ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Г. В. Плотникова (Москва)

Получены условия асимптотической устойчивости периодических решений неавтономной квазилинейной системы с двумя степенями свободы в случае главного резонанса с одной резонансной частотой для простых и двукратных корней уравнений основных амплитуд.

1. Рассматривается колебательная система

$$x^{\cdot\cdot} + k^2 x = f^{(1)}(t) + \mu F^{(1)}(t, x, x^{\cdot}, y, y^{\cdot}, \mu)$$
$$y^{\cdot\cdot} + \omega^2 y = f^{(2)}(t) + \mu F^{(2)}(t, x, x^{\cdot}, y, y^{\cdot}, \mu) \qquad (1.1)$$

Здесь $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ — непрерывные функции периода 2π, удовлетворяющие условиям существования периодического решения порождающей системы ($\mu = 0$) с тем же периодом; $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ — аналитические функции по отношению к переменным x, $x^{\cdot}$, y, $y^{\cdot}$, μ и непрерывные периодические функции t с периодом 2π. Величина μ — малый параметр, k — целое число, ω — нецелое число. Порождающее решение периода 2π зависит от двух произвольных постоянных A_0 и B_0

$$x_0(t) = A_0 \cos kt + B_0 k^{-1} \sin kt + f_0^{(1)}(t), \qquad y_0(t) = f_0^{(2)}(t) \qquad (1.2)$$

Здесь $f^{(1)}{}_0, f^{(2)}{}_0$— частное решение периода 2π системы (1.1) при $\mu = 0$.

Начальные условия для системы (1.1) берутся в виде [1]

$$x(0) = f_0^{(1)}(0) + A_0 + \beta_1, \qquad y(0) = f_0^{(2)}(0) + \psi_1$$
$$x^{\cdot}(0) = f_0^{(1)\cdot}(0) + B_0 + \beta_2, \qquad y^{\cdot}(0) = f_0^{(2)\cdot}(0) + \psi_2 \qquad (1.3)$$

Здесь β_1, β_2 — функции μ, обращающиеся в нуль при $\mu = 0$; ψ_1 и ψ_2 — аналитические функции $A_0 + \beta_1$, $B_0 + \beta_2$ и μ также обращаются в нуль при $\mu = 0$.

Функции можно представить рядами

$$\psi_i = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Psi_{in} + \frac{\partial \Psi_{in}}{\partial A_0}\beta_1 + \frac{\partial \Psi_{in}}{\partial B_0}\beta_2 + \ldots\right]\mu^n \qquad (i = 1,2) \qquad (1.4)$$

Частное решение системы (1.1) с начальными условиями (1.3), обращающееся в порождающее (1.2) при $\mu = 0$, представлено в виде [1]

$$x(t) = f_0^{(1)}(t) + (A_0 + \beta_1)\cos kt + \frac{B_0 + \beta_2}{k}\sin kt + \qquad (1.5)$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n^{(1)}(t) + \frac{\partial C_n^{(1)}(t)}{\partial A_0}\beta_1 + \frac{\partial C_n^{(1)}(t)}{\partial B_0}\beta_2 + \ldots\right]\mu^n$$
$$y(t) = f_0^{(2)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n^{(2)}(t) + \frac{\partial C_n^{(2)}(t)}{\partial A_0}\beta_1 + \frac{\partial C_n^{(2)}(t)}{\partial B_0}\beta_2 + \ldots\right]\mu^n$$

Заметим, что производные по A_0 и B_0 есть сложные производные, взятые с учетом зависимости $C_n^{(1)}(t)$ и $C_n^{(2)}(t)$ от ψ_1 и ψ_2, которые, в свою очередь, зависят от A_0 и B_0.

Функции $C_n^{(1)}(t)$ и $C_n^{(2)}(t)$ определяются по формулам [1]

$$C_n^{(1)}(t) = \frac{1}{k}\int_0^t F_n^{(1)}(\tau)\sin k(t-\tau)\,d\tau \qquad (1.6)$$

$$C_n^{(2)}(t) = \Psi_{1n}\cos\omega t + \frac{\Psi_{2n}}{\omega}\sin\omega t + \frac{1}{\omega}\int_0^t F_n^{(2)}(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

Здесь
$$F_n^{(i)}(\tau) = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}F^{(i)}(\tau)}{d\mu^{n-1}}\right]_{\beta_1=\beta_2=\psi_1=\psi_2=\mu=0}$$

— полные частные производные функций $F^{(i)}$ по μ.

Например,

$$F_1^{(i)}(t) = (F^{(i)})_0, \qquad F_2^{(i)}(t) = (F_x^{(i)})_0\, C_1^{(1)}(t) + (F_{x^\cdot}^{(i)})_0\, C_1^{(1)\cdot}(t) +$$
$$+ (F_y^{(i)})_0\, C_1^{(2)}(t) + (F_{y^\cdot}^{(i)})_0\, C_1^{(2)\cdot}(t) + (F_\mu^{(i)})_0 \quad \text{и т. д.} \tag{1.7}$$

Здесь и далее значок 0 внизу у скобок означает, что в функции, стоящие в скобках, вместо x, $x^\cdot$, y, $y^\cdot$, μ, следует подставить x_0, $x_0^\cdot$, y_0, $y_0^\cdot$, 0 из (1.2); $F_x^{(i)} = \partial F^{(i)} / \partial x$ и т. д. Для того чтобы решение (1.5) было периодическим периода 2π, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись четыре условия периодичности Пуанкаре [2]

$$x(2\pi) - x(0) = 0, \quad y(2\pi) - y(0) = 0, \quad x^\cdot(2\pi) - x^\cdot(0) = 0, \quad y^\cdot(2\pi) - y^\cdot(0) = 0$$

Из этих условий периодичности находятся:

1) амплитуды A_0 и B_0 как решения амплитудных уравнений

$$C_1^{(1)}(2\pi) = 0, \qquad C_1^{(1)\cdot}(2\pi) = 0 \tag{1.8}$$

2) величины β_1 и β_2 в виде рядов по μ или по $\mu^{1/2}$ при двукратных корнях уравнений (1.8)

$$\beta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n/2}^{(r)} \mu^{n/2}, \qquad \beta_2 = \sum_{n=1}^{\infty} B_{n/2}^{(r)} \mu^{n/2} \qquad (r = 1,\ 2) \tag{1.9}$$

При этом первые не равные нулю коэффициенты $A_{n/2}^{(r)}$ и $B_{n/2}^{(r)}$ определяются из квадратных уравнений, остальные — из линейных систем уравнений с определителем при неизвестных, отличным от нуля [1, 3]

3) коэффициенты Ψ_{1n} и Ψ_{2n} из уравнений [1]

$$\Psi_{1n}(\cos 2\pi\omega - 1) + \frac{\Psi_{2n}}{\omega} \sin 2\pi\omega + \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} F_n^{(2)}(\tau) \sin\omega(2\pi - \tau)\, d\tau = 0$$
$$-\omega\, \Psi_{1n} \sin 2\pi\omega + \Psi_{2n}(\cos 2\pi\omega - 1) + \int_0^{2\pi} F_n^{(2)}(\tau) \cos\omega(2\pi - \tau)\, d\tau = 0 \tag{1.10}$$

Таким образом, каждому простому корню уравнений основных амплитуд соответствует одно периодическое решение (1.1) в виде рядов (1.5) по целым степеням μ (все коэффициенты с дробными индексами в (1.9) равны нулю); каждому двукратному корню — два периодических решения (1.1) в виде рядов по μ или $\mu^{1/2}$

$$x^{(r)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_{n/2}^{(r)}(t)\, \mu^{n/2}, \qquad y^{(r)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_{n/2}^{(r)}(t)\, \mu^{n/2} \tag{1.11}$$

где

$$x_{1/2}^{(r)}(t) = A_{1/2} \cos kt + \frac{B_{1/2}}{k} \sin kt, \quad y_{1/2}^{(r)}(t) = 0$$
$$x_1^{(r)}(t) = A_1 \cos kt + \frac{B_1}{k} \sin kt + C_1^{(1)}(t), \quad y_1^{(r)}(t) = C_1^{(2)}(t)$$
$$x_{3/2}^{(r)}(t) = A_{3/2} \cos kt + \frac{B_{3/2}}{k} \sin kt + \frac{\partial C_1^{(1)}(t)}{\partial A_0} A_{1/2} + \frac{\partial C_1^{(1)}(t)}{\partial B_0} B_{1/2}$$
$$y_{3/2}^{(r)}(t) = \frac{\partial C_1^{(2)}(t)}{\partial A_0} A_{1/2} + \frac{\partial C_1^{(2)}(t)}{\partial B_0} B_{1/2}$$
$$x_2^{(r)}(t) = A_2 \cos kt + \frac{B_2}{k} \sin kt + C_2^{(1)}(t) + \frac{\partial C_1^{(1)}(t)}{\partial A_0} A_1 + \frac{\partial C_1^{(1)}(t)}{\partial B_0} B_1$$
$$y_2^{(r)}(t) = C_2^{(2)}(t) + \frac{\partial C_1^{(2)}(t)}{\partial A_0} A_1 + \frac{\partial C_1^{(2)}(t)}{\partial B_0} B_1 \quad \text{и т. д.}$$

Здесь и далее индекс (r) у $A_{n/2}$, $B_{n/2}$ будем опускать. Исследуем устойчивость этих периодических решений.

2. Запишем уравнения в вариациях для системы (1.1)

$$u^{(1)\cdot\cdot} + k^2 u^{(1)} = \mu\,(F_x{}^{(1)} u^{(1)} + F_{x^\cdot}^{(1)} u^{(1)\cdot} + F_y{}^{(1)} u^{(2)} + F_{y^\cdot}^{(1)} u^{(2)\cdot})_r$$

$$u^{(2)\cdot\cdot} + \omega^2 u^{(2)} = \mu\,(F_x{}^{(2)} u^{(1)} + F_{x^\cdot}^{(2)} u^{(1)\cdot} + F_y{}^{(2)} u^{(2)} + F_{y^\cdot}^{(2)} u^{(2)\cdot})_r \qquad (2.1)$$

Индекс r внизу у скобок означает, что в производные от функций $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ вместо x, $x^\cdot$, y, $y^\cdot$ нужно подставить решение (1.1) по формулам (1.11).

Для приближенного вычисления характеристических показателей используем метод, изложенный в [2] (стр. 203—213).

Заметим прежде, что коэффициенты $F_x{}^{(i)}$, $F_{x^\cdot}{}^{(i)}$, ... $(i=1, 2)$ уравнений (2.1) являются аналитическими функциями μ, x, $x^\cdot$, y, $y^\cdot$, а последние, в свою очередь, как решения системы (1.1) — аналитическими функциями μ или $\mu^{1/2}$. Следовательно, $F_x{}^{(i)}$,... есть аналитические функции μ или $\mu^{1/2}$ (см. [3, 4]). Например, с учетом (1.11)

$$F_x{}^{(i)}(t, x, x^\cdot, y, y^\cdot, \mu) = (F_x{}^{(i)})_0 + (F_{xx}^{(i)} x_{1/2} + F_{xx^\cdot}^{(i)} x_{1/2}^\cdot + F_{xy}^{(i)} y_{1/2} + F_{xy^\cdot}^{(i)} y_{1/2}^\cdot)_0\, \mu^{1/2} +$$
$$+ (F_{xx}^{(i)} x_1 + F_{xx^\cdot}^{(i)} x_1^\cdot + F_{xy}^{(i)} y_1 + F_{xy^\cdot}^{(i)} y_1^\cdot + \ldots)_0\, \mu + \ldots \qquad (2.2)$$

Аналогичные разложения имеют место и для остальных коэффициентов.

Найдем характеристические показатели системы (2.1), соответствующие резонансным корням $\pm\, ik$ фундаментального уравнения. При $\mu = 0$ значения характеристических показателей есть $\alpha_0 = \pm\, ik$. Так как в резонансном случае величины $\pm\, ik$ могут быть от характеристических показателей отброшены, то ищем последние в виде

$$\alpha = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_{n/2} \mu^{n/2} \qquad (2.3)$$

Система (2.1) имеет решение

$$u^{(i)}(t) = e^{\alpha t} v^{(i)}(t) \qquad (2.4)$$

где $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$— периодические функции периода 2π. Следовательно, если в уравнениях (2.1) сделать замену переменных (2.4), то преобразованная система должна допускать периодическое решение. Это условие и послужит для определения величин $\alpha_{n/2}$.

Ищем $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ в виде

$$v^{(i)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_{n/2}^{(i)}(t)\, \mu^{n/2} \qquad (2.5)$$

Подставим ряды (2.2), (2.3) и (2.5) в уравнения (2.1) после сделанной в них замены (2.4). Сравнивая члены при одинаковых степенях $\mu^{1/2}$, для определения функций $v_{n/2}^{(i)}$ получим последовательно разрешаемые неоднородные линейные системы уравнений

$$v_{n/2}^{(1)\cdot\cdot} + k^2 v_{n/2}^{(1)} = \Phi_{n/2}^{(1)}, \qquad v_{n/2}^{(2)\cdot\cdot} + \omega^2 v_{n/2}^{(2)} = \Phi_{n/2}^{(2)} \qquad (2.6)$$

где

$$\Phi_0{}^{(i)} = 0, \quad \Phi_{1/2}^{(i)} = 0, \quad \Phi_1{}^{(i)} = -2\alpha_1 v_0{}^{(i)\cdot} + (F_x{}^{(i)} v_0{}^{(1)} + F_{x^\cdot}^{(i)} v_0^{(1)\cdot} + F_y{}^{(i)} v_0{}^{(2)} + F_{y^\cdot}^{(i)} v_0^{(2)\cdot})_0$$

$$\Phi_{3/2}^{(i)} = -2\alpha_{3/2} v_0{}^{(i)\cdot} - 2\alpha_1 v_{1/2}^{(i)\cdot} + (F_x{}^{(i)} v_{1/2}^{(1)} + F_{x^\cdot}^{(i)} v_{1/2}^{(1)\cdot} + F_y{}^{(i)} v_{1/2}^{(2)} + F_{y^\cdot}^{(i)} v_{1/2}^{(2)\cdot})_0 + (F_{xx}^{(i)} x_{1/2}^{(r)} +$$
$$+ F_{xx^\cdot}^{(i)} x_{1/2}^{(r)\cdot} + F_{xy}^{(i)} y_{1/2}^{(r)} + F_{xy^\cdot}^{(i)} y_{1/2}^{(r)\cdot})_0\, v_0^{(1)} + (F_{x^\cdot x}^{(i)} x_{1/2}^{(r)} + F_{x^\cdot x^\cdot}^{(i)} x_{1/2}^{(r)\cdot} + F_{x^\cdot y}^{(i)} y_{1/2}^{(r)} +$$
$$+ F_{x^\cdot y^\cdot}^{(i)} y_{1/2}^{(r)\cdot})_0\, v_0{}^{(1)\cdot} + (F_{yx}^{(i)} x_{1/2}^{(r)} + F_{yx^\cdot}^{(i)} x_{1/2}^{(r)\cdot} + F_{yy}^{(i)} y_{1/2}^{(r)} + F_{yy^\cdot}^{(i)} y_{1/2}^{(r)\cdot})_0\, v_0{}^{(2)} +$$
$$+ (F_{y^\cdot x}^{(i)} x_{1/2}^{(r)} + F_{y^\cdot x^\cdot}^{(i)} x_{1/2}^{(r)\cdot} + F_{y^\cdot y}^{(i)} y_{1/2}^{(r)} + F_{y^\cdot y^\cdot}^{(i)} y_{1/2}^{(r)\cdot})_0\, v_0{}^{(2)\cdot} \quad \text{и т. д.} \qquad (2.7)$$

В дальнейшем понадобятся также значения $\Phi_{n/2}^{(i)}$ до $n = 5$, однако из-за громоздкости здесь их не выписываем.

Решения (2.6) будут периодическими тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\int_0^{2\pi} \Phi_{n/2}^{(1)}(t)\sin kt\,dt = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \Phi_{n/2}^{(1)}(t)\cos kt\,dt = 0 \tag{2.8}$$

Периодические решения периода 2π системы (2.6) есть

$$v_{n/2}^{(1)}(t) = M_{n/2}\cos kt + \frac{1}{k} N_{n/2}\sin kt + w_{n/2}^{(1)}(t)$$

$$v_{n/2}^{(2)}(t) = w_{n/2}^{(2)}(t) \tag{2.9}$$

Здесь $M_{n/2}$, $N_{n/2}$ — произвольные постоянные, $w_{n/2}^{(1)}(t)$, $w_{n/2}^{(2)}(t)$ — частное периодическое решение (2.6) периода 2π. Для $n = 0,1$ имеем, например, $w_0^{(i)} = w_{1/2}^{(i)} = 0$.

Запишем условия (2.8) для $n = 2$, принимая во внимание (2.7) и (2.9), при $n = 0$. При этом нужно использовать выражения для производных $C_1^{(1)}(t)$, $C_1^{(1)\cdot}(t)$ по A_0 и B_0 при $t = 2\pi$, вычисленных на основании (1.6).

Окончательно указанные условия примут вид

$$M_0\left(\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial A_0} - 2\pi\alpha_1\right) + N_0\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial B_0} = 0, \qquad M_0\frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial A_0} + N_0\left(\frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial B_0} - 2\pi\alpha_1\right) = 0 \tag{2.10}$$

Здесь и далее, если аргумент t у функций $C_1^{(1)}(t)$, $C_1^{(1)\cdot}(t)$ и их производных по A_0 и B_0 будет опущен, их следует брать при $t = 2\pi$.

Система уравнений (2.10) определяет неизвестные постоянные M_0 и N_0. Чтобы эта система имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель при неизвестных обращался в нуль. Раскрывая этот определитель, получаем квадратное уравнение относительно α_1

$$4\alpha_1^2\pi^2 - 2\pi\left(\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial A_0} + \frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial B_0}\right)\alpha_1 + \Delta^\circ = 0, \qquad \Delta^\circ = \frac{\partial\left(C_1^{(1)}, C_1^{(1)\cdot}\right)}{\partial(A_0, B_0)} \tag{2.11}$$

которое является частным случаем уравнения (13.6) в [2] (стр. 210).

При достаточно малом μ знак действительной части α определяется знаком действительной части коэффициента при старшем члене в разложении (2.3). Поэтому, чтобы решение (1.1) было асимптотически устойчивым, достаточно, чтобы действительные части α_1 были меньше нуля. Из (2.11) получаем условия отрицательности действительных частей α_1 в виде

$$\text{а)}\quad \frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial A_0} + \frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial B_0} < 0, \qquad \text{б)}\quad \Delta^\circ > 0 \tag{2.12}$$

Условия (2.12) уже получены в [2]. Они аналогичны соответственно условиям (14) и (9) работы [5] для системы с одной степенью свободы.

Пусть корни уравнений основных амплитуд двукратны. Второе условие (2.12) перестает выполняться, так как $\Delta^\circ = 0$. Из (2.11) следует, что одно из значений $\alpha_1 = 0$. Найдем следующий старший коэффициент $\alpha_{n/2}$ характеристического показателя, действительная часть которого отлична от нуля. Рассмотрим наиболее интересные случаи, аналогичные рассмотренным в работе [5].

При этом используются некоторые величины, получающиеся из величин, введенных в [3] заменой в последних $C_n(t)$ из [3] на $C_n^{(1)}(t)$ из [1]. Употребим для них те же обозначения, только сверху будем ставить индекс °.

Например,

$$\Delta_1^\circ = \frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial B_0} C_2^{(1)\cdot} - \frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial B_0} C_2^{(1)}, \qquad \Delta_2^\circ = \frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial A_0} C_2^{(1)\cdot} - \frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial A_0} C_2^{(1)} \tag{2.13}$$

1°. Пусть $\Delta_1^\circ \neq 0$. Существуют два периодических решения (1.1), разлагающиеся в ряды по степеням $\mu^{1/2}$. Из уравнений (2.10) при $\alpha_1 = 0$ имеем, например,

$$M_0 = \frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial B_0}, \qquad N_0 = -\frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial A_0} \tag{2.14}$$

Условия (2.8) для $n = 3$ после громоздких выкладок принимают вид

$$M_{1/2}\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial A_0} + N_{1/2}\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial B_0} + W_{1/2}^{(1)} = 0, \qquad M_{1/2}\frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial A_0} + N_{1/2}\frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial B_0} + W_{1/2}^{(2)} = 0 \tag{2.15}$$

где

$$W_{1/2}^{(1)} = A_{1/2}\left(\frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial B_0}\frac{\partial^2 C_1^{(1)}}{\partial A_0^2} - \frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial A_0}\frac{\partial^2 C_1^{(1)}}{\partial A_0 \partial B_0}\right) + \tag{2.16}$$

$$+ B_{1/2}\left(\frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial B_0}\frac{\partial^2 C_1^{(1)}}{\partial A_0 \partial B_0} - \frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial A_0}\frac{\partial^2 C_1^{(1)}}{\partial B_0^2}\right) - 2\alpha_{3/2}\pi\frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial B_0}$$

$$W_{1/2}^{(2)} = A_{1/2}\left(\frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial B_0}\frac{\partial^2 C_1^{(1)\cdot}}{\partial A_0^2} - \frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial A_0}\frac{\partial^2 C_1^{(1)\cdot}}{\partial A_0 \partial B_0}\right) +$$

$$+ B_{1/2}\left(\frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial B_0}\frac{\partial^2 C_1^{(1)\cdot}}{\partial A_0 \partial B_0} - \frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial A_0}\frac{\partial^2 C_1^{(1)\cdot}}{\partial B_0^2}\right) + 2\pi\alpha_{3/2}\frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial A_0}$$

Напомним, что $A_{n/2}$, $B_{n/2}$ — коэффициенты при $\mu^{n/2}$ в разложениях (1.9) — меют два значения [1, 3], отличающиеся знаком и отвечающие двум периодическим решениям $(r = 1, 2)$.

Так как определитель при неизвестных $M_{1/2}$, $N_{1/2}$ в системе (2.15) равен нулю, то для совместности этой системы необходимо и достаточно, чтобы одно из уравнений (2.15) было следствием другого. Из этого условия после некоторых преобразований имеем уравнение для определения $\alpha_{3/2}$

$$L_{5/2}^\circ \equiv A_{1/2}\frac{\partial \Delta^\circ}{\partial A_0} + B_{1/2}\frac{\partial \Delta^\circ}{\partial B_0} = 2\pi\left(\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial A_0} + \frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial B_0}\right)\alpha_{3/2}$$

Так как $\alpha_{3/2}$ должно быть меньше нуля, а первое условие (2.12) предполагается выполненным, то для асимптотической устойчивости достаточно выполнения условия $L_{5/2}^\circ > 0$, аналогичного условию (10) работы [5]. Так же как и там, можно доказать, что $L_{5/2}^\circ \neq 0$ в рассматриваемом случае и неравенство $L_{5/2}^\circ > 0$ выполняется для одного из двух периодических решений.

2°. Пусть $\Delta_1^\circ = 0$, а корни уравнения $N_{02}^\circ a^2 + N_{11}^\circ a + N_{20}^\circ = 0$, которое аналогично уравнению (2.14) работы [3], простые: $a_1 \neq a_2$. Напомним, что

$$N_{02}^\circ = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial B_0}\frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial B_0}\right)^{-1}\frac{\partial (C_1^{(1)\cdot}, \Delta^\circ)}{\partial (A_0, B_0)}$$

$$N_{11}^\circ = \left(\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial B_0}\frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial B_0}\right)^{-1}\left[C_2^{\cdot(1)}\left(\frac{\partial^2 C_1^{(1)\cdot}}{\partial B_0^2}\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial A_0} + \right.\right.$$

$$+ \left.\frac{\partial^2 C_1^{(1)}}{\partial A_0 \partial B_0}\frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial B_0} - \frac{\partial^2 C_1^{(1)}}{\partial B_0^2}\frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial A_0} - \frac{\partial^2 C_1^{(1)\cdot}}{\partial A_0 \partial B_0}\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial B_0}\right) +$$

$$\left. + \frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial B_0}\left(\frac{\partial C_2^{(1)\cdot}}{\partial A_0}\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial B_0} + \frac{\partial C_2^{(1)}}{\partial B_0}\frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial A_0} - \frac{\partial C_2^{(1)\cdot}}{\partial B_0}\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial A_0} - \frac{\partial C_2^{(1)}}{\partial_0}\frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial B_0}\right)\right]$$

$$N_{20}^\circ = \left(\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial B_0}\right)^{-2}\left(\frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial B_0}\right)^{-1}\left\{\frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial B_0}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1^{(1)\cdot}}{\partial B_0^2}C_2^{(1)2} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{\partial C_2^{(1)\cdot}}{\partial B_0}\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial B_0}C_2^{(1)} + \left(\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial B_0}\right)^2 C_3^{(1)\cdot}\right] - \frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial B_0}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1^{(1)}}{\partial B_0^2}C_2^{(1)\cdot 2} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial C_2^{(1)}}{\partial B_0}\frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial B_0}C_2^{(1)\cdot} + \left(\frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial B_0}\right)^2 C_3^{(1)}\right]\right\}$$

В этом случае существуют два периодических решения (1.1), разлагающиеся в ряды по степеням μ. Коэффициент $\alpha_{3/2} = 0$, так как $L_{5/2}{}^\circ = 0$.

Из (2.15) при $\alpha_{3/2} = 0$, $A_{1/2} = B_{1/2} = 0$ для $M_{1/2}$ и $N_{1/2}$ имеем те же значения, что для M_0 и N_0 соответственно (2.14). Величина α_2 найдется из условий существования периодических решений системы (2.6) при $n = 4$, которые после громоздких вычислений записываются в виде

$$M_1 \frac{\partial C_1{}^{(1)}}{\partial A_0} + N_1 \frac{\partial C_1{}^{(1)}}{\partial B_0} + W_1{}^{(1)} + \frac{\partial (C_2{}^{(1)}, C_1{}^{(1)\cdot})}{\partial (A_0, B_0)} = 0$$

$$M_1 \frac{\partial C_1{}^{(1)\cdot}}{\partial A_0} + N_1 \frac{\partial C_1{}^{(1)\cdot}}{\partial B_0} + W_1{}^{(2)} + \frac{\partial (C_2{}^{(1)\cdot}, C_1{}^{(1)\cdot})}{\partial (A_0, B_0)} = 0 \qquad (2.17)$$

где $W_1{}^{(1)}$ и $W_1{}^{(2)}$ получаются из $W_{1/2}^{(1)}$, $W_{1/2}^{(2)}$ (2.16) заменой в последних величин $A_{1/2}$, $B_{1/2}$, $\alpha_{3/2}$ на A_1, B_1, α_2 соответственно.

При этом использовалось выражение для периодического решения (2.6) при $n = 2$, которое имеет вид

$$v_1{}^{(1)}(t) = M_1 \cos kt + \frac{N_1}{k} \sin kt + M_0 \frac{\partial C_1{}^{(1)}(t)}{\partial A_0} + N_0 \frac{\partial C_1{}^{(1)}(t)}{\partial B_0}, \qquad v_1{}^{(2)}(t) = \ldots \qquad (2.18)$$

а M_0 и N_0 имеют значения (2.14).

Как и в предыдущем случае, условия совместности системы (2.17) дают уравнение для определения α_2

$$L_3{}^\circ \equiv A_1 \frac{\partial \Delta^\circ}{\partial A_0} + B_1 \frac{\partial \Delta^\circ}{\partial B_0} - \left(\frac{\partial \Delta_1{}^\circ}{\partial A_0} - \frac{\partial \Delta_2{}^\circ}{\partial B_0} \right) = 2\pi \left(\frac{\partial C_1{}^{(1)}}{\partial A_0} + \frac{\partial C_1{}^{(1)\cdot}}{\partial B_0} \right) \alpha_2$$

В силу тех же причин, которые имеют место в работе [5], $L_3{}^\circ \neq 0$, так как выражение $L_3{}^\circ$ аналогично L_3 из [5].

На основании первого условия (2.12) условие отрицательности α_2 имеет вид $L_3{}^\circ > 0$, которое аналогично условию (13) работы [5].

3°. Наконец, пусть $a_1 = a_2$, а величина $K^\circ \neq 0$ (аналогичная K из [5]). Можно построить два периодических решения (1.1), разлагающихся в ряды по степеням $\mu^{1/2}$. В этом случае величина $L_3{}^\circ = 0$, поэтому $\alpha_2 = 0$.

Коэффициент $\alpha_{5/2}$ найдется из условий периодичности (2.8) при $n = 5$ аналогично тому, как был найден α_2 из (2.8) при $n = 4$. При этом используется значение $v_{3/2}^{(1)}(t)$, найденное из (2.6) при $n = 3$. Оказывается, что

$$v_{3/2}{}^{(1)}(t) = M_{3/2} \cos kt + \frac{N_{3/2}}{k} \sin kt + M_{1/2} \frac{\partial C_1{}^{(1)}(t)}{\partial A_0} + N_{1/2} \frac{\partial C_1{}^{(1)}(t)}{\partial B_0}$$

где $M_{3/2}$, $N_{3/2}$ — произвольные постоянные; $M_{1/2}$, $N_{1/2}$ имеют те же значения, что M_0, N_0 соответственно (2.14).

Указанные условия периодичности дают два уравнения для определения $M_{3/2}$, $N_{3/2}$. Из условий совместности этих уравнений, учитывая, что $L_3{}^\circ = 0$, получаем уравнение для определения $\alpha_{5/2}$

$$L_{7/2}{}^\circ \equiv A_{3/2} \frac{\partial \Delta^\circ}{\partial A_0} + B_{3/2} \frac{\partial \Delta^\circ}{\partial B_0} = 2\pi \left(\frac{\partial C_1{}^{(1)}}{\partial A_0} + \frac{\partial C_1{}^{(1)\cdot}}{\partial B_0} \right) \alpha_{5/2}$$

Аналогично тому, как это сделано в [5], можно показать, что $L_{7/2}{}^\circ \neq 0$, следовательно, $\alpha_{5/2} \neq 0$. Условие отрицательности $\alpha_{5/2}$ дает условие асимптотической устойчивости $L_{7/2}{}^\circ > 0$, которое всегда выполнено для одного из двух периодических решений.

Таким образом, для резонансного корня получаем результат, аналогичный результату для системы с одной степенью свободы. Условия асимптотической устойчивости, отвечающие резонансному корню фундаментального уравнения, совпадают с условиями асимптотической устойчивости периодических решений неавтономной системы с одной степенью свободы [5]. Следует только в последних заменить $C_n(t)$ на $C_n{}^{(1)}(t)$ из [1].

Наконец, выпишем условия устойчивости, соответствующие нерезонансному корню фундаментального уравнения

$$\int_0^{2\pi} (F_{y^\cdot}^{(2)})_0\,dt < 0 \tag{2.19}$$

Эти условия получаются тем же методом, однако характеристический показатель определяется формулой [2]

$$\alpha = \pm i\omega + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_{n/2}\mu^{n/2}$$

3. Рассмотрим примеры. 1°. Возьмем систему уравнений из [1]

$$\begin{gathered} x^{\cdot\cdot} + x = -4\cos 2t + \mu\,[{}^4/_3\, y^\cdot - (1-x^2)\,x^\cdot] \\ y^{\cdot\cdot} + {}^1/_4\, y = 5\cos 2t + \mu\,[{}^4/_3\,(1-x^2)\,x^\cdot - {}^4/_3\, y^\cdot] \end{gathered} \tag{3.1}$$

Порождающее решение (3.1) имеет вид

$$x_0(t) = A_0\cos t + B_0\sin t - {}^4/_3\cos 2t, \qquad y_0(t) = -{}^4/_3\cos 2t$$

Уравнения основных амплитуд

$$A_0\,[3 + {}^1/_4\,(A_0^2 + B_0^2)] = 0, \qquad B_0\,[3 + {}^1/_4\,(A_0^2 + B_0^2)] = 0$$

имеют решение $A_0 = B_0 = 0$. Периодическое решение (3.1), построенное в [1], является неустойчивым, так как не выполняется первое условие устойчивости (2.12).

2°. Рассмотрим систему уравнений вида

$$\begin{gathered} x^{\cdot\cdot} + x = \mu\,[\lambda_0\sin t + \alpha\,(1-x^2)\,x^\cdot + \beta y^\cdot] \\ y^{\cdot\cdot} + {}^1/_4\, y = \mu\,[-{}^1/_4\,\lambda_0\sin t + \gamma\,(1-x^2)\,x^\cdot + \delta y^\cdot] \end{gathered} \tag{3.2}$$

Порождающее решение зависит от двух произвольных постоянных

$$x_0(t) = A_0\cos t + B_0\sin t, \qquad y_0(t) = 0$$

Уравнения основных амплитуд

$$\begin{gathered} {}^3/_4\lambda_0 + (6\alpha + 9\gamma)A_0\,[1 - {}^1/_4\,(A_0^2 + B_0^2)] + {}^1/_7 A_0\,(9\beta + 12\delta) = 0 \\ (6\alpha + 9\gamma)B_0\,[1 - {}^1/_4\,(A_0^2 + B_0^2)] + {}^1/_7 B_0\,(9\beta + 12\delta) = 0 \end{gathered}$$

имеют решения $B_0 = 0$, $A_0 = A$, где A — корень кубического уравнения

$$(6\alpha + 9\gamma)A^3 + 4\,(6\alpha + 9\gamma + {}^9/_7\beta + {}^{12}/_7\delta)A + 3\lambda_0 = 0$$

Здесь

$$\Delta^\circ = -{}^3/_{16}\,(6\alpha + 9\gamma)A^2 + (6\alpha + 9\gamma)A - (6\alpha + 9\gamma + {}^9/_7\beta + {}^{12}/_7\delta)^2$$

Предположим, что параметры λ_0, α, β, γ, δ таковы, что $\Delta^\circ \neq 0$. Тогда можно построить периодическое решение (3.2) в виде рядов по целым степеням μ. Условия устойчивости (2.12) этого решения дают, что λ_0, α, β, γ, δ должны быть таковы, что $6\alpha + 9\gamma > 0$ и $\Delta^\circ > 0$. Условие (2.19) дает $\delta < 0$

3°. Рассмотрим более интересный пример

$$\begin{gathered} x^{\cdot\cdot} + x = \mu\,(\nu_1\cos t + \lambda_1\sin t + c_1 x + \gamma_1 x^3 + d_1 y + g_1 y^3) \\ y^{\cdot\cdot} + {}^1/_4 y = \mu\,(\nu_2\cos t + \lambda_2\sin t + c_2 x + \gamma_2 x^3 + d_2 y + g_2 y^3 + \delta y^\cdot) \end{gathered} \tag{3.3}$$

Это уравнение напоминает уравнение Дюффинга [2] в квазилинейной постановке. Порождающее решение имеет вид

$$x_0(t) = A_0\cos t + B_0\sin t, \qquad y_0(t) = 0$$

Уравнения основных амплитуд

$$\begin{gathered} C_1^{(1)}(2\pi) \equiv \pi\,[\lambda_1 + c_1 B_0 + {}^3/_4\gamma_1 B_0\,(A_0^2 + B_0^2)] = 0 \\ C_1^{(1)\cdot}(2\pi) \equiv \pi\,[\nu_1 + c_1 A_0 + {}^3/_4\gamma_1 A_0\,(A_0^2 + B_0^2)] = 0 \end{gathered} \tag{3.4}$$

Условие кратности корней $\Delta^\circ = 0$ приводит к следующему соотношению между коэффициентами уравнений:

$$81\gamma_1(\nu_1^2 + \lambda_1^2) + 16\, c_1^3 = 0 \tag{3.5}$$

Коэффициенты c_1 и γ_1 должны быть разных знаков. При этом корни уравнений (3.4) равны

$$A_0 = -\frac{3}{2}\frac{\nu_1}{c_1}, \qquad B_0 = -\frac{3}{2}\frac{\lambda_1}{c_1}$$

Условие двукратности этих корней [3] дает

$$\Delta^* = \frac{81}{8}\frac{\gamma_1^2\nu_1^2\lambda_1}{c_1} \neq 0$$

После соответствующих вычислений получаем

$$C_1^{(1)}(t) = \frac{\nu_1}{16}\left(\frac{1}{3} + \frac{27}{4}\frac{\gamma_1\lambda_1^2}{c_1^3}\right)(\cos t - \cos 3t) - \frac{\lambda_1}{16}\left(\frac{1}{3} + \frac{27}{4}\frac{\gamma_1\nu_1^2}{c_1^3}\right)(3\sin t - \sin 3t)$$

Далее, согласно (1.10), вычислим Ψ_{11} и Ψ_{21}, затем из (1.6) найдем $C_1^{(2)}(t)$; подставляя $C_1^{(1)}(t)$ и $C_1^{(2)}(t)$ в (1.7), найдем $F_2^{(1)}(t)$. Это позволяет, согласно (1.6), найти $C_2^{(1)}(t)$ и ее производную. Взяв их значения при $t = 2\pi$, подсчитаем Δ_1° из (2.13)

$$\Delta_1^\circ = -\frac{27\gamma_1\nu_1\pi^2}{8c_1^2}\left\{\frac{2}{3}d_1\left[\nu_2\nu_1 + \lambda_2\lambda_1 + \frac{8c_1^2}{81\gamma_1^2}(3c_2\gamma_1 - c_1'\gamma_2)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{45}{32}\frac{\gamma_1\nu_1^2\lambda_1^2}{c_1^2} + \frac{c_1}{144}(7\lambda_1^2 + \nu_1^2) + \frac{9}{128}\frac{\lambda_1^3\gamma_1}{c_1^4}(4c_1^3 + 81\gamma_1\nu_1^2)\right\}$$

Очевидно, используя выбор параметров можно сделать $\Delta_1^\circ \neq 0$. Тогда можно построить два периодических периода 2π решения (3.3), обращающихся в порождающее при $\mu = 0$. Эти решения представляются рядами по степеням $\mu^{1/2}$ (1.11).

Далее имеем [3]

$$A_{1/2} = \pm\left(\frac{2\Delta_1^\circ}{\Delta^*}\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial B_0}\frac{\partial C_1^{(1)\cdot}}{\partial B_0}\right)^{1/2} = \pm\left(\frac{243}{32}\frac{\nu_1^2\gamma_1}{c_1^5}\{\ldots\}\right)^{1/2} \quad B_{1/2} = -\frac{\partial C_1^{(1)} / \partial A_0}{\partial C_1^{(1)} / \partial B_0}A_{1/2} = \frac{\lambda_1}{\nu_1}A_{1/2}$$

Под радикалом в фигурных скобках стоит то же выражение, что и в фигурных скобках в Δ_1°.

Так как γ_1 и c_1 должны быть разных знаков, для вещественности $A_{1/2}$, $B_{1/2}$ необходимо выполнение условия $\{\ldots\} > 0$.

Очевидно, тогда при $\gamma_1\nu_1 < 0$ имеем выражение $\Delta_1^\circ > 0$, а при $\gamma_1\nu_1 > 0$ выражение $\Delta_1^0 < 0$.

Тогда, согласно 1° и [5], получаем такой результат: при $\gamma_1\nu_1 < 0$ устойчиво периодическое решение, соответствующее знаку плюс перед радикалом в $A_{1/2}$; при $\gamma_1\nu_1 > 0$ устойчиво периодическое решение, соответствующее знаку минус. К этим условиям добавляется условие $\delta < 0$ согласно (2.19).

Поступила 13 II 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Плотникова Г. В. К построению периодических решений неавтономной квазилинейной системы с двумя степенями свободы. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.
3. Плотникова Г. В. О построении периодических решений неавтономной квазилинейной системы с одной степенью свободы при резонансе в случае двукратных корней уравнений основных амплитуд. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
4. Гурса Э. Курс математического анализа. Гостехиздат, 1936.
5. Плотникова Г. В. Об устойчивости периодических решений неавтономных квазилинейных систем с одной степенью свободы. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.