Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

О СТАБИЛИЗАЦИИ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ПАРЫ ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЕЙ

Е. А. Гальперин

(Москва)

Рассматривается задача о стабилизации установившихся движений нелинейной управляемой системы в критическом случае пары чисто мнимых корней. Используются неаналитические регуляторы и функции Ляпунова специального вида. Рассматриваются способы решения задачи, опирающиеся на теорию устойчивости движения [1-4] и методы, развитые в работах [5-7]. Рассмотрен пример.

§ 1. Постановка задачи и вспомогательное преобразование. Рассмотрим уравнения возмущенного движения управляемого объекта

$$dx/dt = Ax + Bu + g(x, u) \qquad (x \in \{R^n\},\ u \in \{R^m\}) \tag{1.1}$$

Здесь x — n-вектор возмущения; u — m-вектор управления; $g(x, u)$ — члены выше первого порядка малости по x, u; A, B — постоянные матрицы соответствующих размеров. Будем предполагать, что управление u не возмущается помехами и имеет порядок малости не ниже x. Предположим также, что все коэффициенты уравнений (1.1) вещественны, а $g(x, u)$ — аналитическая функция по x, u.

Пусть при $u \equiv 0$ невозмущенное движение $x = 0$ системы (1.1) не является асимптотически устойчивым. Требуется построить стабилизирующее управление (регулятор) $u = u(x)$ такое, чтобы невозмущенное движение $x = 0$ системы (1.1) с этим управлением стало асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Пусть имеет место критический случай пары чисто мнимых корней [7]. Тогда система (1.1) при помощи невырожденного преобразования переменных, матрицу которого можно построить, следуя [3,7], приводится к виду:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\lambda\eta + X(\xi, \eta, v, u), \qquad \frac{d\eta}{dt} = \lambda\xi + Y(\xi, \eta, v, u)$$
$$\frac{dv}{dt} = A_0 v + B_0 u + a\xi + b\eta + Z(\xi, \eta, v, u) \tag{1.2}$$

Здесь ξ, η — скаляры, v — $(n-2)$-вектор, A_0 — $(n-2) \times (n-2)$-матрица, B_0 — $(n-2) \times m$-матрица, a, b — $(n-2)$-векторы, X, Y, Z — члены выше первого порядка малости по ξ, η, v, u, управление $u(v, \xi, \eta)$ предполагается неаналитическим.

§ 2. Выбор регулятора. Можно проверить, что система

$$\frac{dv}{dt} = A_0 v + B_0 u \qquad (v \in \{R^{n-2}\},\ u \in \{R^m\}) \tag{2.1}$$

удовлетворяет условию стабилизируемости [7] и для нее, следовательно, можно построить линейный регулятор вида

$$u_0(v) = Pv \tag{2.2}$$

где P — некоторая $m \times (n-2)$-матрица.

Для сокращения записи введем обозначение

$$x_* = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 \text{ при } x \geqslant 0 \\ -1 \text{ при } x < 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Будем искать для системы (1.2) регулятор в виде

$$u^j(v, \xi, \eta) = u_0^j(v) + \sum_{p,\,q=0}^{1} \sum_{s+k=1}^{\infty} \alpha_{skpq}^j \xi^s \eta^k \xi_*^p \eta_*^q \tag{2.4}$$

Здесь и в дальнейшем $s \geqslant 0$, $k \geqslant 0$.

Если коэффициенты ряда в (2.4) подчинить условию

$$\alpha_{0k1q}^j = \alpha_{s0p1}^j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{2.5}$$

то получим непрерывный регулятор. При $p = q = 0$ получается аналитический регулятор.

Введем управление (2.4) в систему (1.2) и постараемся преобразовать ее так, чтобы задачу об устойчивости полной системы можно было решать, рассматривая некоторую укороченную систему второго порядка, соответствующую паре чисто мнимых корней. Неопределенные коэффициенты управления (2.4) будем выбирать, исходя из критериев асимптотической устойчивости укороченной системы, к построению которой и переходим.

В соответствии с методом Ляпунова [1-3] рассмотрим систему уравнений с частными производными

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \xi} [-\lambda\eta + X(\xi, \eta, z, u)] + \frac{\partial z}{\partial \eta} [\lambda\xi + Y(\xi, \eta, z, u)] = \\ = A_0 z + B_0 u + a\xi + b\eta + Z(\xi, \eta, z, u) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь z — $(n-2)$-вектор, $u = u(z, \xi, \eta)$ согласно (2.2), (2.4). По теореме Ляпунова [1,3], в аналитическом случае при $p = q = 0$ существует единственное аналитическое решение системы (2.6).

Используя неаналитическое управление (2.4), будем искать решение системы (2.6) в виде рядов

$$z_i = \sum_{p,\,q=0}^{1} \sum_{s+k=1}^{\infty} c_{skpq}^i \xi^s \eta^k \xi_*^p \eta_*^q \qquad (i = 1, \ldots, n-2) \tag{2.7}$$

с неопределенными коэффициентами c_{skpq}^i, подбирая последние так, чтобы равенство (2.6) удовлетворялось тождественно по ξ, η, ξ_*, η_*.

Подставим (2.7) в (2.6) и соберем слагаемые, содержащие множители ξ_*, η_*. Тогда уравнение (2.6) распадется на четыре соотношения, соответствующие комбинациям показателей

$$(p, q) = (0, 0),\ (0, 1),\ (1, 0),\ (1, 1) \tag{2.8}$$

причем подлежащие определению коэффициенты c_{skpq}^i распределяются в них таким образом, что все они могут быть вычислены последовательно.

Поэтому в общем случае для системы (2.6) существует единственное решение, представляемое во всем пространстве изменения переменных единой записью (2.7). Отметим, что в силу определения функции $x_* = \operatorname{sign} x$ (2.3) вектор-функция $z(\xi, \eta)$ оказывается дифференцируемой любое число раз всюду, кроме плоскостей $\xi = 0$, $\eta = 0$.

Подставляя в уравнения (1.2) управление $u(v, \xi, \eta)$ (2.4) и заменяя в полученных соотношениях вектор v через вектор z (2.7), получим систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -\lambda\eta + \sum_{p,\,q=0}^{1} \sum_{s+k=2}^{\infty} a_{skpq}\xi^s\eta^k\xi_*{}^p\eta_*{}^q \\ \frac{d\eta}{dt} &= \lambda\xi + \sum_{p,\,q=0}^{1} \sum_{s+k=2}^{\infty} b_{skpq}\xi^s\eta^k\xi_*{}^p\eta_*{}^q \end{aligned} \qquad (2.9)$$

Система (2.9) получается из системы (1.2) после преобразования Ляпунова

$$v_i = w_i + z_i \qquad (i = 1, \ldots, n-2) \qquad (2.10)$$

если отбросить все уравнения, соответствующие некритическим корням и положить в оставшихся уравнениях $w_i \equiv 0$. В дальнейшем ограничиваемся теми управлениями (2.4), при которых преобразование (2.10) непрерывно. При этом в правых частях преобразованной системы могут появиться разрывы на плоскостях $\xi = 0$, $\eta = 0$. Однако можно проверить справедливость принципа сводимости [3] (стр. 373—382) также и в этом случае, так что для решения задачи устойчивости системы (1.2) достаточно рассмотреть систему (2.9).

Примечание 2.1. Сформулируем принцип сводимости для нашего случая. Подставляя в (1.2) управление $u(v, \xi, \eta)$ согласно (2.4), получим систему

$$\frac{d\xi}{dt} = -\lambda\eta + X_u(\xi, \eta, v), \qquad \frac{d\eta}{dt} = \lambda\xi + Y_u(\xi, \eta, v) \qquad (2.11)$$

$$\frac{dv}{dt} = (A_0 + B_0P)v + Z_u(\xi, \eta, v) \qquad (2.12)$$

Отбросим все уравнения (2.12), а в уравнениях (2.11) положим $v \equiv 0$; тогда получится укороченная система второго порядка

$$\frac{d\xi}{dt} = -\lambda\eta + X_u(\xi, \eta, 0) \qquad \frac{d\eta}{dt} = \lambda\xi + Y_u(\xi, \eta, 0) \qquad (2.13)$$

Пусть наинизший порядок членов, зависящих от v_i $(i = 1, \ldots, n-2)$ в разложениях $X_u(\xi, \eta, v)$, $Y_u(\xi, \eta, v)$, есть q, а наинизший порядок этих членов относительно v_i есть $r \leqslant q$.

Теорема. Предположим, что невозмущенное движение $\xi = \eta = 0$ системы (2.13) устойчиво или асимптотически устойчиво, или неустойчиво вне зависимости от членов порядка выше N. Тогда, если разложения вектора $Z_u(\xi, \eta, 0)$ начинаются членами порядка не ниже p, где

$$p \geqslant \frac{N + 1 - q + 2r}{r} \qquad (2.14)$$

то невозмущенное движение $\xi = \eta = v_i = 0$ для полной системы (2.11), (2.12) соответственно устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво.

Доказательство теоремы в основных чертах повторяет доказательство в книге И. Г. Малкина [3] для аналитической системы.

Если решение (2.7) уравнения с частными производными (2.6) будет непрерывным в членах порядка $s + k \leqslant p - 1$, то вместо условия (2.14) можно использовать более слабое условие [3] (стр. 386), в котором

$$p' \geqslant \frac{N + 1 - q + r}{r} \tag{2.15}$$

Для преобразования системы (2.11), (2.12) к системе, удовлетворяющей условиям теоремы, и построения тем самым укороченной системы (2.9) нужно вычислить непрерывные функции z_i (2.7) до членов порядка $p - 2$ и проверить существование непрерывного решения (2.6) в членах порядка $p - 1$. Если последнее не существует, то члены порядка $p - 1$ разложений вектора Z_u $(\xi, \eta, 0)$ нужно попытаться уничтожить надлежащим выбором управлений.

Примечание 2.2. Целесообразно иногда использовать непрерывный регулятор

$$u^j = u_0^j(v) + \sum_{l=-\infty}^{1} \sum_{s+k+l=1}^{\infty} \alpha_{skl}^j \xi^s \eta^k \zeta^l \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{2.16}$$

содержащий неаналитическую функцию [1]

$$\zeta = \sqrt{\beta\xi^2 + \gamma\eta^2} \qquad (\beta, \gamma > 0) \tag{2.17}$$

При этом преобразование Ляпунова (2.10) получается непрерывным, и не возни кает осложнений, связанных с возможностью появления разрывов в (2.10) при использовании регулятора (2.4).

§ 3. Выбор функций Ляпунова. При исследовании устойчивости движения системы (2.9) с неаналитической правой частью полезно ввести в рассмотрение неаналитические функции Ляпунова. Условие

$$\varphi_k(\nu x, \mu y) = |\nu|^k \varphi_k(x, y) \qquad (|\nu| = |\mu| \neq 0; \ k = 1, 2, \ldots) \tag{3.1}$$

выделяет при этом те функции, для которых не усложняется проверка знакоопределенности по сравнению со способами, известными для аналитических функций. Функции (3.1) — четные, непрерывны и монотонны вдоль любого луча, выходящего из начала координат, удовлетворяют условию $\varphi_k(0, 0) = 0$, сохраняют знак во всех точках прямых линий

$$x \pm \alpha y = 0 \qquad (\alpha \text{ — любое}) \tag{3.2}$$

и являются величинами k-го порядка по отношению к переменным x, y первого порядка.

Функция $\varphi_k(x, y)$ является знакоопределенной в том и только в том случае, если уравнения

$$\varphi_k(\rho, 1) = 0, \qquad \varphi_k(1, \rho) = 0 \tag{3.3}$$

не имеют корней $\rho \geqslant 0$. Это можно доказать, опираясь на отмеченные свойства функ ций (3.1).

Функцию Ляпунова целесообразно строить в виде (2.7); в том же виде получится и производная dV/dt. Там, где требуется проверка знакоопределенности, будем из класса функций (2.7) брать те функции, которые удовлетворяют условию (3.1). Все такие функции записываются в виде

$$\psi_k(x, y) = \sum_{i+j=k} \gamma_{ij}^k (xx_*)^i (yy_*)^j \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3.4}$$

§ 4. Первый способ решения. Будем предполагать, что построение ведется таким способом (см. пример), что преобразование Ляпунова (2.10) получается непрерывным. Если на некотором этапе любой выбор неаналитического управления из (2.4) приводит к разрывным преобразованиям (2.10), то на этом и предшествующих этапах (там, где требуется) следует

[1] На это обратил внимание автора Н. Н. Красовский.

брать аналитические управления (см. пример). Записываем уравнения (2.9) в виде

$$d\xi/dt = -\lambda\eta + X_2(\xi, \eta) + X_3(\xi, \eta) + \ldots$$
$$d\eta/dt = \lambda\xi + Y_2(\xi, \eta) + Y_3(\xi, \eta) + \ldots \qquad (4.1)$$

где X_k, Y_k — совокупность членов k-го порядка в уравнениях (2.9). Функцию Ляпунова, удовлетворяющую условиям теоремы об асимптотической устойчивости, пытаемся построить в виде

$$V = \xi^2 + \eta^2 + V_3(\xi, \eta) + V_4(\xi, \eta) + \ldots \qquad (4.2)$$

где $V_k(\xi, \eta)$ — непрерывная функция k-го порядка из класса (2.7)

$$V_k(\xi, \eta) = \sum_{p,\, q=0}^{1} \sum_{i+j=k} \beta_{ijpq}^{k} \xi^i \eta^j \xi_*^{\,p} \eta_*^{\,q} \qquad (k \geqslant 3) \qquad (4.3)$$

$$\beta_{0j1q}^{k} = \beta_{i0p1}^{k} = 0 \qquad (k = 3, 4, \ldots) \qquad (4.4)$$

Полная производная dV / dt в силу уравнений (4.1) получится в форме

$$\frac{dV}{dt} = f_3(\xi, \eta) + f_4(\xi, \eta) + \cdots \qquad (4.5)$$

$$f_k(\xi, \eta) = \lambda\left(\xi\frac{\partial V_k}{\partial \eta} - \eta\frac{\partial V_k}{\partial \xi}\right) + F_k(\xi, \eta) \qquad (4.6)$$

$$F_k(\xi, \eta) = 2\xi X_{k-1} + 2\eta Y_{k-1} + \sum_{i+j=k+1}\left(\frac{\partial V_i}{\partial \xi} X_j + \frac{\partial V_i}{\partial \eta} Y_j\right) \qquad (4.7)$$
$$(k \geqslant 3; \quad i \geqslant 3; \quad X_0 = Y_0 = X_1 = Y_1 = 0)$$

Функция $F_k(\xi, \eta)$ зависит от функций $V_3, \ldots, V_{k-1}$ и может быть вычислена по (4.7), если последние известны. Рассмотрим в (4.5) совокупность членов третьего порядка

$$f_3(\xi, \eta) = \lambda\left(\xi\frac{\partial V_3}{\partial \eta} - \eta\frac{\partial V_3}{\partial \xi}\right) + 2\xi X_2 + 2\eta Y_2 \qquad (4.8)$$

Потребуем, чтобы для этих членов удовлетворялось условие

$$f_3(\xi, \eta) = -\psi_3(\xi, \eta) \qquad (4.9)$$

где $\psi_3(\xi, \eta)$ — определенно-положительная функция из (3.4). Например, можно взять

$$\psi_3(\xi, \eta) = \gamma_{30}^{\,3}\xi^3\xi_* + \gamma_{03}^{\,3}\eta^3\eta_* \quad (\gamma_{ij}^{\,3} > 0) \qquad (4.10)$$

Условие (4.9) является уравнением с частными производными относительно функции $V_3(\xi, \eta)$, которое можно решать методом неопределенных коэффициентов. Подставим в (4.9) выражение $V_3(\xi, \eta)$ в виде (4.3) и не будем фиксировать заранее коэффициенты $\gamma_{ij}^{\,3}$ функции $\psi_3(\xi, \eta)$.

Тогда получим систему соотношений (А), состоящую из: 1) условий непрерывности (4.4); 2) условий определенной положительности $\psi_3(\xi,\eta)$ в виде неравенств, наложенных на $\gamma_{ij}^{\,3}$; 3) линейных уравнений с постоянными коэффициентами, выражающих условие (4.9).

Стабилизация обеспечивается управлением (2.4), если коэффициенты α_{skpq}^{j}, β_{ijpq}^{3}, γ_{ij}^{3} можно выбрать так, чтобы удовлетворялась система соотношений (А). При этом в (2.4) достаточно взять только члены первого порядка, причем получим семейство регуляторов, зависящих от параметров γ_{ij}^{3}. Если нельзя удовлетворить соотношениям (А) в силу связей или структуры системы (2.9), то нужно ослабить условия на γ_{ij}^{3}, требуя от функции $\psi_3(\xi, \eta)$ лишь неотрицательности $\psi_3(\xi, \eta) \geqslant 0$. Этой системе соотношений (A′) всегда можно удовлетворить. Достаточно, например, положить все коэффициенты α^j_{skpq}, входящие в $f_3(\xi, \eta)$ из (4.8), равными нулю, взять $\psi_3 \equiv 0$ и найти единственное аналитическое решение для $V_3(\xi, \eta)$. После этого нужно рассмотреть в (4.5) совокупность членов следующего по порядку измерения.

Заметим, что для любой функции $V_k(\xi, \eta)$ вида (4.3) при $\xi = \cos\theta$, $\eta = \sin\theta$ всюду, кроме плоскостей $\xi = 0$, $\eta = 0$, справедливо равенство

$$\frac{dV_k}{d\theta} = \left(\xi \frac{\partial V_k}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial V_k}{\partial \xi}\right)\Bigg|_{\substack{\xi = \cos\theta \\ \eta = \sin\theta}} \tag{4.11}$$

Обозначим через M_3 множество, состоящее из точек фазовой плоскости (исключая начало $\xi = \eta = 0$), в которых $\psi_3(\xi, \eta) = 0$, и некоторых окрестностей этих точек. Если $\psi_3 \equiv 0$, то M_3 включает всю плоскость без начала координат; если $\psi_3(\xi, \eta) \geqslant 0$, то M_3 состоит из открытых областей, ограниченных лучами (3.2), бесконечно близкими к тем прямым (3.2), на которых $\psi_3 = 0$. Рассмотрим в (4.5) совокупность членов четвертого порядка

$$f_4(\xi, \eta) = \lambda\left(\xi \frac{\partial V_4}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial V_4}{\partial \xi}\right) + F_4(\xi, \eta) \tag{4.12}$$

Потребуем, чтобы для этих членов на множестве M_3 удовлетворялось условие

$$f_4(\xi, \eta) = -\psi_4(\xi, \eta) + c_4(\xi^2 + \eta^2)^2 \qquad (c_4 = \mathrm{const}) \tag{4.13}$$

Здесь $\psi_4(\xi, \eta)$ — некоторая функция из (3.4), коэффициенты γ^4_{ij} которой не фиксируем. Вычислим интеграл

$$c_4 = c_4(\gamma^4_{ij}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} [F_4(\cos\theta, \sin\theta) + \psi_4(\cos\theta, \sin\theta)]\, d\theta \tag{4.14}$$

Интеграл (4.14) определяет линейную зависимость величины c_4 от параметров γ^4_{ij}, при которой разрешима система линейных уравнений, получающаяся при решении уравнения с частными производными (4.13) методом неопределенных коэффициентов. Рассмотрим функцию

$$\Phi_4 = \psi_4(\xi, \eta) - c_4(\xi^2 + \eta^2)^2 \tag{4.15}$$

принадлежащую классу (3.4). Системы соотношений (B), (B′) получаются из соотношений (A), (A′) заменой функции $\psi_3(\xi, \eta)$ на функцию $\Phi_4(\xi, \eta)$ из (4.15) и линейных уравнений для условия (4.9) линейными уравнениями, составленными для условия (4.13). При этом условия знакоопределенности или знакопостоянства Φ_4 нужно составлять только для множества M_3. Так как $\Phi_4(\xi, \eta)$ выбирается из класса (3.4), то условие положительности ее на множества M_3 состоит, согласно (3.3), в том, чтобы корни $\rho \geqslant 0$ уравнения $\psi_3(\rho, 1) = 0$ сообщали положительные значения полиному

$$\Phi_4(\rho, 1) = [\gamma^4_{04} + \gamma^4_{13}\rho + \gamma^4_{22}\rho^2 + \gamma^4_{31}\rho^3 + \gamma^4_{40}\rho^4$$

и одновременно корни $\rho \geqslant 0$ уравнения $\psi_3(1, \rho) = 0$ сообщали положительные значения полиному

$$\Phi_4(1,\rho)=\gamma_{04}^4\rho^4+\gamma_{13}^4\rho^3+\gamma_{22}^4\rho^2+\gamma_{31}^4\rho+\gamma_{40}^4$$

Коэффициенты β_{ijpq}^4, γ_{ij}^4 и оставшиеся коэффициенты α_{skpq}^j следует выбирать так, чтобы удовлетворялись соотношения (В) или хотя бы соотношения (В′); в последнем случае нужно определить множество M_4, состоящее из окрестностей тех точек M_3, для которых $\Phi_4(\xi,\eta)=0$, и рассмотреть совокупность членов следующего измерения и так далее.

В этом процессе получаются соотношения (А), (А′) для нечетных порядков в (4.5); соотношения (В), (В′) — для четных порядков $k=2n$ с функциями в правой части (4.13) вида

$$\Phi_k(\xi,\eta)=\psi_k(\xi,\eta)-c_k(\xi^2+\eta^2)^{1/2k} \tag{4.16}$$

и система вложенных множеств

$$\{R^2\}=M_2\supset M_3\supseteq M_4\supseteq\ldots \tag{4.17}$$

причем условия знакоопределенности (А), (В) или знакопостоянства (А′), (В′) для членов k-го порядка в (4.5) рассматриваются на множестве M_{k-1}.

Предположим, что множество M_{i-1} (i — четное) включает всю фазовую плоскость без начала координат; это значит, что для $3\leqslant k,\ s\leqslant i-1$ выполнены тождества $\psi_k(\xi,\eta)=\Phi_s(\xi,\eta)\equiv 0$. Определим систему соотношений (С) заменой условий положительности в соотношениях (В) на множестве M_{i-1} на условия отрицательности.

Регулятор будет построен, если наступит момент, когда после некоторого шага $l\geqslant 3$ множество M_l окажется пустым, т. е. будут удовлетворены соотношения (А) или (В), причем для членов низших порядков $f_k(\xi,\eta)$ в (4.5) $3\leqslant k\leqslant l-1$ выполняются соотношения (А′) или (В′), и, кроме того, правые части некритических уравнений преобразованной системы при $w_i=0$ не содержат членов порядка

$$s\leqslant\frac{l-q+r}{r}$$

(см. примечание 2.1 и формулу (2.14) при $N=l-1$).

Если при тех же условиях на правые части некритических уравнений для любых возможных значений α_{skpq}^j, β_{ijpq}^m, γ_{ij}^m $(m\leqslant l)$ в силу связей или структуры системы (4.1) при некотором $l\geqslant 4$ и при выполненных условиях $\psi_k(\xi,\eta)=\Phi_s(\xi,\eta)\equiv 0$ для $3\leqslant k,\ s\leqslant l-1$ оказываются выполненными соотношения (С), то стабилизация управлением (2.4) невозможна.

Отметим, что после того, как удалось выбрать первую знакопостоянную функцию $\psi_k(\xi,\eta)\geqslant 0$ или $\Phi_k(\xi,\eta)\geqslant 0$, в дальнейшем можно уже брать знакопеременные в фазовой плоскости функции ψ_s, Φ_s $(s\geqslant k+1)$, принимающие неотрицательные значения на множествах M_{s-1} $(s\geqslant k+1)$.

Справедливость высказанных утверждений следует из теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [1], теоремы Четаева о неустойчивости [2] и принципа сведения для квазианалитической системы.

Замечание 4.1. Отметим частный случай. Пусть $k\geqslant 3$ будет первый номер в (4.5), для которого выполнены соотношения (А′) или (В′), причем функция $\psi_k(\xi,\eta)$ или $\Phi_k(\xi,\eta)$ не равна тождественно нулю

Предположим, что если взять при этом $V_i(\xi, \eta) \equiv 0$ в (4.2) для $i > k$, то согласно (4.7) получится $F_{k+1}(\xi, \eta) \equiv 0$. Обозначим упомянутую функцию через $\varphi_k(\xi, \eta)$ и рассмотрим функции

$$W = V + a\xi\eta^k - b\xi^k\eta \qquad (k \text{ — нечетное}) \tag{4.18}$$

$$W = V + a\xi\eta^k\eta_* - b\xi^k\eta\xi_* \qquad (k \text{ — четное}) \tag{4.19}$$

где V — функция (4.2), построенная до членов порядка k. Полная производная функций (4.18), (4.19) в силу уравнений (2.9) может быть представлена в виде

$$\frac{dW}{dt} = -\varphi_k(\xi, \eta) - \lambda a |\eta|^{k+1} + \lambda kb |\xi|^{k-1}\eta^2 + \lambda ka\xi^2 |\eta|^{k-1} - \lambda b |\xi|^{k+1} + \ldots \tag{4.20}$$

где $|\xi| = \xi\xi_*$ — абсолютная величина ξ. При этом, в силу предположений $V_i(\xi, \eta) \equiv 0$ для $i > k$, $F_{k+1} \equiv 0$, и согласно (4.6) будет $f_{k+1}(\xi, \eta) \equiv 0$, следовательно, производная dW/dt из (4.20) не содержит других членов порядка $k+1$, кроме выписанных. Так как $\varphi_k(\xi, \eta) \geqslant 0$ — функция класса (3.1), то она может обращаться в нуль только на прямых (3.2). Пусть $\xi = \alpha_i\eta$ — все такие прямые. Выберем числа a, b в (4.18) или (4.19) так, чтобы удовлетворялись неравенства

$$a - kb|\alpha_i|^{k-1} - ka\alpha_i^2 + b|\alpha_i|^{k+1} > 0 \tag{4.21}$$

Тогда совокупность членов порядка $k+1$ в (4.20) в окрестности прямых $\xi = \alpha_i\eta$ будет отрицательна. Если возможно выбрать такие a и b, чтобы удовлетворить одновременно всем неравенствам (4.21), то в этом случае члены высших порядков в (4.1) рассматривать не нужно, а построенное управление стабилизирует систему. В частности, для одной прямой $\xi = \alpha\eta$ такой выбор a, b возможен при любых $0 \leqslant |\alpha| \leqslant \infty$.

§ **5. Второй способ.** Можно строить регулятор (2.4), используя метод исследования [3], связанный с оценкой знака контурных интегралов. При этом получаем

$$dr / d\theta = c^2F_2(\theta) + c^3F_3(\theta) + \ldots, \quad r(0, c) = c, \quad c = \text{const} \tag{5.1}$$

Функции $F_l(\theta)$ $(l \geqslant 2)$ определяются последовательно и зависят от коэффициентов α^j_{skpq} в (2.4). Сформулируем результат.

Стабилизация обеспечивается управлением (2.4), если преобразование (2.10) будет непрерывным и коэффициенты α^j_{skpq} выбраны так, что после некоторого шага $l \geqslant 2$ выполнены условия

$$J_l = \int_0^{2\pi} F_l(\theta)\,d\theta < 0, \qquad J_k = \int_0^{2\pi} F_k(\theta)\,d\theta = 0 \qquad (2 \leqslant k \leqslant l-1) \tag{5.2}$$

и, кроме того, правые части некритических уравнений преобразованной системы при $w_i = 0$ не содержат членов порядка $s \leqslant (l + 1 - q + r) / r$ (см. (2.14) при $N = l$).

Если же для любых возможных α^j_{skpq}, в силу связей или структуры системы (2.9), при некотором $l \geqslant 2$ и при условии $J_k = 0$ для $2 \leqslant k \leqslant l-1$ оказывается выполненным соотношение $J_l > 0$, то стабилизация управлением вида (2.4) невозможна.

Примечание 5.1. Этот способ можно использовать также для проверки факта асимптотической устойчивости, построив предварительно управление при помощи функции Ляпунова со знакоотрицательной производной. Для этого нужно вычислить интегралы (5.2). Пусть $p \geqslant 3$ — номер в (4.5), для которого выполнены соотношения (A′) или (B′). Невозмущенное движение $\xi = \eta = 0$ будет асимптотически устойчиво независимо от членов порядка выше $p-1$ в том, и только в том случае, если для некоторого $2 \leqslant l \leqslant p-1$ будут выполнены условия (5.2).

§ **6. Пример** [1]. Рассмотрим маятник в кардановом подвесе, обладающий двумя степенями свободы и несущий материальный шар, который может вращаться вокруг стержня маятника. Требуется стабилизировать до асимптотической устойчивости положение равновесия маятника при помощи момента u_1, вращающего шар вокруг стерж-

[1] Эту систему предложил рассмотреть Н. Н. Красовский.

ня, и момента u_2 в одной из плоскостей качания (фигура). Обозначим

$$\frac{d\theta}{dt} = x_1, \quad \theta = x_2, \quad \frac{d\varphi}{dt} = x_3, \quad \varphi = x_4, \quad \frac{d\psi}{dt} = \xi, \quad \psi = \eta \tag{6.1}$$

Уравнения движения маятника с точностью до членов четвертого порядка в нормальной форме Коши имеют вид

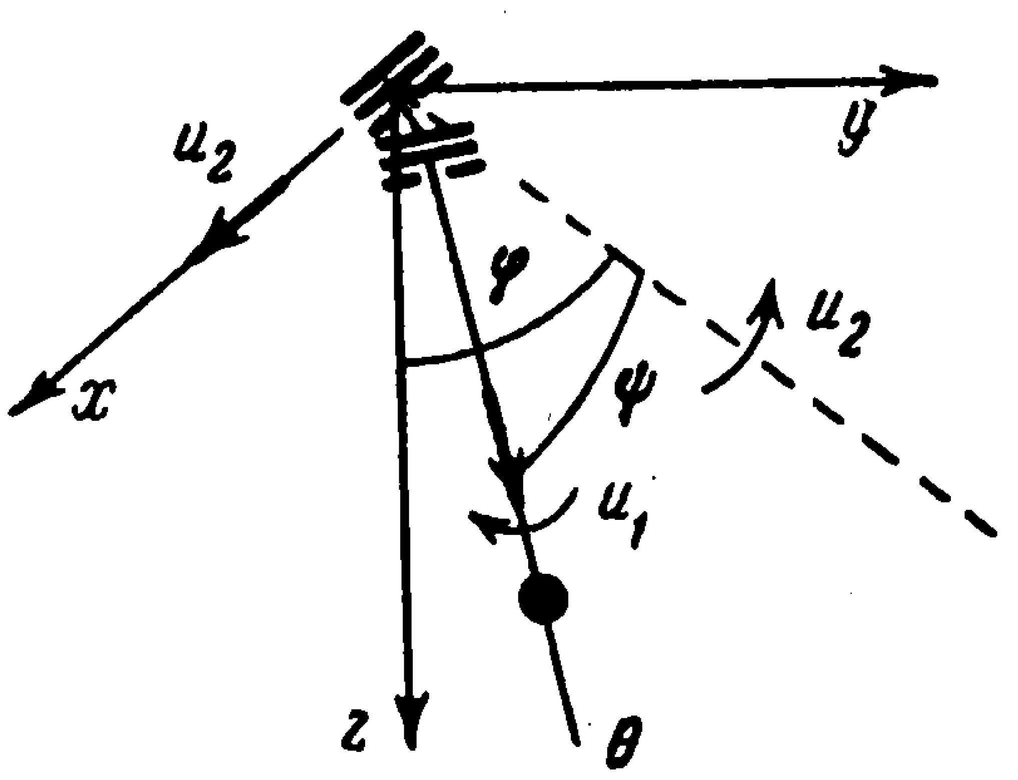
$$\frac{dx_1}{dt} = u_1 + X_1^{(2)} + X_1^{(3)}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = x_1 \tag{6.2}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -x_4 + u_2 + 2kx_1\xi + X_3^{(3)}, \qquad \frac{dx_4}{dt} = x_3 \tag{6.3}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -\eta - 2kx_1x_3 + Y^{(3)}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \xi \tag{6.4}$$

Здесь u_1, u_2 — управления, пропорциональные моментам; $k > 0$ — параметр, $X_i^{(s)}$, $Y^{(s)}$ $(s = 2, 3)$ — члены порядка $s > 1$ относительно переменных x_i $(i = 1, \ldots, 4)$, u_j $(j = 1, 2)$, ξ, η величины первого порядка.

Переменные x_i $(i = 1, \ldots, 4)$ уравнений (6.2), (6.3) полностью управляемы, а переменные ξ, η в первом приближении неуправляемы и уравнение (6.4) содержит пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i$. Линейный регулятор для управляемой подсистемы первого приближения можно взять в виде $u_1^0 = -2x_1 - x_2$, $u_2^0 = -2x_3$.



1. Ищем для полной системы регулятор (2.4) в виде (6.5)

$$u_j = u_j^0 + u_j^{(1)} + u_j^{(2)} + u_j^{(3)} + \ldots \qquad (j = 1, 2)$$

где $u_j^{(s)}$ — функция s-го порядка из (2.7).

Найдем сначала члены первого порядка в (6.5). Записываем функцию первого порядка из соотношения (2.7)

$$z_i^{(1)} = p_i\xi + q_i\eta \qquad (i = 1, \ldots, 4) \tag{6.6}$$

где

$$p_i = p_0^i + p_1^i\xi_* + p_2^i\eta_* + p_3^i\xi_*\eta_* \tag{6.7}$$

и аналогично для q_i $(i = 1, \ldots, 4)$. Из требования непрерывности преобразования Ляпунова (2.10) и записи (6.6) имеем

$$p_i = p_0^i + p_1^i\xi_*, \qquad q_i = q_0^i + q_2^i\eta_* \tag{6.8}$$

Подставим (6.6) в уравнение (2.6), составленное для системы (6.2), (6.3), (6.4), и выпишем члены первого порядка.

Необходимые условия разрешимости уравнения в частных производных (2.6) относительно $z_i^{(1)}$ имеют вид

$$q_2 = p_1, \quad -p_2 = q_1, \quad q_4 = p_3; \quad -p_4 = q_3 \tag{6.9}$$

В силу (6.8), (6.9), величины p_i, q_i не должны зависеть от ξ_*, η_*; при этом функции $u_j^{(1)}$ также не будут зависеть от ξ_*, η_*, т. е. члены первого порядка в (6.5) получаются линейными, и их можно попытаться найти, используя известную процедуру исследования устойчивости в аналитическом случае [1-3, 8, 9].

Положим $u_j^{(1)} \equiv 0$ и будем искать члены второго порядка в (6.5). При этом можно взять $p_i = q_i = 0$, т. е. $z_i^{(1)} \equiv 0$. Записываем функцию второго порядка из (2.7)

$$z_i^{(2)} = a_i\xi^2 + b_i\xi\eta + c_i\eta^2 \qquad (i = 1, \ldots, 4) \tag{6.10}$$

где a_i, b_i, c_i — функции от ξ_*, η_* того же вида, что и p_i (6.7). Условия непрерывности $z_i^{(2)}$ имеют вид

$$a_i = a_0^i + a_1^i\xi_*, \qquad c_i = c_0^i + c_2^i\eta_* \tag{6.11}$$

Подставим (6.10) в уравнение (2.6), составленное для системы (6.2), (6.3), (6.4), и выпишем члены второго порядка. Условия разрешимости уравнения с частными производными (2.6) относительно $z_i^{(2)}$ получаются в виде

$$b_2 = a_1 = -c_1, \quad 2(c_2 - a_2) = b_1, \quad b_4 = a_3 = -c_3, \quad 2(c_4 - a_4) = b_3 \tag{6.12}$$

Из (6.11), (6.12) следуют равенства

$$b_2 = a_1 = -c_1 = \nu, \qquad b_4 = a_3 = -c_3 = \mu \tag{6.13}$$

где ν, μ — некоторые числа. Соотношения (6.12), (6.13) являются ограничениями на коэффициенты в (6.10). Если функции $u_j^{(2)}$ выбирать в соответствии с выбором $z_i^{(2)}$ из (6.10), то в некритических уравнениях после преобразования Ляпунова будут уничтожаться все члены второго порядка, зависящие только от ξ и η. Внесем значения (6.13) в (6.10) и подставим полученные функции в (6.4)

$$\frac{d\xi}{dt} = -\eta + \frac{\eta^3}{6} - 2k(\nu\xi^2 + b_1\xi\eta - \nu\eta^2)(\mu\xi^2 + b_3\xi\eta - \mu\eta^2) + Y^{(5)}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \xi \tag{6.14}$$

Берем функцию Ляпунова

$$V = \xi^2 + \eta^2 - {}^1/_{12}\eta^4 \tag{6.15}$$

Вычисляем производную (6.15) в силу (6.14) и требуем, чтобы выполнялось соотношение

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)^{(5)} = -4k\xi(\nu\xi^2 + b_1\xi\eta - \nu\eta^2)(\mu\xi^2 + b_3\xi\eta - \mu\eta^2) =$$
$$= -\psi_5(\xi, \eta) = -\gamma_1\xi^5\xi_* - \gamma_2\xi^4\eta\eta_* - \gamma_3\xi^3\eta^2\xi_* - \gamma_4\xi^2\eta^3\eta_* - \gamma_5\xi\eta^4\xi_* - \gamma_6\eta^5\eta_* \tag{6.16}$$

Так как в (6.16) должно быть $\gamma_i \geqslant 0$ ($i = 1, \ldots, 6$) и поскольку ν и μ — числа, то, чтобы выполнялось (6.16), необходимо взять $\nu = \mu = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = 0$ и удовлетворить условию

$$-4kb_1b_3\xi^3\eta^2 = -\gamma_3\xi^3\eta^2\xi_* \tag{6.17}$$

Берем $b_1 = \xi_*$, $b_3 = 1$; тогда $\gamma_3 = 4k > 0$. Подставляя найденные значения a_i, b_i, c_i в (6.10), получаем соотношения для выбора $u_j^{(2)}$ ($j = 1, 2$) из уравнения (2.6). Оставшиеся величины a_2, c_2, a_4, c_4 нужно выбирать так, чтобы выполнялись условия (6.12), где теперь $b_1 = \xi_*$, $b_3 = 1$. Возьмем, например, $a_2 = -{}^1/_2\xi_*$, $a_4 = -{}^1/_2$, $c_2 = c_4 = 0$, тогда получим

$$u_1^{(2)} = {}^1/_2\xi^2\xi_* + 2\xi\eta\xi_* - \eta^2\xi_*, \qquad u_2^{(2)} = {}^1/_2\xi^2 + 2\xi\eta - \eta^2 \tag{6.18}$$

Взяв, согласно (4.18), функцию Ляпунова

$$V^* = V + a\xi\eta^5 - b\xi^5\eta \tag{6.19}$$

получаем для нее при $a = b = 1$ в силу уравнений (6.14) определенно-отрицательную производную. Если изменить члены пятого порядка в (6.14), то всегда можно будет выбрать по (4.21) величины a, b в (6.19) так, чтобы dV^*/dt была определенно-отрицательной. Следовательно, при выборе управления, согласно (6.5), (6.18), укороченная система (6.14) получается асимптотически устойчивой независимо от членов выше четвертого порядка малости. Преобразование Ляпунова определяется непрерывными функциями $z_1 = \xi\eta\xi_*$, $z_2 = -{}^1/_2\xi^2\xi_*$, $z_3 = \xi\eta$, $z_4 = -{}^1/_2\xi^2$. Выполняя это преобразование, получаем в некритических уравнениях члены третьего порядка $2k\xi^2\eta\xi_*$, $X_1^{(3)*}$ в уравнениях для x_1, x_3, содержащих управления u_1, u_2. Асимптотическая устойчивость укороченной системы определяется членами до порядка $N = 4$. Для нашего примера $q = r = 2$ и согласно (2.14) имеем $p \geqslant {}^1/_2(4 + 1 - 2 + 4) = 3.5$, т. е. $p = 4$. Выписав члены третьего порядка в уравнении (2.6), можно убедиться, что при $u_1^{(3)} = u_2^{(3)} \equiv 0$ члены третьего порядка в функциях z_i (2.7) будут получаться разрывными следовательно, нельзя применить условие (2.15) и слагаемые $2k\xi^2\eta\xi_*$, $X_1^{(3)*}$ необходимо погасить при помощи управлений u_1, u_2. Таким образом, регулятор

$$u_1 = -2x_1 - x_2 + {}^1/_2\xi^2\xi_* + 2\xi\eta\xi_* - \eta^2\xi_* - X_1^{(3)*}(\xi, \eta)$$
$$u_2 = -2x_3 + {}^1/_2\xi^2 + 2\xi\eta - \eta^2 - 2k\xi^2\eta\xi_*$$

стабилизирует маятник в силу полной системы уравнений.

2. Стабилизация регулятором (2.16). Отбросим в (6.2), (6.3), (6.4) члены выше второго порядка и подставим в уравнения для критических переменных (6.4) вместо x_1, x_3 функции

$$z_1 = \frac{\xi\eta}{\sqrt{\alpha\xi^2 + \beta\eta^2}}, \qquad z_3 = \eta \tag{6.20}$$

Производная функции Ляпунова $V = \xi^2 + \eta^2$ в силу получившихся уравнений будет постоянно отрицательной

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)^{(3)} = -4k\xi z_1 z_3 = -\frac{4k\xi^2\eta^2}{\sqrt{\alpha\xi^2 + \beta\eta^2}} \leqslant 0 \tag{6.21}$$

Берем функции

$$z_2 = \frac{a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2}{\sqrt{\alpha\xi^2 + \beta\eta^2}}, \qquad z_4 = p\xi + q\eta \tag{6.22}$$

Коэффициенты a, b, c, p, q, α, β в (6.22) и управления u_1, u_2 вида (2.16) подбираем так, чтобы после преобразования Ляпунова (2.10) некритические уравнения (6.2), 6.3) не содержали членов первого порядка, зависящих только от ξ, η. Этого можно добиться, положив, например, $\alpha = \beta$, $b = c = q = 0$, $p = -1$, $a = -1/2$ и взяв управления

$$u_1 = -2x_1 - x_2 + \frac{1/2\,\xi^2 + 2\xi\eta - \eta^2}{\sqrt{\alpha}\,\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \qquad u_2 = -2x_3 + 2\eta \tag{6.23}$$

Взяв согласно (4.18) функцию Ляпунова $V^* = V + \nu\xi\eta^3 - \mu\xi^3\eta$, можно проверить, что движение $\xi = \eta = 0$ укороченной системы, получающейся при использовании в (6.2), (6.3), (6.4) управлений (6.23), асимптотически устойчиво, независимо от членов выше второго порядка. Поскольку в данном случае преобразование Ляпунова (2.10) получается непрерывным, то вместо условия (2.14) можно применить условие (2.15), согласно которому при $N = 2$ имеем $p \geqslant 1/2\,(2 + 1 - 2 + 2) = 1.5$, т. е. $p = 2$. Следовательно, члены выше первого порядка в некритических уравнениях не нарушают асимптотической устойчивости, и регулятор (6.23) стабилизирует маятник в силу полной системы уравнений.

Автор благодарит Н. Н. Красовского за советы по постановке задачи и ценные замечания.

Поступила 6 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ, 1935.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1956.
3. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Гостехиздат. 1952.
4. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959.
5. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. Автоматика и телемеханика, 1960, т. 21, № 4, 5, 6; 1961, т. 22, № 4; 1962, т. 23, № 11.
6. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления. Тр. I Конгресса ИФАК, т. II, Изд-во АН СССР, 1961.
7. Гальперин Е. А., Красовский Н. Н. О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
8. Малкин И. Г. О решении задачи устойчивости в случае двух чисто мнимых корней. ПММ, 1951, т. 15, вып. 2.
9. Малкин И. Г. Об одном способе решения задачи устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней. ПММ, 1951, т. 15, вып. 4.