знакоопределенности функции V, согласно критерию Сильвестра, будут неравенства

$$\mu_1 - \omega^2 A > 0, \ (\mu_1 - \omega^2 A)(\mu_2 - \omega^2 B) - (\varkappa_1')^2 > 0, \ (\mu_1 - \omega^2 A)(\mu_2 - \omega^2 B)(\mu_3 - \omega^2 C) - \\ - (\varkappa_1')^2(\mu_3 - \omega^2 C) - (\varkappa_3')^2(\mu_2 - \omega^2 B) - (\varkappa_2')^2(\mu_1 - \omega^2 A) - 2\varkappa_1'\varkappa_2'\varkappa_3' > 0 \qquad (3.6)$$

Если $U = \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3$ и $\nu = 0$, то условия (3.6) принимают вид

$$\lambda - \omega^2 A > 0, \quad \lambda - \omega^2 B > 0, \quad \lambda - \omega^2 C > 0 \qquad (3.7)$$

полученный ранее в работе [7]. Если же гиростатический момент **k** коллинеарен вектору ω, т. е.

$$\frac{k_1}{a} = \frac{k_2}{b} = \frac{k_3}{c} = m\omega \qquad (3.8)$$

условия устойчивости (3.7) можно записать в виде

$$m + \frac{\beta_1}{a\omega^2} > 0, \qquad m + \frac{\beta_2}{b\omega^2} > 0, \qquad m + \frac{\beta_3}{c\omega^2} > 0 \qquad (3.9)$$

Приношу глубокую благодарность В. В. Румянцеву за ценные советы.

Поступила 5 III 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Млодзеевский Б. К. О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Тр. Отд. физ. наук. Об-ва любителей естествознания, 1894, т. 7.
2. Staude O. Über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einem festen Punkt. J. reine und angew. Math., 1894, B. 113.
3. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применения, т. 1. Изд. иностр. лит., 1952.
4. Румянцев В. В. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
5. Volterra V. Sur la theorie des variations des latitudes. Acta math., 1899, т. 22.
6. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч., т. II, Гостехиздат, 1948.
7. Анчев А. Об устойчивости перманентных вращений тяжелого гиростата. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
8. Дрофа В. Н. О перманентных осях движения тяжелого гиростата около неподвижной точки. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
9. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гиростатов. ПММ, 1961, т. 25, вып. 1.