О СТАБИЛИЗАЦИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Н. Г. Булгаков, Н. Н. Красовский

(Минск, Свердловск)

Общая задача о стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем до асимптотической устойчивости [1] рассмотрена в работе [2]. В настоящей заметке устанавливаются условия стабилизации по первому приближению нестационарных систем в одном частном случае.

Рассмотрим управляемую систему

$$dy \,/\, dt = f\,(t,\, y,\, \omega) \qquad (y \in \{R^n\},\ \omega \in \{R^m\}) \tag{1}$$

где f — заданная вектор-функция, y — вектор фазовых координат системы. Вектор ω — управление, которое будем считать не возмущаемым помехами. Вектор y подвержен малым возмущениям x, так что в (1)

$$y\,(t) = y^*\,(t) + x\,(t) \tag{2}$$

Здесь $y^*\,(t)$— заданное движение, осуществляемое управлением $\omega^*\,(t)$. Обозначим

$$u = \omega - \omega^*\,(t) \tag{3}$$

Подставляя (2), (3) в уравнение (1) и разлагая правые части по величинам x, u получим уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \omega_j} \frac{\partial \omega_j^*}{\partial y_i} \right) x_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \omega_j} u_j + g\,(t,\, x,\, u) \tag{4}$$

где производные вычислены вдоль движения $y = y^*(t)$, через $g\,(t,\, x,\, u)$ обозначены члены, порядок которых относительно x, u выше первого равномерно по t при $0 \leqslant t\ \infty$ т. е. предполагаем, что выполняется неравенство

$$\|\, g\,(t,\, x,\, u) \,\| \leqslant N\ [\|\, x \,\| + \|\, u \,\|]^{1+\alpha} \quad (N = \mathrm{const} > 0,\quad \alpha = \mathrm{const} > 0) \tag{5}$$

Символ $\|\, q \,\|$ означает евклидову норму вектора $q = \{q_1,\, \ldots,\, q_k\}$

$$\|\, q \,\| = \sqrt{q_1^2 + \ldots + q_k^2}$$

Если при $u = 0$ нулевое решение системы (4) неустойчиво, то возникает задача о стабилизации движения (1), т. е. задача о выборе такой функции $u\,(t,\, x)$, при подстановке которой в (4) нулевое решение $x = 0$ было бы асимптотически устойчивым по Ляпунову [1]. Таким образом, рассмотрим систему

$$dx \,/\, dt = A(t)\ x + B\,(t)\ u + g\,(t,\, x,\, u) \tag{6}$$

где $A\,(t)$ — $n \times n$ матрица, $B\,(t)$ — $n \times m$ матрица, u — m-вектор, g — вектор-функция, удовлетворяющая неравенству (5). В подробной записи система (6) имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,(t)\, x_j + \sum_{k=1}^{m} b_{ik}\,(t)\, u_k + g_i\,(t,\, x,\, u) \qquad (i = 1,\, \ldots,\, n) \tag{7}$$

Наряду с полной системой (6) будем рассматривать систему первого приближения

$$dx \,/\, dt = A\,(t)\ x + B\,(t)\ u \tag{8}$$

Будем предполагать при этом, что элементы $a_{ij}\,(t)$ и $b_{ik}\,(t)$ матриц $A\,(t)$ и $B\,(t)$ имеют производные по времени $da_{ij} \,/\, dt$, $db_{ik} \,/\, dt$. Ограничимся рассмотрением случая, когда при каждом фиксированном значении $t = \tau = \mathrm{const} > 0$ ранг матрицы

$$V = \{B\,(\tau),\, A\,(\tau)\, B\,(\tau),\, \ldots,\, A^{n-1}\,(\tau)\, B\,(\tau)\} \tag{9}$$

равен (n)

$$r\,(V) = n \tag{10}$$

Ниже устанавливаются достаточные условия, при которых невозмущенное движение системы (6) стабилизируется линейным управлением

$$u = P\,(t)\, x, \quad \text{или} \quad u_k\,(t,\, x) = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}\,(t)\, x_j \quad (k = 1,\, \ldots,\, m) \tag{11}$$

независимо от членов $g\,(t,\, x,\, u)$.

Рассмотрим матрицу (9). Выберем какие-либо n столбцов $l^{(i)}$ из этой матрицы и построим квадратичную форму от некоторых переменных λ_i

$$\theta(\lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} (l^{(i)}(\tau) \cdot l^{(j)}(\tau)) \lambda_i \lambda_j \tag{12}$$

Здесь символ $(l^{(i)}(\tau) \cdot l^{(j)}(\tau))$ обозначает скалярное произведение векторов $l^{(i)}$ и $l^{(j)}$ Форма (12) будет играть основную роль в устанавливаемом ниже критерии стабилизируемости.

Теорема. Если при всяком $\tau \geqslant 0$ в матрице (8) можно выбрать n линейно-независимых столбцов $l^{(1)}, \ldots l^{(n)}$ так, чтобы квадратичная форма (12) была определенно-положительной, то можно указать постоянную $\gamma > 0$ такую, что при выполнении неравенств

$$\left|\frac{da_{ij}(t)}{dt}\right| \leqslant \gamma, \qquad \left|\frac{db_{ik}(t)}{dt}\right| \leqslant \gamma \tag{13}$$

невозмущенное движение системы (6) может быть стабилизировано линейным управлением (11) независимо от членов $g(t, x, u)$.

Доказательство. Рассмотрим систему с постоянными коэффициентами

$$dx / dt = A(\tau) x + B(\tau) u \tag{14}$$

где $\tau \geqslant 0$ — фиксированное число. Эта система удовлетворяет условию стабилизируемости, указанному в теореме 4.1 [2] (см. также работы [3-5]). В самом деле, пространство $\{W^r\}$, о котором идет речь в теореме 4.1, совпадает согласно (10) с пространством $\{:_i\}$ и, таким образом, все собственные векторы $S^+_{(i)}$ и $\overset{\circ}{S}_{(k)}$ матрицы $A(\tau)$ в случае ее простой структуры или векторы $T^+_{(i)}$ и $\overset{\circ}{T}_{(k)}$ в общем случае (см. [2], стр. 997—999) автоматически попадают в пространство $\{W^r\}$. Следовательно, в силу теоремы 4.1, существует линейное управление

$$u(\tau, x) = P(\tau) x \tag{15}$$

такое, что при каждом $\tau \geqslant 0$ тривиальное решение системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$dx / dt = A(\tau) x + B(\tau) P(\tau) x \tag{16}$$

будет асимптотически устойчивым.

Согласно [6] (стр. 62), для асимптотически устойчивой системы (16) существует определенно-положительная функция Ляпунова

$$v(\tau, x) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(\tau) x_i x_j \tag{17}$$

такая, что

$$\left(\frac{dv(\tau, x(t))}{dt}\right)_{(16)} = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) \qquad (\tau = \mathrm{const}) \tag{18}$$

Коэффициенты этой функции $\alpha_{ij}(\tau)$, как известно, вычисляются из условий (18). При этом для нахождения этих коэффициентов получается [6] (стр. 57—66) линейная система алгебраических уравнений, зависящих от $a_{ij}(\tau)$, $b_{ik}(\tau)$ и $p_{kj}(\tau)$

Здесь важно отметить следующее. Управление (15) при условии определенной положительности формы (12) можно выбрать так, что матрица $P(\tau)$ будет равномерно ограничена при $\tau \geqslant 0$, а форма (17) будет иметь при этом для всех $\tau \geqslant 0$ ограниченные коэффициенты и будет определенно-положительной равномерно по τ. Справедливость этих утверждений выводится на основании известных оценок теории управляемости линейных систем (8). Величины $p_{kj}(t)$ при этом можно вычислить, решая для системы (16) задачу об аналитическом конструировании регулятора [7] (см. примечание 3.3 [2], стр. 994). Тогда можно выбрать управление $u(\tau, x) = P(\tau) x$ так, чтобы для движений систем (16) равномерно по τ выполнялись неравенства

$$\| x(t) \| \leqslant \beta \| x(t_0) \| e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (\alpha, \beta = \mathrm{const}, \alpha > 0, \beta > 0)$$

Вычислим теперь производную dv / dt в силу системы (16), считая τ в квадратичной форме (17) и в системе (16) величиной переменной, равной t. Имеем

$$\left(\frac{dv\,(t,\,x\,(t))}{dt}\right)_{(16)} = \left(\frac{dv\,(\tau,\,x\,(t))}{dt}\right)_{(16)} + \frac{\partial v\,(t,\,x\,(t))}{\partial t} \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{d\alpha_{ij}(t)}{dt} x_i x_j\right) \tag{19}$$

Как было отмечено выше, величины $\alpha_{ij}(\tau)$ вычисляются из линейных уравнений, коэффициенты которых зависят от $a_{ij}(\tau)$, $b_{ik}(\tau)$ и $p_{kj}(\tau)$. При условии определенной положительности формы (12) определитель Δ этой системы равномерно отличен от нуля [8], т. е.

$$|\Delta| > \nu \qquad (\nu = \mathrm{const},\ \nu > 0)$$

Отсюда следует, что если производные $da_{ij}(t) / dt$ и $db_{ik}(t) / dt$ и $dp_{kj}(t) / dt$ малы, то и производные $d\alpha_{ij}(t) / dt$ также будут малы. Но величины $da_{ij}(t) / dt$ и $db_{jk}(t) / dt$ выбираем малыми по условию (13). Из малости величин $da_{ij}(t) / dt$ и $db_{kj}(t) / dt$ следует также малость величин $dp_{kj}(t) / dt$. В самом деле, как отмечено выше, величины $p_{kj}(t)$ можно вычислить, решая для системы (14) задачу об аналитическом конструировании регулятора [7]. Из теории этой задачи следует, что при условии определенной положительности квадратичной формы (12) величины $dp_{kj}(t) / dt$ существуют и являются малыми, если только малы величины $da_{ij}(t) / dt$ и $db_{ik}(t) / dt$.

Итак, выбором числа $\gamma > 0$ второе слагаемое в (19) можно сделать малым по сравнению с первым. Отсюда следует, что производная $(dv\,(t,\,x\,(t)) / dt)_{(16)}$ при достаточно малом γ является определенно-отрицательной квадратичной формой от x_i. Следовательно, квадратичная форма $v\,(t,\,x)$, определенная (17), удовлетворяет условиям

$$c_1 \|x\|^2 \leqslant v\,(t,\,x) \leqslant c_2 \|x\|^2, \qquad \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| \leqslant c_3 \|x\|$$

Здесь c_1, c_2, c_3 — постоянные, не зависящие от t. При этом производная этой функции $(dv / dt)_{(8)}$ при $u = P\,(t)\,x$ является функцией определенно-отрицательной.

Составим производную от формы $v\,(t,\,x)$ в силу полной системы (6) при $\bar{u} = P\,(t)\,x$ Имеем

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(6)} = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{(8)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} g_i\,(t,\,x,\,u) \tag{20}$$

В силу равномерной ограниченности частных производных $\partial v / \partial x_i$ величина (20) при достаточно малой норме $\|x\|$ является функцией также определенно-отрицательной, и, следовательно, система (6) при $u = P\,(t)\,x$ будет асимптотически устойчивой независимо от членов $g_i\,(t,\,x,\,u)$ в соответствии с теоремой Ляпунова [1]. Поэтому управление $u = P\,(t)\,x$ стабилизирует систему. Теорема доказана.

Поступила 15 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Л я п у н о в А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1959.
2. Г а л ь п е р и н Е. А., К р а с о в с к и й Н. Н. О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем. ПММ, 1963, т. 2, вып. 6.
3. К а л м а н Р. Е. Об общей теории систем управления. Тр. I Конгресса ИФАК, т. I, Изд-во АН СССР, 1961.
4. К у р ц в е й л ь Я. К аналитическому конструированию регуляторов. Автоматика и телемеханика, 1961, т. 22, № 6.
5. К и р и л л о в а Ф. М. К задаче об аналитическом конструировании регуляторов. ПММ, 1961, т. 25, вып. 3.
6. М а л к и н И. Г. Теория устойчивости движения. Гостехиздат, 1952.
7. Л е т о в А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. Автоматика и телемеханика, 1960, т. 21, № 4, 5, 6; 1961, т. 22, № 4; 1962, т. 23, № 11.
8. К р а с о в с к и й Н. Н. О стабилизации неустойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.