ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ УИТТЕКЕРА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ НА СЛУЧАЙ ПОЛЕЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗАКОНОМ ПРИТЯЖЕНИЯ

И. М. Беленький (Москва)

Для плоских периодических орбит, описываемых материальной точкой под действием ньютонианских центров притяжения, Уиттекер [1] установил предложение, согласно которому некоторый сингулярный интеграл, распространенный по площади, ограниченной замкнутой орбитой, равен уменьшенному на два числу притягивающих центров, находящихся внутри орбиты.

Ниже формула Уиттекера обобщается на более общие силовые поля, когда сила притяжения есть некоторая функция расстояния, а также на силовые поля, когда притяжение каким-либо центром обратно пропорционально n-й степени расстояния. Такие поля, в частности, были рассмотрены Раусом [2] и Ляпуновым [3] при изучении вопросов устойчивости в задаче трех тел.

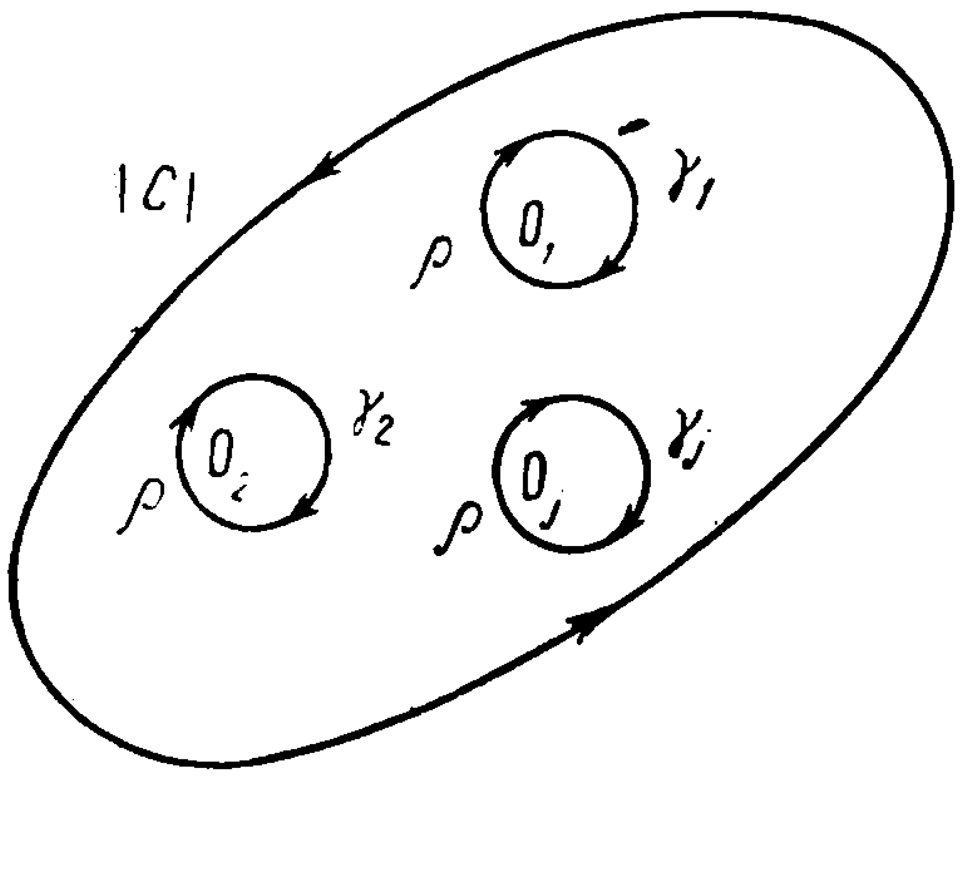
1. Пусть точка $M(x, y)$ единичной массы ($m = 1$), движущаяся в плоском силовом поле, создаваемом s притягивающими центрами, расположенными в точках O_j ($j = 1, 2, \ldots, s$) с потенциалами

$$V_j = -A_j / r_j^n \qquad (A_j > 0) \tag{1.1}$$

совершает периодическое движение, двигаясь по некоторой замкнутой орбите c. Если воспользоваться дифференциальным уравнением траекторий для плоских движений [4] и ввести в рассмотрение угол $\psi(x, y)$, образованный вектором скорости с положительным направлением оси x, то получим

$$d\psi = \frac{\partial\Phi}{\partial y}dx - \frac{\partial\Phi}{\partial x}dy \qquad \left(\Phi = \ln\sqrt{2(h - V(x, y))}\right) \tag{1.2}$$

где h — постоянная энергии, а $V(x, y)$ — потенциал силового поля, образованного всеми притягивающими центрами, находящимися как внутри, так и вне орбиты c.



Из формулы (1.2) следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{(c)} \frac{\partial\Phi}{\partial y}dx - \frac{\partial\Phi}{\partial x}dy = 1 \tag{1.3}$$

Выделим внутри орбиты c малые области, ограниченные окружностями γ_j ($j = 1, 2, \ldots; k$) малого радиуса ρ с центрами в O^j (фигура). В полученной таким образом неодносвязной области σ^*, ограниченной контуром Γ (контур Γ состоит из контура c и контуров γ_j, проходимых таким образом, чтобы область σ^* оставалась слева), функция

$$\Phi(x, y) = \ln\sqrt{2(h - V(x, y))}$$

будет непрерывной с дважды непрерывной производной, и, следовательно, в силу теоремы Грина получаем

$$\oint_{(c)} \frac{\partial\Phi}{\partial y}dx - \frac{\partial\Phi}{\partial x}dy - \oint_{(\gamma_1)} - \oint_{(\gamma_2)} - \ldots - \oint_{(\gamma_k)} = -\iint_{(\sigma^*)} \Delta\Phi(x, y)\,dx\,dy \tag{1.4}$$

Уменьшая радиусы окружности γ_j, окружающие притягивающие центры O_j, и переходя к пределу при $\rho \to 0$, справа в формуле (1.4) получим интеграл, распространенный по всей площади σ, ограниченной контуром c, и, следовательно, в силу (1.3) будем иметь

$$2\pi - \sum_{j=1}^{k} J_j = -\iint_{(\sigma)} \Delta\Phi(x, y)\,dx\,dy \tag{1.5}$$

где k — число притягивающих центров, находящихся внутри орбиты, а

$$J_j = \lim_{\rho\to 0} \oint_{(\gamma_j)} \frac{\partial\Phi}{\partial y}dx - \frac{\partial\Phi}{\partial x}dy \tag{1.6}$$

Напишем разложение потенциала V в окрестности особой точки O_j, принятой за начало координат

$$V(r) = -A_j / r^n + V_1(r) \qquad (A_j > 0)$$

Здесь $V_1(r)$ — целая функция от r. Пользуясь выражением для функции $\Phi(x, y)$, нетрудно получить разложения

$$\Phi_x = \frac{-nA_j x\,(1 + O(r^{n+1}))}{2r^{n+2}\,(h + A_j / r^n - V_1(r))} = -\frac{nx}{2r^2} + \ldots$$

$$\Phi_y = \frac{-nA_j y\,(1 + O(r^{n+1}))}{2r^{n+2}\,(h + A_j / r^n - V_1(r))} = -\frac{ny}{2r^2} + \ldots$$

где через $O(r^{n+1})$ обозначены члены, порядок малости которых r^{n+1}. Пользуясь этими разложениями, получим

$$J_j = \lim_{r\to 0} \frac{n}{2r^2} \oint_{(\gamma_j)} (x\,dy - y\,dx) = \pi n \tag{1.7}$$

и, следовательно, в силу (1.5) получим обобщенную формулу Уиттекера

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \ln\{h - V(x, y)\}\, dx\, dy = kn - 2 \tag{1.8}$$

Для ньютонианского поля силы притяжения $n = 1$ и формула (1.8) переходит в формулу Уиттекера. Следует заметить, что формула (1.8) справедлива и в том случае, когда n — число дробное.

2. Нетрудно убедиться, что формула (1.8) сохраняет свою форму и в том случае, когда потенциал V_j притягивающего центра $O_j\,(x_j, y_j)$ имеет более общий вид

$$V_j = \frac{A_j}{r_j}\left(1 + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{A_{jm}}{r_j^{\,m}}\right) \tag{2.1}$$

Такой вид, в частности, будет иметь потенциал для точек, лежащих в экваториальной плоскости сфероида, если в известном [5] разложении потенциала сфероида ограничиться неполным рядом.

Так, например, если рассматривать орбиту экваториального спутника Земли, то потенциал V с точностью до членов первого порядка малости относительно сжатия Земли [6] имеет вид $V = A / r + B / r^3$. Поля вида (2.1) применяют также и в атомной физике, рассматривая движение электрона в поле ядра, при изучении тонкой структуры спектров [7].

Для потенциала $V(x, y)$ силового поля, образованного всеми притягивающими центрами O_j ($j = 1, 2, \ldots, s$) с потенциалами V_j (2.1), разложение в окрестности какой-либо особой точки O_j, принимаемой за начало координат, будет иметь вид

$$V(r) = \sum_{m=1}^{n} \frac{A_m}{r^m} + V_1(r) \tag{2.2}$$

где r — расстояние от точки $M(x, y)$ до притягивающего центра O_j, а $V_1(r)$ — целая функция от r. Поступая аналогично случаю для притягивающих центров с потенциалами V_j (1.1), снова придем к обобщенной формуле Уиттекера (1.8).

3. Рассмотрим поля, образованные логарифмическими потенциалами

$$V_j = A_j \ln r_j \qquad (r_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}) \tag{3.1}$$

Так как для потенциала $V = V_1 + \ldots + V_s$ разложение в окрестности какого-либо притягивающего центра O_j, принимаемого за начало координат, имеет вид

$$V(r) = A_j \ln r + V_1(r) \tag{3.2}$$

где $V_1(r)$ — целая функция от r; поэтому

$$\Phi_x = \frac{-A_j x(1+O(r))}{2r^2(h - A_j \ln r - V_1(r))}, \qquad \Phi_y = \frac{-A_j y(1+O(r))}{2r^2(h - A_j \ln r - V_1(r))}$$

где через $O(r)$ обозначены члены, порядок малости которых равен r, интеграл J_j (1.6) будет равен

$$J_j = \lim_{r\to 0} \oint_{(\gamma_j)} \frac{A_j(x\,dy - y\,dx)}{2r^2(h - A_j \ln r - V_1(r))} = \lim_{r\to 0} \frac{\pi A_j}{h - A_j \ln r - V_1(r)} = 0 \qquad (3.3)$$

Следовательно, в силу (1.5) и (3.3), обобщенная формула Уиттекера имеет вид

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \ln\{h - V(x, y)\}\,dx\,dy = -2 \qquad (3.4)$$

т. е. в случае поля, образованного логарифмическими потенциалами, рассматриваемый интеграл сохраняет постоянное значение и не зависит от числа k притягивающих центров O_j, находящихся внутри замкнутой орбиты c.

Поступила 25 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Whittaker E. T. On periodic orbits. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1902, vol. 62, p. 186—196.
2. Royth E. J. On Laplace's Three Particles. with a Supplement on the Stability of Steady Motion. Proc. London Math. Soc., 1875, vol. 6, p. 86—87.
3. Ляпунов А. М. Собр. соч., т. 1. Изд-во АН СССР, 1954, стр. 378.
4. Беленький И. М. Введение в аналитическую механику. Изд-во «Высшая школа», 1964, стр. 78—80.
5. Брауэр Д. и Клеменс Дж. Методы небесной механики. Изд-во «Мир», 1964, стр. 115.
6. Белецкий В. В. Орбита экваториального спутника Земли. Сб. «Искусственные спутники Земли», Изд-во АН СССР, 1962, вып. 13.
7. Зоммерфельд А. Строение атома и спектры, т. 1. Гостехиздат, 1956, стр. 318.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА ЗЕМЛИ С УЧЕТОМ СОПРОТИВЛЕНИЯ АТМОСФЕРЫ

К. Г. Валеев (Ленинград)

В работе [1] были выведены уравнения движения спутника. Эти уравнения использовались для изучения влияния нецентральности поля сил тяготения Земли. Здесь выводятся уравнения движения спутника с учетом сопротивления атмосферы. Как указано в [2] (стр. 92), для многих методов вычисления траекторий спутника трудно учесть влияние атмосферы.

1. В работе используются обозначения, принятые в [1]. В центре Земли расположено начало неподвижной системы координат Ox, y, z с координатными ортами $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$. Ось z направлена к северному полюсу. Положение точки $M(x, y, z)$ определяется при помощи сферических координат r, ϑ, λ

$$x = r \sin\vartheta \cos\lambda, \qquad y = r\sin\vartheta\sin\lambda, \qquad z = r\cos\vartheta \qquad (1.1)$$

Координатный триедр сферической системы координат обозначен через $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\vartheta$, $\mathbf{e}_\lambda$. Точка с единичной массой (спутник) движется под действием сил тяготения и сопротивления атмосферы. Потенциальная энергия точки M имеет вид ([2], стр. 75)

$$\Pi(u, \gamma) = -\mu u - \varepsilon u^3(1 - 3\gamma^2) - \ldots \qquad (u = r^{-1},\ \gamma = \cos\vartheta) \qquad (1.2)$$

Предполагаем, что атмосфера Земли вращается вокруг оси z с угловой скоростью $\Omega(u, \gamma)$, которая зависит от $u = r^{-1}$, $\gamma = \cos\vartheta$.