# ОБ УЛУЧШЕНИИ ОЦЕНОК РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**А. Г. Пилютик, П. А. Талалаев**
(Москва)

Существует много различных вариантов достаточных критериев устойчивости движения, в основу которых положены оценки решений дифференциальных уравнений, описывающих возмущенное движение исследуемых механических систем. Качество этих оценок существенно зависит от выбора коэффициентов задаваемой квадратичной формы, при помощи которой строится вспомогательная функция для исследования устойчивости движения.

В данной статье проведен сравнительный анализ различных формул оценок и предложены некоторые способы улучшения вспомогательных функций, позволяющих получить достаточно гибкие и точные оценки решений линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

**1.** Рассмотрим систему однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{m=1}^{n} a_{sm}(t)\, x_m \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где $a_{sm}(t)$ — непрерывные, дифференцируемые функции на рассматриваемом конечном отрезке времени $[t_0, T]$. Как известно, предложено много различных вариантов построения оценок решений такой системы дифференциальных уравнений. Попытаемся найти пути улучшения этих оценок.

Для исследования устойчивости системы (1.1) обычно вводится функция

$$V(t, x) = e^{\gamma(t)} A(t, x), \qquad A(t, x) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} A_{sm}(t)\, x_s x_m, \qquad (A_{sm}(t) = A_{ms}(t)) \tag{1.2}$$

Здесь $A(t, x)$ — квадратичная форма переменных $x_1, \ldots, x_n$, построенная при помощи матрицы коэффициентов заданной системы дифференциальных уравнений

$$a(t) = \begin{Vmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{Vmatrix} \tag{1.3}$$

Производная по времени функции (1.2), полученная в силу уравнений (1.1)

$$V^{\cdot}(t, x) = e^{\gamma(t)} B(t, x), \qquad B(t, x) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} B_{sm}(t)\, x_s x_m \qquad (B_{sm}(t) = B_{ms}(t)) \tag{1.4}$$

будет также квадратичной формой тех же переменных $x_1, \ldots, x_n$, причем

$$B_{sm} = B_{ms} = A^{\cdot}_{sm} + \gamma^{\cdot} A_{sm} + \sum_{k=1}^{n} (a_{ks} A_{km} + a_{km} A_{ks}) \qquad (s, m = 1, \ldots, n) \tag{1.5}$$

Подчиним коэффициенты квадратичных форм (1.2), (1.4) условиям

$$A_k(t) > 0 \quad (k = 1, \ldots, n) \qquad (-1)^k B_k(t) > 0 \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.6}$$

$$A_k(t) = \begin{vmatrix} A_{11}(t) & \ldots & A_{1k}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{k1}(t) & \ldots & A_{kk}(t) \end{vmatrix} (k=1,\ldots,n), \qquad B_k(t) = \begin{vmatrix} B_{11}(t) & \ldots & B_{1k}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{k1}(t) & \ldots & B_{kk}(t) \end{vmatrix} (k=1,\ldots,n)$$

Тогда можно утверждать, что введенная вспомогательная функция (1.2) будет знакоопределенной положительной, а ее производная по времени (1.4) — знакоопределенной отрицательной. Тогда, очевидно,

$$V(t, x) \leqslant V(t_0, x_0), \quad \text{или} \quad A(t, x) \leqslant A(t_0, x_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \gamma^{\cdot}(\tau)\, d\tau\right) \tag{1.7}$$

Можно показать справедливость неравенства ([1], стр. 38)

$$\frac{A_n(t)}{M_k(t)} x_k^2 \leqslant A(t, x), \qquad A_n(t) = \begin{vmatrix} A_{11}(t) & \ldots & A_{1n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1}(t) & \ldots & A_{nn}(t) \end{vmatrix} \tag{1.8}$$

Здесь $A_n(t)$ — дискриминант квадратичной формы $A(t, x)$, а $M_k(t)$ — его минор, соответствующий элементу $k$-й строки и $k$-го столбца.

Тогда получим

$$|x_k(t)| \leqslant \left(A(t_0, x_0) \frac{M_k(t)}{A_n(t)}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \gamma^{\cdot}(\tau)\, d\tau\right) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.9}$$

Эта формула представляет одну из возможных оценок сверху модуля частного решения системы (1.1), соответствующего начальным условиям $x_{10}, \ldots, x_{n0}$. Если в неравенстве (1.9) число $A(t_0, x_0)$, определенное (1.2) при $t = t_0$, заменить неменьшим числом

$$A^+(t_0, x_0^*) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} |A_{sm}(t_0)|\, x_{s0}^* x_{m0}^* \tag{1.10}$$

то получим оценку сверху модуля общего решения системы (1.1)

$$|x_k(t)| \leqslant \left(A^+(t_0, x_0^*) \frac{M_k(t)}{A_n(t)}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \gamma^{\cdot}(\tau)\, d\tau\right) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.11}$$

соответствующего любым начальным значениям переменных, ограниченных единственным условием

$$|x_{10}| \leqslant x_{10}^*, \ldots, |x_{n0}| \leqslant x_{n0}^* \tag{1.12}$$

где $x_{k0}^*$ $(k = 1, \ldots, n)$ — некоторые заданные числа.

Кроме формул оценок (1.9) и (1.11), для дальнейшего будут полезны оценки, получаемые на базе регулярного пучка форм.

Пусть в выражении функции (1.2) имеем $\gamma(t) \equiv 0$ и, следовательно,

$$V = A(t, x) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} A_{sm}(t)\, x_s x_m \tag{1.13}$$

Производная по времени от этой формы вычислена в силу дифференциальных уравнений (1.1)

$$A^{\cdot}(t, x) = B^+(t, x) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} B_{sm}^+(t)\, x_s x_m \tag{1.14}$$

причем

$$B_{sm}^+ = B_{ms}^+ = A^{\cdot}_{sm} + \sum_{k=1}^{n} (a_{ks} A_{km} + a_{km} A_{ks}) \qquad (s, m = 1, \ldots, n) \tag{1.15}$$

В предположении положительной определенности формы (1.13) из двух квадратичных форм (1.13) и (1.14) образуем регулярный пучок

$$B^+ - \mu A = \sum_{s=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} (B_{sm} - \mu A_{sm})\, x_s x_m \tag{1.16}$$

Пусть $\mu_1(t), \ldots, \mu_n(t)$ — его характеристические числа, т. е. корни уравнения

$$(-1)^n \begin{vmatrix} B_{11}^+ - \mu A_{11} \ldots B_{1n}^+ - \mu A_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{n1}^+ - \mu A_{n1} \ldots B_{nn}^+ - \mu A_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.17)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\mu_-(t) \leqslant \frac{A^\cdot(t, x)}{A(t, x)} \leqslant \mu_+(t) \qquad (1.18)$$

где

$$\mu_-(t) = \min[\mu_1(t), \ldots, \mu_n(t)], \; \mu_+(t) = \max[\mu_1(t), \ldots, \mu_n(t)] \qquad (1.19)$$

В результате интегрирования неравенства (1.18) по отрезку $[t_0, T]$ на основе соотношений (1.8), (1.10), (1.12) получим оценку общего решения системы (1.1) с начальными значениями, расположенными в параллелепипеде (1.12), в виде

$$x_k(t) \mid \leqslant \left(A^+(t_0, x_0^*) \frac{M_k(t)}{A_n(t)}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \mu_+(\tau)\,d\tau\right) \qquad (k = 1, \ldots, n) \qquad (1.20)$$

Другие варианты оценок (см., например, [1]) получаются либо путем введения вместо форм (1.2), (1.13) форм частного вида

$$v(t, x) = e^{\gamma(t)} \sum_{m=1}^{n} \alpha_m(t) x_m^2, \qquad \alpha(t, x) = \sum_{m=1}^{n} \alpha_m(t) x_m^2 \qquad (1.21)$$

либо являются следствием полученных ранее. Поэтому эти оценки будут, вообще говоря, грубее оценок (1.11), (1.20).

Легко показать, что оценка (1.20) более точная, нежели оценка (1.11). Действительно, поскольку форма (1.13) знакоопределенная, рассматривая время $t$ как параметр, пару квадратичных форм (1.13), (1.14) всегда можно привести к каноническому виду

$$B^+(t, x) = C(t, y) = \sum_{m=1}^{n} \mu_m(t) y_m^2, \qquad A(t, x) = D(t, y) = \sum_{m=1}^{n} y_m^2 \qquad (1.22)$$

Но тогда, очевидно, формы (1.2) и (1.4) примут соответственно вид

$$V(t, x) = e^{\gamma(t)} \sum_{m=1}^{n} y_m^2, \qquad V^\cdot(t, x) = e^{\gamma(t)} \sum_{m=1}^{n} [\mu_m(t) + \gamma^\cdot(t)] y_m^2 \qquad (1.23)$$

Условия знакоопределенности (1.6) дают неравенства

$$\mu_m(t) < -\gamma^\cdot(t) \qquad (m = 1, \ldots, n) \qquad (1.24)$$

из которых следует неравенство

$$\mu_+(t) < -\gamma^\cdot(t) \qquad (1.25)$$

Так как правые части неравенств (1.11), (1.20) отличаются только показателями экспонент, то отсюда следует, что оценка (1.20) точнее оценки (1.11). Поэтому в дальнейшем будем пользоваться только оценкой (1.20).

2. Точность приведенных выше оценок решений системы уравнений (1.1) зависит не только от способа получения этих оценок, но и от квадратичной формы, принимаемой в качестве функции Ляпунова. Чаще всего функцию Ляпунова

$$V(t, x) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} A_{sm}(t) x_s x_m \qquad (A_{sm}(t) = A_{ms}(t)) \qquad (2.1)$$

получают, исходя из известного уравнения в частных производных [2-3]

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(a_{s1}(t) x_1 + \ldots + a_{sn}(t) x_n) = U(t, x) = \sum_{s=1}^{n} u_{ss}(t) x_s^2 \qquad (2.2)$$

Здесь $U(t, x)$ — заданная, отрицательно определенная квадратичная форма.

Рассмотрим некоторые способы выбора коэффициентов формы $U(t, x)$, которые могут быть полезными при решении конкретных задач.

*Первый способ.* Обычно при получении формы (2.1) все коэффициенты заданной квадратичной формы $U(t, x)$ полагаются постоянными и равными $-1$.

Это часто приводит к загрублению получаемых оценок.

*Второй способ.* Представив коэффициенты квадратичной формы (2.1) в виде

$$A_{sm}(t) = A_{ms}(t) = \sum_{k=1}^{n} d_{sm}^{kk}\ t)\, u_{kk}(t) \qquad (s,\ m = 1, \ldots, n) \tag{2.3}$$

где $d_{sm}^{kk}(t)$ $(s, m, k = 1, \ldots, n,\ m \geqslant s)$ — функции, определяемые через коэффициенты исследуемой системы (1.1) (см. [1], гл. II, § 3), будем выбирать коэффициенты $u_{ss}(t)$ заданной квадратичной формы $U(t, x)$ из условия равенства отношений

$$\frac{1}{A_{11}(t)}\left(\frac{dA_{11}}{dt} + u_{11}(t)\right) = \ldots = \frac{1}{A_{nn}(t)}\left(\frac{dA_{nn}}{dt} + u_{nn}(t)\right) = \mu(t) \tag{2.4}$$

Причем из всех возможных значений $\mu(t)$ выбирается минимально возможным, при котором форма (2.1) является положительно определенной.

Подставляя явное выражение коэффициентов (2.3) в уравнение (2.4), получим систему линейных дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{k=1}^{n} d_{ii}^{kk}(t)\frac{du_{kk}}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\left(\mu(t)\, d_{ii}^{kk}(t) - \frac{dd_{ii}^{kk}}{dt}\right)u_{kk} - u_{ii} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.5}$$

Решение системы будем искать по следующему итерационному методу:

$$\mu(t) = \lim_{l\to\infty}\mu^{(l)}(t), \qquad u_{kk}(t) = \lim_{l\to\infty} u_{kk}^{(l)}(t) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{2.6}$$

где $\mu^{(l)}(t)$, ${u^{(l)}}_{kk}(t)$ удовлетворяют системам алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\mu^{(0)}(t)\, d_{ii}^{kk}(t) - \frac{dd_{ii}^{kk}}{dt}\right)u_{kk}^{(0)}(t) - u_{ii}^{(0)}(t) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.7}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\mu^{(l)}(t)\, d_{ii}^{kk}(t) - \frac{dd_{ii}^{kk}}{dt} + d_{ii}^{kk}(t)\frac{du_{kk}^{(l-1)}/dt}{u_{kk}^{(l-1)}(t)}\right)u_{kk}^{(l)}(t) - u_{ii}^{(l)}(t) = 0$$
$$(i = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots) \tag{2.8}$$

решение которых в данном случае сводится к нахождению минимально возможного собственного значения, при котором форма (2.1) была бы положительно определенной, и соответствующего собственного вектора.

На вопросах сходимости итерационного процесса (2.6) останавливаться не будем. Заметим лишь, что количество итераций $m$, необходимых для получения функций $\mu(t)$ и $u_{kk}(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$ с заданной точностью $\varepsilon_\mu$ и $\varepsilon_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, выбирается из условия

$$|\mu^{(m)}(t) - \mu^{(m-1)}(t)| < \varepsilon_\mu \qquad |u_{kk}^{(m)}(t) - u_{kk}^{(m-1)}(t)| < \varepsilon_k \qquad (k = 1, \ldots, n) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant T)$$

Во многих практических задачах достаточно ограничиться нулевым приближением итерационного процесса, что соответствует выбору коэффициентов $A_{ss}(t)$, $u_{ss}(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$ из условий

$$\frac{1}{A_{11}(t)}\left(\frac{d^*A_{11}}{dt} + u_{11}(t)\right) = \ldots = \frac{1}{A_{nn}(t)}\left(\frac{d^*A_{nn}}{dt} + u_{nn}(t)\right) = \mu(t) \tag{2.9}$$

Здесь $d^*A_{ii}/dt$ — производная от $A_{ii}$ по времени, вычисленная в предположении постоянства функций $u_{ss}(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$.

Практическая реализация этого последнего способа может осуществляться как путем нахождения минимально возможного собственного значения системы (2.7) и соответствующего ему собственного вектора на ЭВЦМ, так и путем подбора коэффициентов $u_{ss}$ $(s = 1, \ldots, n)$ в соответствии с (2.9) при помощи логарифмической линейки.

*Третий способ.* Этот способ состоит в подборе таких отрицательных функций $u_{ss}(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$, при которых функция $\mu_+(t)$ (см. (1.19)) была бы минимальна для любого момента времени из рассматриваемого отрезка $[t_0, T]$. Причем $\mu_1(t), \ldots, \mu_n(t)$ являются характеристическими числами пучка форм

$$B(t, x) - \mu(t) A(t, x) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{dA_{sm}}{dt} + \delta_{sm} u_{sm}(t) - \mu(t) A_{sm}(t)\right) x_s x_m \qquad (2.10)$$

($\delta_{sm}$ — символ Кронекера).

Реализация этого способа осуществляется на ЭВЦМ путем предварительного вычисления функций $d_{sm}^{kk}(t)$ $(s, m, k = 1, \ldots, n,\ s \leqslant m)$ и применения метода случайного поиска [4] к выбору переменных функций $u_{ss}(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$.

Если заданную квадратичную форму $U(t, x)$ взять не канонической, а полной знакоопределенной отрицательной, т. е.

$$U(t, x) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} u_{sm}(t) x_s x_m \qquad (2.11)$$

то можно получить еще более гибкие оценки. Однако такое уточнение оценок может оказаться не всегда целесообразным, так как оно связано со значительным увеличением объема вычислительных работ и дополнительными затратами машинного времени.

3. В качестве примера рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t) x_1 + x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t) x_1 + a_{22}(t) x_2 \qquad (3.1)$$

заданную на конечном отрезке [0,2]. Приводим значения коэффициентов этой системы

| $t =$ | 0 | 0.4 | 0.8 | 1.2 | 1.6 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{11} =$ | —4.40 | —4.42 | —4.44 | —4.46 | —4.48 | —4.50 |
| $a_{21} =$ | —131.50 | —131.66 | —131.83 | —131.99 | —132.15 | —132.30 |
| $a_{22} =$ | —6.300 | —6.325 | —6.342 | —6.362 | —6.382 | —6.400 |

Пусть начальные условия лежат в прямоугольнике

$$|x_{10}| \leqslant 0.01, \qquad |x_{20}| \leqslant 0.5 \qquad (3.2)$$

Оценки общего решения системы (3.1) будем строить по формуле (1.20), которая в данном случае принимает вид

$$|x_1(t)| \leqslant X_1(t) = \left(\left[\frac{A_{11}(0)}{10000} + \frac{|A_{12}(0)|}{100} + \frac{A_{22}(0)}{4}\right] \frac{A_{22}(t)}{A_{11}(t) A_{22}(t) - A_{12}^2(t)}\right)^{1/2} \times$$
$$\times \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \mu_+(\tau)\, d\tau\right) \qquad (3.3)$$

$$|x_2(t)| \leqslant X_2(t) = \left(\left[\frac{A_{11}(0)}{10000} + \frac{|A_{12}(0)|}{100} + \frac{A_{22}(0)}{4}\right] \frac{A_{11}(t)}{A_{11}(t) A_{22}(t) - A_{12}^2(t)}\right)^{1/2} \times$$
$$\times \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \mu_+(\tau)\, d\tau\right) \qquad (3.4)$$

Были рассмотрены два варианта коэффициентов

$$u_{11}(t) = -1, \quad u_{22} = -1, \quad u_{11}(t) = -1.421, \quad u_{22}(t) = -0.01 \qquad (3.5)$$

квадратичной формы

$$U(t, x) = u_{11}(t) x_1^2 + u_{22}(t) x_2^2 \qquad (3.6)$$

Здесь второй вариант коэффициентов $u_{ii}(t)$ получен по второму способу в варианте (2.9).

Приводим числовые значения функций $\mu_+(t)$ и $X_1(t)$, $X_2(t)$, представляющих оценки общего решения системы (3.1) с начальными условиями, лежащими в прямоугольнике (3.2), для двух вариантов коэффициентов:

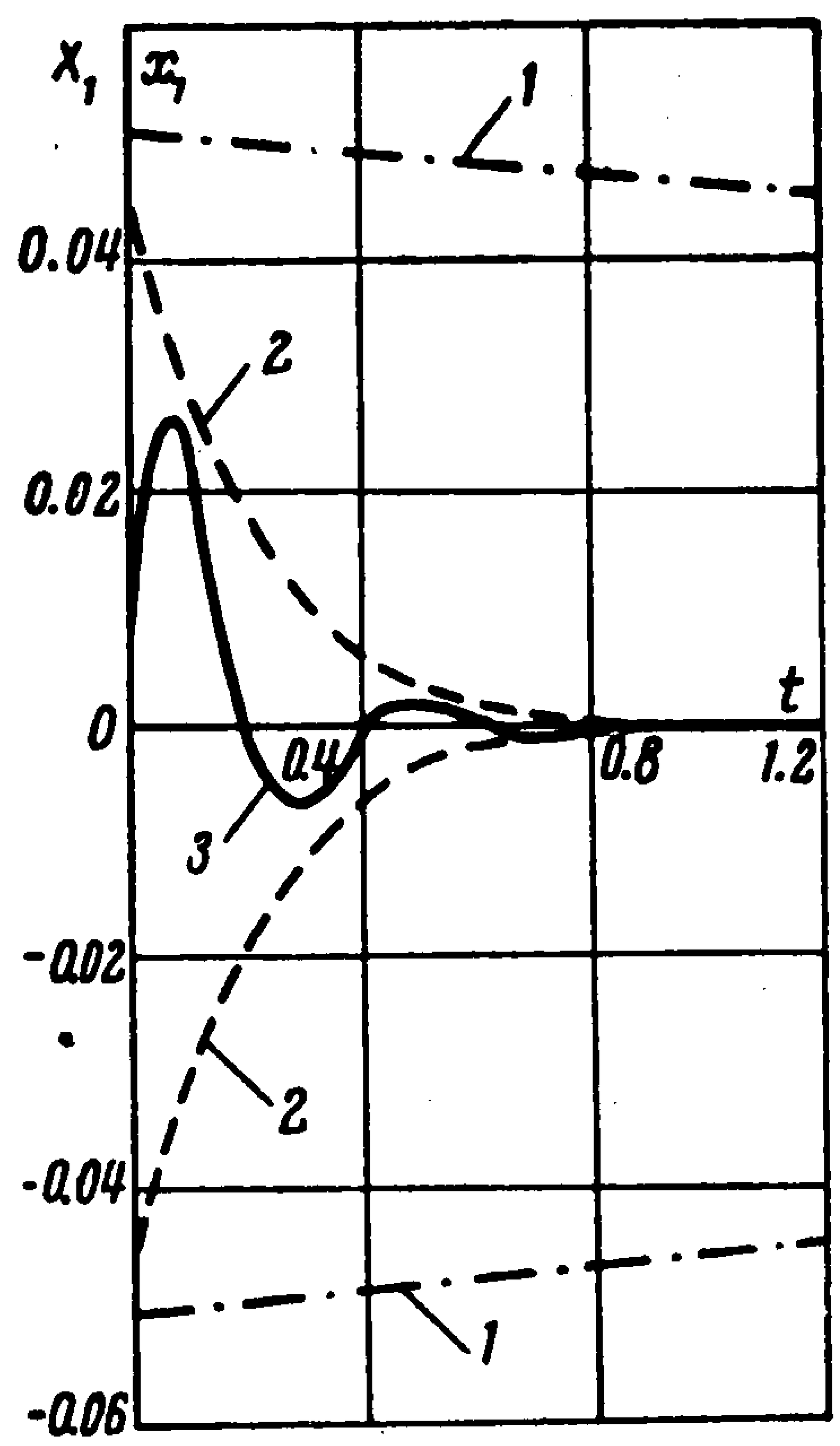
для первого

| $t =$ | 0 | 0.4 | 0.8 | 1.2 | 1.6 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu_+ =$ | —0.20503 | —0.20344 | —0.20506 | —0.20571 | —0.20604 | —0.20676 |
| $X_1 =$ | $0.51107 \cdot 10^{-1}$ | $0.49085 \cdot 10^{-1}$ | $0.47137 \cdot 10^{-1}$ | $0.45263 \cdot 10^{-1}$ | $0.43630 \cdot 10^{-1}$ | $0.42032 \cdot 10^{-1}$ |
| $X_2 =$ | 0.50438 | 0.48426 | 0.46493 | 0.44630 | 0.42996 | 0.41417 |

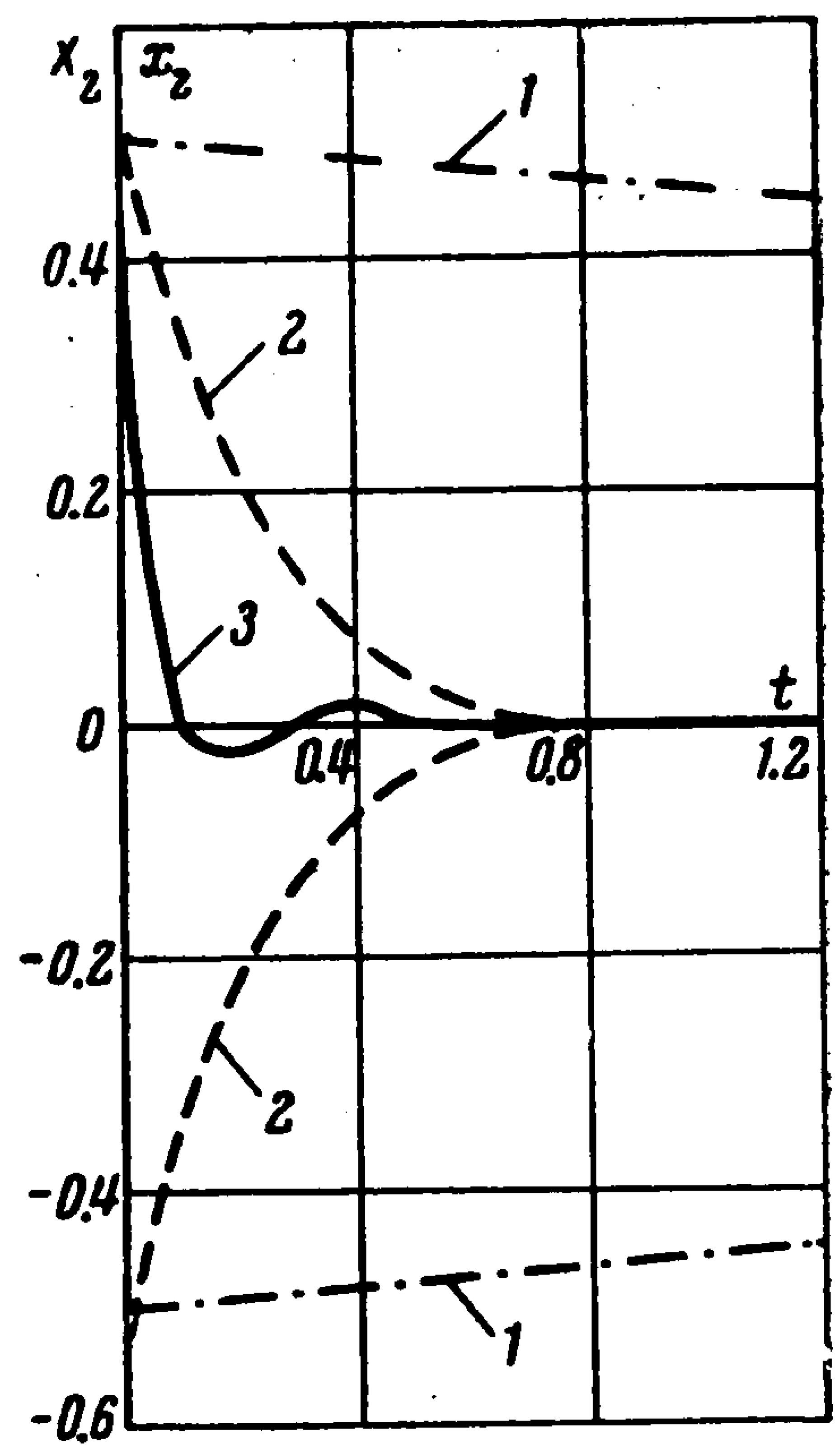
для второго

| $t =$ | 0 | 0.4 | 0.8 | 1.2 | 1.6 | 2,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu_+ =$ | —9.82016 | —9.86708 | —9.90771 | —9.94295 | —9.98739 | —10.02175 |
| $X_1 =$ | $0.44075 \cdot 10^{-1}$ | $0.61518 \cdot 10^{-2}$ | $0.85076 \cdot 10^{-3}$ | $0.11680 \cdot 10^{-3}$ | $0.15912 \cdot 10^{-4}$ | $0.21496 \cdot 10^{-5}$ |
| $X_2 =$ | 0.52533 | $0.73374 \cdot 10^{-1}$ | $0.10153 . 10^{-1}$ | $0.13946 \cdot 10^{-2}$ | $0.19080 \cdot 10^{-3}$ | $0.25695 \cdot 10^{-4}$ |

На фиг. 1 и 2 построены графики оценок $X_1(t)$, $X_2(t)$ для двух рассмотренных ва-




Фиг. 1




Фиг. 2

риантов коэффициентов (3.5) и частное решение $x_1(t)$, $x_2(t)$ системы (3.1) при начальных условиях

$$x_{10} = 0{,}01, \qquad x_{20} = 0.5 \tag{3.7}$$

Причем цифрами *1*, *2* обозначены оценки, получаемые соответственно по первому и второму способам, цифрой *3* — частное решение.

Из этих графиков видно, что второй способ, по сравнению с первым, позволяет существенно улучшить качество полученных оценок.

Поступила 21 V 1965

## ЛИТЕРАТУРА


1. Карачаров К. А., Пилютик А. Г. Введение в техническую теорию устойчивости движения. Физматгиз, 1962.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1950.
3. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Гостехиздат, 1952.
4. Растригин Л. А. Экстремальное регулирование методом случайного поиска. Автоматика и телемеханика, 1960, т. 21, № 9.