где $V_1(r)$ — целая функция от r; поэтому

$$\Phi_x = \frac{-A_j x(1+O(r))}{2r^2(h - A_j \ln r - V_1(r))}, \qquad \Phi_y = \frac{-A_j y(1+O(r))}{2r^2(h - A_j \ln r - V_1(r))}$$

где через $O(r)$ обозначены члены, порядок малости которых равен r, интеграл J_j (1.6) будет равен

$$J_j = \lim_{r\to 0} \oint\limits_{(\gamma_j)} \frac{A_j(x\,dy - y\,dx)}{2r^2(h - A_j \ln r - V_1(r))} = \lim_{r\to 0} \frac{\pi A_j}{h - A_j \ln r - V_1(r)} = 0 \tag{3.3}$$

Следовательно, в силу (1.5) и (3.3), обобщенная формула Уиттекера имеет вид

$$\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(\sigma)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \ln\{h - V(x, y)\}\, dx\, dy = -2 \tag{3.4}$$

т. е. в случае поля, образованного логарифмическими потенциалами, рассматриваемый интеграл сохраняет постоянное значение и не зависит от числа k притягивающих центров O_j, находящихся внутри замкнутой орбиты c.

Поступила 25 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Whittaker E. T. On periodic orbits. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1902, vol. 62, p. 186—196.
2. Royth E. J. On Laplace's Three Particles. with a Supplement on the Stability of Steady Motion. Proc. London Math. Soc., 1875, vol. 6, p. 86—87.
3. Ляпунов А. М. Собр. соч., т. 1. Изд-во АН СССР, 1954, стр. 378.
4. Беленький И. М. Введение в аналитическую механику. Изд-во «Высшая школа», 1964, стр. 78—80.
5. Брауэр Д. и Клеменс Дж. Методы небесной механики. Изд-во «Мир», 1964, стр. 115.
6. Белецкий В. В. Орбита экваториального спутника Земли. Сб. «Искусственные спутники Земли», Изд-во АН СССР, 1962, вып. 13.
7. Зоммерфельд А. Строение атома и спектры, т. 1. Гостехиздат, 1956, стр. 318.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА ЗЕМЛИ С УЧЕТОМ СОПРОТИВЛЕНИЯ АТМОСФЕРЫ

К. Г. Валеев (Ленинград)

В работе [1] были выведены уравнения движения спутника. Эти уравнения использовались для изучения влияния нецентральности поля сил тяготения Земли. Здесь выводятся уравнения движения спутника с учетом сопротивления атмосферы. Как указано в [2] (стр. 92), для многих методов вычисления траекторий спутника трудно учесть влияние атмосферы.

1. В работе используются обозначения, принятые в [1]. В центре Земли расположено начало неподвижной системы координат Ox, y, z с координатными ортами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$. Ось z направлена к северному полюсу. Положение точки $M(x, y, z)$ определяется при помощи сферических координат r, ϑ, λ

$$x = r\sin\vartheta\cos\lambda, \qquad y = r\sin\vartheta\sin\lambda, \qquad z = r\cos\vartheta \tag{1.1}$$

Координатный триедр сферической системы координат обозначен через $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\lambda$. Точка с единичной массой (спутник) движется под действием сил тяготения и сопротивления атмосферы. Потенциальная энергия точки M имеет вид ([2], стр. 75)

$$\Pi(u, \gamma) = -\mu u - \varepsilon u^3(1 - 3\gamma^2) - \ldots \qquad (u = r^{-1},\ \gamma = \cos\vartheta) \tag{1.2}$$

Предполагаем, что атмосфера Земли вращается вокруг оси z с угловой скоростью $\Omega(u, \gamma)$, которая зависит от $u = r^{-1}$, $\gamma = \cos\vartheta$.

Считаем, что сила $\mathbf{F}$ воздействия атмосферы направлена в сторону, противоположную скорости движения спутника относительно атмосферы

$$\mathbf{F} = -\rho(u, \gamma, v)(\mathbf{v} - \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}), \qquad \mathbf{\Omega} = \mathbf{i}_3\Omega \qquad \left(\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) \tag{1.3}$$

Здесь ρ — экспериментальный коэффициент пропорциональности, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки M. При выводах используется орбитальный триедр $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{n}$, где

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{r}r^{-1}, \qquad \mathbf{n} = (\mathbf{r} \times d\mathbf{r}/dt)\,|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}/dt|^{-1}, \qquad \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_r \tag{1.4}$$

2. Преобразуем уравнение движения спутника

$$d^2r/dt^2 = -\operatorname{grad}\Pi - \rho(dr/dt - \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) \tag{2.1}$$

к удобному для вычислений виду. Введем вектор количества движения

$$\mathbf{k} = \mathbf{r} \times d\mathbf{r}/dt, \qquad \mathbf{k} = \mathbf{n}k \tag{2.2}$$

Подставляя в (2.1) вектор $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_\varphi$ и умножая скалярно на $\mathbf{e}_r$, получим

$$d^2r/dt^2 - k^2/r^2 = -\partial\Pi/\partial r - \rho dr/dt \tag{2.3}$$

Введем замену переменных

$$u = r^{-1}, \qquad d\varphi = u^2 dt = r^{-2}dt \tag{2.4}$$

Уравнение (2.3) с учетом (2.4) преобразуется к виду

$$d^2u/d\varphi^2 + (\rho/u^2)du/d\varphi + hu = -\partial\Pi/\partial u \qquad (h = k^2) \tag{2.5}$$

Подставим в (2.2) $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ и умножим векторно на $\mathbf{e}_r$. Получим уравнение

$$d\mathbf{e}_r/dt = r^{-2}k \times \mathbf{e}_r, \qquad d\mathbf{e}_r/d\varphi = \mathbf{k} \times \mathbf{e}_r \tag{2.6}$$

Дифференцируя (2.6) по φ, найдем

$$d^2\mathbf{e}_r/d\varphi^2 + k^2\mathbf{e}_r = d\mathbf{k}/d\varphi \times \mathbf{e}_r \tag{2.7}$$

Из (2.2), (2.1) находим

$$\begin{aligned} d\mathbf{k}/dt = &-\mathbf{r} \times ((\partial\Pi/\partial r)\mathbf{e}_r + 1/r\,(\partial\Pi/\partial\vartheta)\mathbf{e}_\vartheta) - \rho\mathbf{r} \times d\mathbf{r}/dt + \\ &+ \rho\mathbf{r} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) = (-\partial\Pi/\partial\vartheta)\mathbf{e}_\lambda - \rho\mathbf{k} + \rho r^2\Omega\,[\mathbf{i}_3 - \mathbf{e}_r(\mathbf{i}_3\mathbf{e}_r)] \end{aligned} \tag{2.8}$$

Подставим (2.8) в (2.7) с учетом (2.4), получим

$$\frac{d^2\mathbf{e}_r}{d\varphi^2} + k^2\mathbf{e}_r = -\frac{1}{u^2}\frac{\partial\Pi}{\partial\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta - \frac{\rho}{u^2}\frac{d\mathbf{e}_r}{d\varphi} + \frac{\rho\Omega}{u^4}\mathbf{i}_3 \times \mathbf{e}_r \tag{2.9}$$

Умножим (2.9) скалярно на $\mathbf{i}_3$, получим уравнение для γ

$$\frac{d^2\gamma}{d\varphi^2} + \frac{\rho}{u^2}\frac{d\gamma}{d\varphi} + h\gamma = (\gamma^2 - 1)\frac{1}{u^2}\frac{\partial\Pi}{\partial\gamma} \qquad (h = k^2,\ \gamma = \cos\vartheta) \tag{2.10}$$

В уравнения (2.5), (2.10) входит величина h. Найдем для h дифференциальное уравнение, умножая (2.8) скалярно на $2\mathbf{k}$ и учитывая замену (2.4)

$$\frac{dh}{d\varphi} = -\frac{2}{u^2}\frac{\partial\Pi}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{d\varphi} - \frac{2\rho h}{u^2} + \frac{2\rho\Omega}{u^4}\left[h(1-\gamma^2) - \left(\frac{d\gamma}{d\varphi}\right)^2\right]^{1/2} \tag{2.11}$$

При этом используем равенства (2.12)

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\vartheta}\mathbf{e}_\lambda\cdot\mathbf{k} = \frac{\partial\Pi}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{d\vartheta}(\mathbf{i}_3 \times \mathbf{e}_r)\cdot\mathbf{k}\operatorname{cosec}\vartheta = \frac{\partial\Pi}{\partial\gamma}\mathbf{i}_3 \times (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_r) = \frac{\partial\Pi}{\partial\gamma}\mathbf{i}_3\cdot\frac{d\mathbf{e}_r}{d\varphi} = \frac{\partial\Pi}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{d\varphi}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{i}_3\cdot\mathbf{k})^2 &= \mathbf{k}^2 - (\mathbf{i}_3 \times \mathbf{k})^2 = h - \left|\mathbf{i}_3 \times \left(\mathbf{e}_r \times \frac{d\mathbf{e}_r}{d\varphi}\right)\right|^2 = \\ &= h - \left|\mathbf{e}_r\left(\mathbf{i}_3\cdot\frac{d\mathbf{e}_r}{d\varphi}\right)\right|^2 - \left|\frac{d\mathbf{e}_r}{d\varphi}(\mathbf{i}_3\cdot\mathbf{e}_r)\right|^2 = h(1-\gamma^2) - \left(\frac{d\gamma}{d\varphi}\right)^2\end{aligned} \tag{2.13}$$

Система уравнений (2.5), (2.10), (2.11) пятого порядка замкнута. При $\rho = 0$ получим вторую форму уравнений движения [1]. Время t находится из (2.4) квадратурой.

3. Для отыскания угла долготы λ можно использовать уравнение (2.9). Проектируя его на оси x, y, получим дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2\gamma_1}{d\varphi^2}+\frac{\rho}{u^2}\frac{d\gamma_1}{d\varphi}+h\gamma_1=\frac{1}{u^2}\frac{\partial\Pi}{\partial\gamma}\gamma\gamma_1-\frac{\Omega\rho}{u^4}\gamma_2 \qquad (3.1)$$

$$\frac{d^2\gamma_2}{d\varphi^2}+\frac{\rho}{u^2}\frac{d\gamma_2}{d\varphi}+h\gamma_2=\frac{1}{u^2}\frac{\partial\Pi}{\partial\gamma}\gamma\gamma_2+\frac{\Omega\rho}{u^4}\gamma_1$$

для направляющих косинусов γ_1, γ_2, где

$$\gamma_1=\sin\vartheta\cos\lambda, \qquad \gamma_2=\sin\vartheta\sin\lambda,\ \mathbf{e}_r=\gamma_1\mathbf{i}_1+\gamma_2\mathbf{i}_2+\gamma\mathbf{i}_3 \qquad (3.2)$$

Удобнее λ отыскивать из соотношений

$$\operatorname{tg}\lambda=\frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \qquad \frac{d\lambda}{d\varphi}=\left(\frac{d\gamma_2}{d\varphi}\gamma_1-\frac{d\gamma_1}{d\varphi}\gamma_2\right)(\gamma_1^2+\gamma_2^2)^{-1}=$$

$$=\left(\mathbf{e}_r\times\frac{d\mathbf{e}_r}{d\varphi}\right)\mathbf{i}_3(1-\gamma^2)^{-1}=\mathbf{k}\mathbf{i}_3(1-\gamma^2)^{-1}=\left[h(1-\gamma^2)-\left(\frac{d\gamma}{d\varphi}\right)^2\right]^{1/2}(1-\gamma^2)^{-1} \qquad (3.3)$$

Если γ и h являются известными функциями φ, то λ находится квадратурой. Угловая скорость $d\lambda\,/\,d\varphi$, в силу (3.1), сама удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)=\left(\frac{2\gamma}{1-\gamma^2}\frac{d\gamma}{d\varphi}-\frac{\rho}{u^2}\right)\frac{d\lambda}{d\varphi}+\frac{\Omega\rho}{u^4} \qquad (3.4)$$

которое может служить для контроля при вычислениях. Проекция $\mathbf{k}$ на ось z

$$\varkappa=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}_3=\left[h(1-\gamma^2)-\left(\frac{d\gamma}{d\varphi}\right)^2\right]^{1/2}=(1-\gamma^2)\frac{d\lambda}{d\varphi} \qquad (3.5)$$

Из (3.4) находим уравнение для $\varkappa$

$$\frac{d\varkappa}{d\varphi}=-\frac{\rho}{u^2}\varkappa+\frac{\Omega\rho}{u^4}(1-\gamma^2) \qquad (3.6)$$

4. Как указано в [3] (стр. 209), вокруг Земли на большой высоте с запада на восток движется с большой скоростью воздушный поток. Это подтверждает тот факт, что угловая скорость Ω движения атмосферы может на больших высотах существенно отличаться от угловой скорости вращения Земли.

Найдем выражение для Ω через характеристики движения, которые можно определить наблюдениями. Если $\rho=0$, то уравнения (2.5), (2.11) имеют интеграл энергии

$$E=\Pi+{}^1/_2(du\,/\,d\varphi)^2+{}^1/_2hu^2 \qquad (4.1)$$

При $\rho\neq0$ величина E будет переменной. Из (2.5), (2.11), (3.5) находим уравнение для E

$$\frac{dE}{d\varphi}=-\frac{2\rho}{u^2}(E-\Pi)+\frac{\rho\Omega}{u^2}\varkappa \qquad (4.2)$$

Из (3.6) и (4.2) находим Ω

$$\Omega=\left(2E-2\Pi-\varkappa\frac{dE}{d\varkappa}\right)\left(\varkappa+\frac{1-\gamma^2}{u^2}\frac{dE}{d\varkappa}\right)^{-1} \qquad (4.3)$$

Величины E, $\varkappa$ можно найти из наблюдений за движением спутника. Эти величины мало меняются при движении

$$\varkappa=\mathbf{i}_3\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{v}), \qquad E=\Pi+{}^1/_2\mathbf{v}^2, \qquad \mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (4.4)$$

Формула (4.3) существенно упрощается для экваториальных траекторий, близких к круговым, когда $\gamma\equiv0$.

5. Возьмем единичную сферу с центром в начале координат 0, x, y, z.

При движении радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки M зачерчивает на сфере линию, длину которой τ выберем в качестве независимой переменной

$$d\tau=r^{-2}\,|\,\mathbf{r}\times d\mathbf{r}\,|=r^{-2}\,|\,\mathbf{r}\times d\mathbf{r}\,/\,dt\,|\,dt=r^{-2}kdt=(h)^{1/2}d\varphi \qquad (5.1)$$

Переходя в уравнениях (2.5), (2.10), (2.11) к переменной τ и обозначая дифференцирование по τ штрихом, приходим к системе дифференциальных уравнений

$$u'' + u = -\frac{1}{h}\frac{\partial\Pi}{\partial u} + \frac{1}{hu^2}\frac{\partial\Pi}{\partial\gamma}\gamma' u' + \frac{\rho\Omega}{hu^4}(1-\gamma^2-\gamma'^2)^{1/2}u' \tag{5.2}$$

$$\gamma'' + \gamma = -(1-\gamma^2-\gamma'^2)\frac{1}{hu^2}\frac{\partial\Pi}{\partial\gamma} - \frac{\rho\Omega}{hu^4}(1-\gamma^2-\gamma'^2)^{1/2}\gamma' \tag{5.3}$$

$$h' = -\frac{2}{u^2}\frac{\partial\Pi}{\partial\gamma}\gamma' - \frac{2\rho\sqrt{h}}{u^2} + \frac{2\rho\Omega}{u^4}(1-\gamma^2-\gamma'^2)^{1/2} \tag{5.4}$$

Отсюда при $\rho = 0$ вытекает первая форма уравнений движения [1].

Рассмотрим плоскость орбиты, которая содержит векторы $\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r} / dt$. Угол наклона плоскости орбиты к экваториальной плоскости обозначим через i. Из (2.13) имеем

$$\cos i = \mathbf{n}\cdot\mathbf{i}_3 = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}_3 h^{-1/2} = (1-\gamma^2-\gamma'^2)^{1/2} \tag{5.5}$$

Обозначив $l = \cos i$, получим из (5.3) уравнение для l

$$l' = \frac{\gamma'}{hu^2}\frac{\partial\Pi}{\partial\gamma}l + \frac{\rho\Omega}{hu^4}\gamma'^2 \tag{5.6}$$

Уравнения (5.2) — (5.4) особенно удобны для исследования полярных орбит спутника, когда $l = \cos i \approx 0$. Аналогично можно вывести уравнения, которые соответствуют третьей форме уравнений движения спутника [1]. Эти уравнения удобны для исследования траекторий, близких к круговым.

6. В качестве примера использования уравнений (5.2) — (5.4) рассмотрим вопрос устойчивости круговой экваториальной орбиты. Пусть во время движения $\gamma \equiv 0$. Уравнения (5.2) — (5.4) принимают вид

$$u'' + gfh^{-1}u' + u = h^{-1}[\mu + 3\varepsilon u^2 + O(\varepsilon^2)], \qquad h' = 2g[-\sqrt{h} + f] \tag{6.1}$$

$$g = \rho u^{-2}, \qquad f = \Omega u^{-2} \tag{6.2}$$

Отметим, что величина f зависит только от u. Уравнения (6.1) имеют стационарное решение u_0, h_0, которое определяется уравнениями

$$u = h^{-1}[\mu + 3\varepsilon u^2 + O(\varepsilon^2)], \qquad h = f^2 \tag{6.3}$$

Значения функций, вычисленных для порождающего решения u_0, h_0, будем обозначать ноликом снизу. Уравнения в вариациях для (6.1) имеют вид

$$\delta u'' + g_0 f_0 h_0^{-1}\delta u' + (1+O(\varepsilon))\delta u = -(\mu h_0^{-2} + O(\varepsilon))\delta h$$

$$\delta h' = -g_0 h_0^{-1/2}\delta h + 2g_0\frac{df_0}{du_0}\delta u \tag{6.4}$$

Характеристическое уравнение для системы (6.4)

$$[p^2 + g_0 f_0 h_0^{-1} p + 1 + O(\varepsilon)](p + g_0 h_0^{-1/2}) = -2g_0\frac{df_0}{du_0}(\mu h_0^{-2} + O(\varepsilon)) \tag{6.5}$$

имеет корни p_1, p_2, p_3, для которых имеем выражения

$$p_1 = -g_0 h_0^{-1/2} - 2g_0 h_0^{-2}\frac{df_0}{du_0}\mu + O(g^2+\varepsilon) \tag{6.6}$$

$$\operatorname{Re} p_{2,3} = -0.5 g_0 h_0^{-1/2} + g_0 h_0^{-2}\frac{df_0}{du}\mu + O(g^2+\varepsilon)$$

Из (6.6) находим условие устойчивости круговой орбиты

$$\left|\frac{df_0}{du_0}u_0 f_0^{-1}\right| < 0.5 + O(\varepsilon g_0^{-1} + g_0) \tag{6.7}$$

Неравенство (6.7) с учетом (6.2), (2.4) принимает вид

$$\left|\frac{d\ln\Omega_0}{d\ln r_0} + 2\right| < 0.5 + O(\varepsilon g_0^{-1} + g_0) \tag{6.8}$$

Пусть атмосфера вращается вокруг Земли с постоянной угловой скоростью Ω. Стационарное решение системы (6.1) соответствует круговой орбите спутника, который покоится относительно атмосферы. Это движение будет неустойчивым из-за воздействия атмосферы, так как (6.8) не выполнено.

При выводе (6.8) предполагалось, что малая величина ε имеет более высокий порядок, чем g_0. При этом пренебрегается воздействием нецентральности поля тяготения Земли по сравнению с воздействием атмосферы.

Поступила 19 X 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И., Валеев К. Г. О движении спутника в поле тяготения Земли. ПММ, 1964, т. 29, вып. 1.
2. Уорд Дж. А. Расчет и оптимизация траектории. Библиотека сборника «Механика». Изд. иностр. лит., 1963, стр. 92.
3. Эрике К. Космический полет. Т. 1, Физматгиз, 1963.

О ПЕРМАНЕНТНЫХ ОСЯХ ВРАЩЕНИЯ ГИРОСТАТА С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКОЙ

Н. С. Цодокова (Москва)

Перманентные вращения тяжелого твердого тела были открыты Б. К. Млодзеевским [1] и Штауде [2].

Необходимые условия устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела исследованы Граммелем [3]. Достаточные условия устойчивости перманентных вращений как для общего случая, при произвольном распределении масс твердого тела, так и для ряда частных случаев найдены В. В. Румянцевым [4]. Подробное исследование перманентных вращений гиростата, движущегося по инерции, и изучение их устойчивости принадлежит Вольтерра [5]. Геометрическую интерпретацию движения гиростата в этом случае дал впервые Н. Е. Жуковский [6]. Неполным образом вопрос о распределении перманентных осей вращения тяжелого гиростата решен А. Анчевым [7] и В. Н. Дрофой [8]. Необходимые и достаточные условия устойчивости некоторых движений тяжелых гиростатов найдены В. В. Румянцевым [9].

В настоящей работе определяются перманентные оси вращения гиростата, находящегося под действием сил, зависящих только от положения гиростата и допускающих силовую функцию U.

Предполагается, что гиростат S состоит из твердого тела S_1, имеющего закрепленную точку O и связанных с ним не неизменно других тел S_2. Момент количеств движения тел S_2 в их движении относительно тела S_1 считаем постоянным. При помощи второго метода Ляпунова исследуется устойчивость некоторых движений гиростатов.

1. Положение гиростата S с закрепленной точкой O будем определять положением прямоугольных осей $OXYZ$, неизменно связанных с телом S_1 и направленных по главным осям инерции гиростата S для его неподвижной точки, относительно неподвижной в пространстве прямоугольной системы $O\xi\eta\zeta$. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — направляющие косинусы оси ζ относительно подвижных осей X, Y, Z; A, B, C — главные моменты инерции гиростата S для его точки O; p, q, r — проекции на оси XYZ вектора мгновенной угловой скорости тела S_1. Если момент количеств относительного движения $\mathbf{k}$ тел S_2 постоянен, а U — функция только $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, то движение гиростата описывается системой шести уравнений

$$A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr + qk_3 - rk_2 = \frac{\partial U}{\partial \gamma_2}\gamma_3 - \frac{\partial U}{\partial \gamma_3}\gamma_2 \qquad \begin{pmatrix} p, & q, & r \\ A & B & C \\ 1, & 2, & 3 \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3 \qquad (1.2)$$

Здесь k_1, k_2, k_3 — проекции вектора $\mathbf{k}$ на оси XYZ; в скобках указываются буквы и индексы, круговой перестановкой которых получаются невыписанные уравнения.

Уравнения (1.1) и (1.2) допускают три первых интеграла

$$W_1 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2U = \text{const}$$

$$W_2 = (Ap + k_1)\gamma_1 + (Bq + k_2)\gamma_2 + (Cr + k_3)\gamma_3 = \text{const}, \qquad W_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$