Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

К ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ В КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ

Г. В. Каменков

(Москва)

Исследуется устойчивость движения, описываемого системой уравнений возмущенного движения (0.1)

$$x_s^{\cdot} = -\lambda_s y_s + X_s(x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_p, \tau), \quad y_s^{\cdot} = \lambda_s x_s + Y_s(x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_p, \tau)\ (s=1, \ldots, p)$$

где X_s и Y_s — голоморфные функции переменных $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_p$, разложение которых начинается с членов не ниже второго порядка. Коэффициентами разложения X_s и Y_s являются периодические функции с общим вещественным периодом ω.

В случае $p = 1$ и иррационального $\lambda\omega / \pi$ задача об устойчивости разрешена Ляпуновым [1].

Ниже решается задача Ляпунова для рациональных $\lambda\omega / \pi$. Исследуется случай канонических систем; результаты распространяются на системы высших порядков.

§ 1. Исследование задачи Ляпунова для рациональных $\lambda\omega / \pi$. Рассмотрим систему второго порядка

$$x^{\cdot} = -\frac{\alpha}{\beta} y + \frac{1}{\beta} \sum_{l=2}^{\infty} X^{(l)}(x, y, \tau), \qquad y^{\cdot} = \frac{\alpha}{\beta} x + \frac{1}{\beta} \sum_{l=2}^{\infty} Y^{(l)}(x, y, \tau) \tag{1.1}$$

где

$$X^{(l)} = \sum_{k_1+k_2=l} a^{(k_1, k_2)}(\tau) x^{k_1} y^{k_2}, \qquad Y^{(l)} = \sum_{k_1+k_2=l} b^{(k_1, k_2)}(\tau) x^{k_1} y^{k_2}$$

$$a^{(k_1, k_2)}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_{0n}{}^{(k_1, k_2)} \cos n\tau + a_{1n}{}^{(k_1, k_2)} \sin n\tau)$$

$$b^{(k_1, k_2)}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (b_{0n}{}^{(k_1, k_2)} \cos n\tau + b_{1n}{}^{(k_1, k_2)} \sin n\tau)$$

а α и β — целые положительные числа.

Полагая $\tau = \beta t$ и переходя к переменным ξ и η

$$x = \xi \cos \alpha t + \eta \sin \alpha t, \qquad y = \xi \sin \alpha t - \eta \cos \alpha t$$

получим

$$\xi^{\cdot} = \sum_{l=2}^{\infty} P^{(l)}(\xi, \eta, t), \qquad \eta^{\cdot} = \sum_{l=2}^{\infty} Q^{(l)}(\xi, \eta, t) \tag{1.2}$$

$$P^{(l)}(\xi, \eta, t) = X^{(l)} \cos \alpha t + Y^{(l)} \sin \alpha t = \sum_{k_1+k_2=l} A^{(k_1, k_2)}(t) \xi^{k_1} \eta^{k_2}$$

$$Q^{(l)}(\xi, \eta, t) = X^{(l)} \sin \alpha t - Y^{(l)} \cos \alpha t = \sum_{k_1+k_2=l} B^{(k_1 k_2)}(t) \xi^{k_1} \eta^{k_2}$$

$$A(t) = A(t + 2\pi) \qquad B(t) = B(t + 2\pi)$$

Преобразуем систему (1.2), положив

$$x_1 = \xi + \sum_{k_1+k_2=2}^{N_1} u^{(k_1, k_2)}(t)\, \xi^{k_1}\eta^{k_2}, \qquad y_1 = \eta + \sum_{k_1+k_2=2}^{N_1} v^{(k_1, k_2)}(t)\, \xi^{k_1}\eta^{k_2}$$

Здесь $u^{(k_1,k_2)}(t)$ и $v^{(k_1,k_2)}(t)$ — периодические функции t, подлежащие определению. В результате преобразования будем иметь

$$x_1^{\cdot} = \sum_{l=2}^{\infty} X_1^{(l)}(x_1, y_1, t), \qquad y_1^{\cdot} = \sum_{l=2}^{\infty} Y_1^{(l)}(x_1, y_1, t) \tag{1.3}$$

где

$$X_1^{(l)} = \sum_{k_1+k_2=l} \alpha^{(k_1, k_2)} x_1^{k_1} y_1^{k_2}, \qquad Y_1^{(l)} = \sum_{k_1+k_2=l} \beta^{(k_1, k_2)} x_1^{k_1} y_1^{k_2} \tag{1.4}$$

$$\alpha^{(k_1, k_2)} = A^{(k_1, k_2)} + \varphi^{(k_1, k_2)} + \frac{du^{(k_1, k_2)}}{dt}, \qquad \beta^{(k_1, k_2)} = B^{(k_1,k_2)} + \psi^{(k_1, k_2)} + \frac{dv^{(k_1, k_2)}}{dt}$$

Для значений $k_1 + k_2 = 2$ функции $\varphi^{(k_1,k_2)}$ и $\psi^{(k_1,k_2)}$ равны нулю, а для значений $k_1 + k_2 = l > 2$ они будут известными функциями от $u^{(k_1, k_2)}$, $v^{(k_1,k_2)}$, $A^{(k_1,k_2)}$, $B^{(k_1,k_2)}$, у которых $k_1 + k_2 < l$.

Определим периодические функции $u^{(k_1,k_2)}$ и $v^{(k_1,k_2)}$ так, чтобы величины $\alpha^{(k_1,k_2)}$ и $\beta^{(k_1,k_2)}$ были постоянны. Для этого необходимо и достаточно определить эти величины равенствами (1.5)

$$\alpha^{(k_1, k_2)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [A^{(k_1, k_2)} + \varphi^{(k_1, k_2)}]\, dt, \qquad \beta^{(k_1, k_2)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [B^{(k_1, k_2)} + \psi^{(k_1, k_2)}]\, dt$$

Тогда функции $u^{(k_1,k_2)}$ и $v^{(k_1,k_2)}$ определятся так

$$u^{(k_1, k_2)} = \int [\alpha^{(k_1, k_2)} - A^{(k_1, k_2)} - \varphi^{(k_1, k_2)}]\, dt$$

$$v^{(k_1, k_2)} = \int [\beta^{(k_1, k_2)} - B^{(k_1, k_2)} - \psi^{(k_1, k_2)}]\, dt$$

В результате будем иметь

$$\begin{gathered} x_1^{\cdot} = X_1^{(m)}(x_1, y_1) + X_1^{(m+1)}(x_1, y_1) + \ldots + X_1^{(m+N)}(x_1, y_1) + \\ + X_1^{(m+N+1)}(x_1, y_1, t) \\ y_1^{\cdot} = Y_1^{(m)}(x_1, y_1) + Y_1^{(m+1)}(x_1, y_1) + \ldots + Y_1^{(m+N)}(x_1, y_1) + \\ + Y_1^{(m+N+1)}(x_1, y_1, t) \end{gathered} \tag{1.6}$$

Здесь $m \geqslant 2$, $m + N = N_1$ и равно сколь угодно большому числу. Очевидно, что задачи об устойчивости в отношении переменных x_1, y_1 и x, y — эквивалентны. В дальнейшем в системе (1.6) нижний индекс 1 опускается.

Следовательно, задача Ляпунова для рациональных $\lambda\omega / \pi$ в общем случае приводится к задаче об устойчивости автономной системы с двумя нулевыми корнями, если только вопрос об устойчивости решается конечным числом членов правых частей системы (1.6). Эта система была рассмотрена в статье [2] и в статье [3].

В указанных работах формулируются необходимые и достаточные условия устойчивости и неустойчивости интегралов системы (1.6) в простейшем случае, когда вопрос решается формами m-го порядка.

Приведем формулировку этих условий. Если формы $X^{(m)}$ и $Y^{(m)}$ таковы, что уравнение

$$F_0 = xY^{(m)} - yX^{(m)} = 0$$

имеет вещественные решения

$$a_k x + b_k y = 0 \quad (k = 1, \ldots, p) \qquad p \leqslant m + 1$$

и если хотя бы на одной прямой $a_k x + b_k y = 0$ форма $R_0 = xX^{(m)} + yY^{(m)}$ может принимать положительные значения, то невозмущенное движение неустойчиво; если же на всех этих прямых $R_0 < 0$, то движение асимптотически устойчиво.

Если уравнение $F_0 = 0$ не имеет вещественных решений, отличных от $x = y = 0$, вопрос об устойчивости решается знаком выражения

$$g = F_0(\cos\theta, \sin\theta) \int_0^{2\pi} \frac{R_0(\cos\theta, \sin\theta)}{F_0(\cos\theta, \sin\theta)}\, d\theta$$

Если $g < 0$, невозмущенное движение асимптотически устойчиво, если же $g > 0$ — неустойчиво.

Случай $g = 0$ и случай, когда при $F_0 = 0$ форма R_0, кроме отрицательных значений, может обращаться в нуль на одной или нескольких прямых, являются сомнительными. Решение задачи в случае $g = 0$ не представляет особых затруднений, и он полностью исследован в статьях [2,3].

Возвращаясь к системе (1.6) и применяя к ней сформулированные критерии об устойчивости, убеждаемся, что задача Ляпунова решается в двух случаях.

1. Когда вопрос об устойчивости решается формами m-го порядка независимо от форм более высокого порядка.

2. Когда форма $F_0 = xY^{(m)} - yX^{(m)}$ — знакоопределенная.

Если же форма F_0 не является знакоопределенной и если при $F_0 = 0$ форма $R_0 \leqslant 0$, то решение вопроса об устойчивости связано с исследованием форм выше m-го порядка.

§ 2. Критерии устойчивости по формам $m + 1$-го порядка. Обращение в нуль форм F_0 и R_0 на прямых $a_k x + b_k y = 0$ возможно лишь в том случае, когда формы $X^{(m)}$ и $Y^{(m)}$ имеют общий множитель $a_k x + b_k y$. Следовательно, в сомнительном случае $F_0 = 0$ и $R_0 \leqslant 0$ эти формы можно представить в виде

$$X^{(m)} = \prod_{j=1}^{p} (a_j x + b_j y)^{\nu_j} X^{(m-k)}$$

$$Y^{(m)} = \prod_{j=1}^{p} (a_j x + b_j y)^{\nu_j} Y^{(m-k)} \quad (\nu_1 + \ldots + \nu_p) = k \tag{2.1}$$

Здесь $X^{(m-k)}$ и $Y^{(m-k)}$ — формы $m - k$-го порядка, не имеющие общих вещественных множителей вида $ax + by$.

Функции F_0 и R_0 будут иметь вид

$$F_0 = \prod_{j=1}^{p} (a_j x + b_j y)^{\nu_j} F_{-k}(x, y), \qquad R_0 = \prod_{j=1}^{p} (a_j x + b_j y)^{\nu_j} R_{-k}(x, y) \tag{2.2}$$

$$F_{-k} = xY^{(m-k)} - yX^{(m-k)}, \qquad R_{-k} = xX^{(m-k)} + yY^{(m-k)}$$

Если общие вещественные корни уравнений $X^{(m)}(1, \varkappa) = 0$ и $Y^{(m)}(1, \varkappa) = 0$ обозначить через $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p$, то общие множители $a_j x + b_j y$ будут иметь вид $-y + \varkappa_j x$, $(\varkappa_j = -a_j / b_j)$.

Исследуем вначале систему (1.6), предполагая, что в (2.1)

$$\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_p = 1, \qquad F_{-k}(\varkappa_j) \neq 0 \qquad (j = 1, \ldots, p)$$

Составим для каждой прямой $-y + \varkappa_j x = 0$ функцию

$$\Phi_j = \frac{Y^{(m-k)}(x, y)\, X^{(m+1)}(x, y) - X^{(m-k)}(x, y)\, Y^{(m+1)}(x, y)}{xY^{(m-k)} - yX^{(m-k)}} \tag{2.3}$$

Условия устойчивости по членам $m + 1$-го порядка в этом случае можно формулировать так.

Если хотя бы на одной из прямых $-y + \varkappa_j x = 0$ $(j = 1, \ldots, p)$ функция Φ_j принимает положительные значения, то невозмущенное движение неустойчиво.

Если же на всех прямых $\Phi_j < 0$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Предположим, что $\Phi_1 > 0$. Представляя систему (1.6) в виде

$$x^{\bullet} = (-y + \varkappa_1 x)\, X^{(m-1)} + X^{(m+1)} + \ldots$$
$$y^{\bullet} = (-y + \varkappa_1 x)\, Y^{(m-1)} + Y^{(m+1)} + \ldots$$

и полагая $y_1 = -y + \varkappa_1 x$, будем иметь

$$x^{\bullet} = y_1 X_*^{(m-1)}(x, y_1) + X_*^{(m+1)}(x, y_1) + \ldots$$
$$y_1^{\bullet} = y_1 Y_*^{(m-1)}(x, y_1) + Y_*^{(m+1)}(x, y_1) + \ldots \tag{2.4}$$

$$X_*^{(m+l)} = \sum_{k=0}^{m+l} A_{*k}^{(m+l)} x^{m+l-k} y_1^{\,k}, \qquad Y_*^{(m+l)} = \sum_{k=0}^{m+l} B_{*k}^{(m+l)} x^{m+l-k} y_1^{\,k}$$

$$A_{*k}^{(m+l)} = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k X^{(m+l)}(1, \varkappa_1)}{d\varkappa_1^{\,k}}$$

$$B_{*k}^{(m+l)} = \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \left[\frac{d^k Y^{(m+l)}(1, \varkappa_1)}{d\varkappa_1^{\,k}} - \varkappa_1 \frac{d^k X^{(m+l)}(1, \varkappa_1)}{d\varkappa_1^{\,k}} \right] \qquad (l = -1, 1, 2, \ldots)$$

Отметим, что

$$B_{*0}^{(m-1)} = [Y^{(m-1)}(1, \varkappa_1) - \varkappa_1 X^{(m-1)}(1, \varkappa_1)] \neq 0$$

Преобразуем систему (2.4), положив

$$x_1 = x - \mu y_1, \quad \mu = A_{*0}^{(m-1)} / B_{*0}^{(m-1)}$$

В результате будем иметь

$$x_1^{\bullet} = y_1 X_1^{(m-1)}(x_1, y_1) + X_1^{(m+1)}(x_1, y_1) + \ldots$$
$$y_1^{\bullet} = y_1 Y_1^{(m-1)}(x_1, y_1) + Y_1^{(m+1)}(x_1, y_1) + \ldots \tag{2.5}$$

$$X_1^{(m+l)} = \sum A_k^{(m+l)} x_1^{m+l-k} y_1^k, \qquad Y_1^{(m+l)} = \sum B_k^{(m+l)} x_1^{m+l-k} y_1^k$$

$$A_{m+l-q}^{(m+l)} = \frac{1}{q!} \left[\frac{d^q X_*^{(m+l)}(\mu, 1)}{d\mu^q} - \mu \frac{d^q Y_*^{(m+l)}(\mu, 1)}{d\mu^q} \right], \quad B_{m+l-q}^{(m+l)} = \frac{1}{q!} \frac{d^q Y_*^{(m+l)}(\mu, 1)}{d\mu^q}$$

Отметим, что

$$A_0^{(m+1)} = \Phi_1(1, \varkappa_1), \qquad B_0^{(m-1)} = -F_{-1}(1, \varkappa_1), \qquad A_0^{(m-1)} = 0$$

Не уменьшая общности задачи, можно положить $B_0^{(m+l)} = 0$ для $l = 1, \ldots, N$. Если эти коэффициенты не равны нулю, то заменой

$$y_1 = z + a_2 x_1^2 + \ldots + a_N x_1^N$$

и соответствующим выбором чисел $a_2, \ldots, a_N$ можно коэффициенты $B_0^{(m+l)}$ преобразованной системы обратить в нуль для $l \leqslant N$. При этом преобразовании коэффициенты форм $X_1^{(m-1)}$ и $X_1^{(m+1)}$ не изменятся. Ряд

$$y_1(x_1) = c_2 x_1^2 + c_3 x_1^3 + \ldots \tag{2.6}$$

будет формально удовлетворять уравнению, выведенному из системы (2.5) при помощи исключения времени t. Эти ряды обычно расходятся.

В результате преобразований система (1.6) примет вид

$$\begin{aligned} x_1^{\boldsymbol\cdot} &= z^2 (A_1^{(m-1)} x_1^{m-2} + \ldots + A_{m-1}^{(m-1)} z^{m-2}) + A_0^{(m+1)} x_1^{m+1} + \ldots \\ &\ldots + A_{m+1}^{(m+1)} z^{m+1} + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{m+l} H_k^{(m+l)} x_1^{m+l-k} z^k \\ z^{\boldsymbol\cdot} &= z (B_0^{(m-1)} x_1^{m-1} + \ldots + B_{m-1}^{(m-1)} z^{m-1}) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m+l} E_k^{(m+l)} x_1^{m+l-k} z^k \end{aligned} \tag{2.7}$$

Для этой системы можно построить функции V и W, удовлетворяющие теореме Четаева [4]. Положим $V = x_1^2 + z^2$. В области $x_1^4 - z^2 > 0$, $x_1 > 0$ будем иметь $V' > 0$.

За функцию W теоремы Четаева возьмем функцию $W = x_1^{2k} - z^2$, $k > 2$. Область $W > 0$ находится внутри области $VV' > 0$. Легко убедиться, что знак W' на границе области $W > 0$, на которой $W = 0$, определяется знаком выражения $-2B_0^{(m-1)} z^2 x_1^{(m-1)}$, знак которого при $x_1 > 0$ постоянен. Следовательно, невозмущенное движение, описываемое системой (1.6), в случае $\Phi_1 > 0$ неустойчиво.

Выше рассмотрена прямая $-y + \varkappa_1 x = 0$, аналогичным образом можно рассмотреть любую другую прямую $-y + \varkappa_j x = 0$.

Докажем теперь, что если на всех прямых $a_j x + b_j y$ функция $\Phi_j(x, y) < 0$ $(j = 1, \ldots, p)$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Переходя в (1.6) к полярным координатам, будем иметь

$$\begin{aligned} r^{\boldsymbol\cdot} &= r^m R_{-k} \prod_{j=1}^{p} (\varkappa_j \cos\theta - \sin\theta) + r^{m+1} R_1 + \ldots, \\ \theta^{\boldsymbol\cdot} &= r^{m-1} F_{-k} \prod_{j=1}^{p} (\varkappa_j \cos\theta - \sin\theta) + r^m F_1 + \ldots \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} R_l &= X^{(m+l)}(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta + Y^{(m+l)}(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta \\ F_l &= Y^{(m+l)}(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta - X^{(m+l)}(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta \end{aligned} \qquad (l = -k, 1, 2, \ldots)$$

Рассмотрим вначале случай, когда $F_{-k}(1, \varkappa)$ не имеет вещественных корней. Функцию Ляпунова, отвечающую системе (2.8), можно взять в виде

$$V = r \exp \int_0^\theta \psi(\theta)\, d\theta \tag{2.9}$$

определяя функцию $\psi(\theta)$ из уравнения

$$R_{-k} + \psi F_{-k} = -h(\theta) \prod_{j=1}^{p} (\varkappa_j \cos\theta - \sin\theta) \tag{2.10}$$

считая $h(\theta)$ ограниченной, непрерывной, положительной и периодической функцией θ с периодом 2π, не обращающейся в нуль ни при одном вещественном значении θ.

Для обеспечения периодичности функции $\psi(\theta)$ на функцию $h(\theta)$ наложим условие

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{F_{-k}(\theta)} h(\theta) \prod_{j=1}^{p} (\varkappa_j \cos\theta - \sin\theta)\, d\theta = -\int_0^{2\pi} \frac{R_{-k}(\theta)}{F_{-k}(\theta)}\, d\theta$$

Производная V' будет иметь вид

$$V' = r^m \exp \int_0^\theta \psi(\theta)\, d\theta \Big\{ -h(\theta) \prod_{j=1}^{p} (\varkappa_j \cos\theta - \sin\theta)^2 +$$

$$+ \frac{r}{F_{-k}} \Big[F_{-k} R_1 - R_{-k} F_1 - F_1 h \prod_{j=1}^{p} (\varkappa_j \cos\theta - \sin\theta) \Big] + \ldots \Big\}$$

Для значений θ, отличных от значений θ_j, определяемых уравнениями $\varkappa_j \cos\theta - \sin\theta = 0$, производная V' принимает только отрицательные значения. Для значений $\theta = \theta_s$ знак второго члена, стоящего в квадратных скобках, совпадает со знаком выражения

$$\frac{F_{-k} R_1 - R_{-k} F_1}{F_{-k}} = \frac{X^{(m+1)} Y^{(m-k)} - Y^{(m+1)} X^{(m-k)}}{\cos\theta\, Y^{(m-k)} - \sin\theta\, X^{(m-k)}}$$

которое по условию отрицательно. Следовательно, V' — определенно-отрицательная функция r для любых значений θ. Отсюда следует асимптотическая устойчивость невозмущенного движения.

Предположим, что уравнение $F_{-k}(1, \varkappa) = 0$ имеет вещественные корни, отличные от общих вещественных корней уравнений $X^{(m)}(1, \varkappa) = 0$ и $Y^{(m)}(1, \varkappa) = 0$. Пусть эти корни имеют значения μ_s $(s = 1, \ldots, q)$.

Тогда выражение

$$R_0 = R_{-k} \prod_{j=1}^{p} (\varkappa_j \cos\theta - \sin\theta)$$

будет отрицательным для значений θ, определяемых уравнениями $\mu_s \cos\theta - \sin\theta = 0$. В противном случае будем иметь неустойчивые интегральные кривые.

Определим теперь функцию $\psi(\theta)$ в интервале $(0, 2\pi)$, а следовательно, и для любых вещественных значений θ из уравнения (2.10) следующим образом: положим $\psi \equiv 0$ в интервалах $\theta_{\mu_s} - \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \theta_{\mu_s} + \varepsilon$. Для этого достаточно $h(\theta)$ определить из уравнения

$$R_{-k} = -h(\theta)\prod_{j=1}^{p}(\varkappa_j\cos\theta - \sin\theta)$$

Такое определение $h(\theta)$ возможно в силу условия $R_0 < 0$ в интервалах $\theta_{\mu_s} - \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \theta_{\mu_s} + \varepsilon$. На функцию $h(\theta)$ в интервале $(0,2\pi)$ наложим условие, чтобы

$$\int_0^{2\pi}\psi(\theta)\,d\theta = 0$$

которому всегда можно удовлетворить, предполагая $h(0) = h(2\pi)$.

При таком выборе функции ψ производная V' будет определенно-отрицательной для вещественных значений θ. Следовательно, невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Рассмотрим случай, когда $\nu_j \geqslant 1$ $(j = 1, \ldots, p)$. Это может иметь место, когда уравнения $X^{(m)}(1, \varkappa) = 0$ и $Y^{(m)}(1, \varkappa) = 0$ имеют общие кратные вещественные корни. Приведем формулировку условий устойчивости по формам $m+1$ порядка для этого случая.

Невозмущенное движение асимптотически устойчиво при любых $\nu_1, \ldots, \nu_p$, если формы (2.1) таковы, что

(1) Уравнение $F_{-k}(1, \varkappa) = 0$, не имея корней, равных $\varkappa_1, \ldots \varkappa_p$, имеет по крайней мере, один вещественный корень $\varkappa^0$.

(2) Функции $\Phi_j < 0$ на всех прямых $y = \varkappa_j x$ $(j = 1, \ldots, p)$.

Невозмущенное движение также асимптотически устойчиво, если уравнение $F_{-k}(1, \varkappa) = 0$ не имеет вещественного решения, но среди чисел $\nu_1, \ldots, \nu_p$ имеется, по крайней мере, одно нечетное число и если при этом $\Phi_j < 0$ на всех прямых $y = \varkappa_j x$.

Если $\nu_1, \ldots, \nu_p$ — четные и уравнение $F_{-k}(1, \varkappa) = 0$ не имеет вещественных решений, то невозмущенное движение будет асимптотически устойчивым при наличии неравенства

$$F(\cos\theta, \sin\theta)\int_0^{2\pi}\frac{R_{-k}(\cos\theta, \sin\theta)}{F_{-k}(\cos\theta, \sin\theta)}\,d\theta < 0 \quad \text{при } \Phi_j < 0,\ y = \varkappa_j x$$

Отметим, что в случае четных $\nu_1, \ldots, \nu_p$ можно предполагать, что формы $R_{-k}(x, y) < 0$ при $y = \varkappa^0 x$.

Доказательство этих утверждений аналогично вышеизложенному, за исключением случая, когда все $\nu_1, \ldots, \nu_p$ — четные, а уравнение $F_{-k}(1,\varkappa) = 0$ не имеет вещественных корней. Исследуем этот случай. Возьмем функцию Ляпунова в прежнем виде. Функцию $\psi(\theta)$ определим из уравнения

$$R_{-k} + \psi F_{-k} = -h(\theta)\prod_{j=1}^{p}(\varkappa_j\cos\theta - \sin\theta)^2$$

Условие периодичности функции $\psi(\theta)$ имеет вид

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{F_{-k}}\,h(\theta)\prod_{j=1}^{p}(\varkappa_j\cos\theta - \sin\theta)^2\,d\theta = -\int_0^{2\pi}\frac{R_{-k}(\theta)}{F_{-k}(\theta)}\,d\theta$$

Это условие всегда удовлетворяется соответствующим выбором $h(\theta) > 0$, если

$$F_{-k}\int_0^{2\pi}\frac{R_{-k}}{F_{-k}}\,d\theta < 0$$

Дальнейшее доказательство проводится аналогично случаю, когда показатели $\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_p = 1$.

Рассмотрим теперь случай $\Phi_j > 0$, $\nu_j \geqslant 2$. При решении этой задачи ограничимся исследованием одного кратного корня $\varkappa_1$ $(p = 1)$.

В этом случае система (2.8) представится в виде

$$r^{\boldsymbol\cdot} = r^m(\varkappa_1\cos\theta - \sin\theta)^{\nu_1}R_{-\nu_1} + r^{m+1}R_1 + \ldots$$

$$\theta^{\boldsymbol\cdot} = r^{m-1}(\varkappa_1\cos\theta - \sin\theta)^{\nu_1}F_{-\nu_1} + r^mF_1 + \ldots$$

Предполагая, что формы m-го порядка определяют неасимптотически устойчивые интегральные кривые, возьмем функцию Ляпунова в прежнем виде (2.9). Пусть ν_1 — нечетное число. Определим функцию $\psi(\theta)$ из уравнения

$$R_{-\nu_1} + \psi F_{-\nu_1} = h(\theta)\,(\varkappa_1\cos\theta - \sin\theta)$$

Функцию $h(\theta) > 0$ найдем из условия периодичности функции $\psi(\theta)$. Тогда при $\Phi_1 > 0$ производная V' будет определенно-положительной, что обеспечивает неустойчивость невозмущенного движения.

Если ν_1 — четное и уравнение $F_{-\nu_1}(1, \varkappa) = 0$ не имеет вещественных корней, то при $\Phi_1 > 0$ невозмущенное движение будет неустойчиво если произведение

$$F_{-\nu_1}(\cos\theta, \sin\theta)\int_0^{2\pi}\frac{R_{-\nu_1}(\cos\theta, \sin\theta)}{F_{-\nu_1}(\cos\theta, \sin\theta)}\,d\theta > 0$$

Доказательство этого предложения аналогично вышеизложенному.

Руководствуясь соображениями, изложенными в § 2, случай $\nu_j \geqslant 2$ можно исследовать более подробно, но ввиду частности подобных систем на этом останавливаться не будем.

§ 3. Критерии устойчивости по формам высших порядков. Рассмотрим сомнительный случай, когда $\Phi_j = 0$ на прямых $-y + \varkappa_j x = 0$ $(j = 1, \ldots, p_1)$, а на прямых $(j = p_1 + 1, \ldots, p)$ принимает отрицательные значения $(\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_p = 1)$.

Формулировать критерии устойчивости по структуре правых частей уравнений (1.6) весьма сложно. Поэтому в дальнейшем формулировки будут относиться к системе (2.7).

Отметим, что для любого преобразования $y_j = -y + \varkappa_j x$ будем получать системы, аналогичные (2.7). Предположим, что в одной из таких систем $\Phi_j = 0$, а первый отличный от нуля коэффициент $H_0^{(m+l)}$ имеет индекс $l = \alpha_j < N$. Докажем, что в случае $H_0^{(m+\alpha_j)} > 0$ невозмущенное движение неустойчиво. Возьмем функцию Четаева в виде $V = x_1^2 + z^2$. Знак производной ее в области $-z^2 + x_1^{2k} > 0$, $x_1 > 0$ при $2k = 3 + \alpha_j$ определяется знаком выражения $H_0^{(m+\alpha_j)}x_1^{m+\alpha_j+1}$, которое при $x_1 > 0$ является величиной положительной. Следовательно, в выбранной области будем иметь $VV' > 0$.

В области $VV' > 0$ возьмем функцию $W = -z^2 + x_1^{2(k+1)}$. Производная этой функции при $W = 0$ сохраняет постоянный знак. Это доказывает неустойчивость невозмущенного движения.

Если окажется, что на прямых $-y + \varkappa_j x = 0$, $(j = 1, \ldots, p)$, на которых $\Phi_j = 0$, коэффициенты $H_0^{(m+\alpha_j)} < 0$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво. Доказательство этого предложения в основном совпадает с доказательством, изложенным в § 2, поэтому приводить его не будем.

Может случиться, что как бы не было велико число N, коэффициенты $H_0^{(m+l)}$, отличные от нуля, будут иметь индекс $l > N$. Этот случай будет существенно особенным, и если каким-нибудь образом это удастся установить для одной из прямых, например $-y + \varkappa_1 x = 0$, то ряд (2.6) будет сходящимся и представит корень уравнения

$$y_1 Y^{(m-1)}(x_1, y_1) + Y^{(m+1)}(x_1, y_1) + \ldots = 0$$

Система (2.5) заменой $y_1 = z + c_2 x_1^2 + c_3 x_1^3 + \ldots$ приведется к виду

$$x_1^{\bullet} = z[X_*^{(m-1)}(x_1, z) + X_*^{(m+1)}(x_1, z) + X_*^{(m+2)}(x_1, z) + \ldots]$$

$$z^{\bullet} = z[Y_*^{(m-1)}(x_1, z) + Y_*^{(m+1)}(x_1, z) + Y_*^{(m+2)}(x_1, z) + \ldots]$$

Эту систему можно исследовать аналогичным путем, учитывая, что $z = 0$ является особенной линией.

Отметим, что в случае знакоопределенности формы F_{-1} интегралы этой системы всегда устойчивы, но не асимптотически.

§ 4. Исследование случая $X^{(m)}(1, \varkappa_1) = 0$, $Y^{(m)}(1, \varkappa_1) = 0$, $F_{-k}(1, \varkappa_1) = 0$. Рассмотрим теперь случай, когда общий вещественный корень уравнений $X^{(m)}(1, \varkappa_1) = 0$, $Y^{(m)}(1, \varkappa_1) = 0$ является корнем уравнения $F_{-k}(1, \varkappa_1) = 0$. Этот случай, ввиду его частности, здесь не будем исследовать со всеми подробностями, а ограничимся предположением, что общий вещественный корень

$$X^{(m)}(1, \varkappa_1) = 0, \qquad Y^{(m)}(1, \varkappa_1) = 0, \qquad F_{-k}(1, \varkappa_1) = 0$$

не является корнем уравнений

$$Y^{(m+1)}(1, \varkappa) - \varkappa X^{(m+1)}(1, \varkappa) = 0,$$

$$3X^{(m-1)}(1, \varkappa) - 2\left[\frac{dY^{(m-1)}(1, \varkappa)}{d\varkappa} - \varkappa \frac{dX^{(m-1)}(1, \varkappa)}{d\varkappa}\right] = 0$$

Докажем, что интегралы системы уравнений (1.6) при этих предположениях всегда неустойчивы.

Полагая в системе $y_1 = -y + \varkappa_1 x$, получим систему (2.4), в которой $B_{*0}^{(m-1)} = 0$, $A_{*0}^{(m-1)} \neq 0$. Равенство $A_{*0}^{(m-1)} = 0$ может иметь место в случае $\nu_1 \geqslant 2$. Исключая из системы (2.4) dt, получим уравнение

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{y_1^2 (B_{*1}^{(m-1)} x^{m-2} + \ldots + B_{*m-1}^{(m-1)} y_1^{m-2}) + B_{*0}^{(m+1)} x^{m+1} + \ldots}{y_1 (A_{*0}^{(m-1)} x^{m-1} + \ldots + A_{*m-1}^{(m-1)} y_1^{m-1}) + A_{*0}^{m+1} x^{m+1} + \ldots} \tag{4.1}$$

Это уравнение заменой $y_1 = [z(x) + h]\, x^{3/2}$ приводится к виду

$$x \frac{dz}{dx} = \delta z + x\varphi_1(x, z) + x^{1/2} \varphi_2(x, z) \tag{4.2}$$

если число h определить из уравнения

$$[{}^3/_2 A_{*0}^{(m-1)} - B_{*1}^{(m-1)}]\, h^2 = B_{*0}^{(m+1)}$$

Вещественное решение для h можем получить в том случае, если знак разности, стоящей в квадратных скобках, совпадает со знаком $B_{*0}^{(m+1)}$. Для любой системы этого можно добиться заменой x на $-x$ в случае четного m, и заменой x на $-x$ и y на $-y$ в случае нечетного m.

Легко показать, что уравнение (4.2) при δ, не равном целому положительному числу, имеет голоморфный интеграл

$$z(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k x^k + x^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} D_k x^k \tag{4.3}$$

Подставляя значение $y_1 = [z(x) + h]\, x^{3/2}$ в первое уравнение системы (2.4), будем иметь

$$\frac{dx}{dt} = A_{*0}^{(m-1)} h x^{m+1/2} + x^{m+1} f(x, x^{1/2}) \tag{4.4}$$

Если число h выберем таким образом, чтобы $A_{*0}^{(m-1)} h$ было величиной положительной, то из (4.4) будет следовать, что невозмущенное движение неустойчиво. В случае δ, равного целому положительному числу, интеграл (4.3) будет голоморфным в отношении x, $x^{1/2}$ и $x \ln x$. Выводы останутся прежними.

В заключение рассмотрим случай $F_0 \equiv 0$. Это тождество возможно лишь тогда, когда $X^{(m)} = xX^{(m-1)}(x, y)$, $Y^{(m)} = yX^{(m-1)}(x, y)$. Если форма $X^{(m-1)}(x, y)$ может принимать положительные значения, то невозмущенное движение неустойчиво, так как $R = (x^2 + y^2)\, X^{(m-1)}(x, y)$.

Следовательно, устойчивость может иметь место, когда форма $X^{(m-1)}(x, y)$ определенно-отрицательная, или когда она имеет вид

$$X^{(m-1)}(x, y) = -\prod_{j=1}^{p} (a_j x + b_j y)^{2\nu_j}$$

Этот случай нами уже рассмотрен.

Если $X^{(m-1)}(x, y)$ — определенно-отрицательная, то невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво независимо от форм высших порядков. Функцию Ляпунова для таких систем можно взять в виде $V = x^2 + y^2$.

Изложенное в § 2—4 решает задачу Ляпунова в более общих случаях.

§ 5. Канонические системы. В качестве приложения исследуем устойчивость колебаний гамильтоновой системы с функцией

$$H = \frac{\alpha}{2\beta}(x^2 + y^2) + \frac{1}{\beta}\, [(a^{(3,0)}x^3 + a^{(2,1)}x^2 y + a^{(1,2)}xy^2 + a^{(0,3)}y^3 + \\ + H^{(4)}(x, y, \tau) + \ldots] \tag{5.1}$$

где

$$a^{(k_1, k_2)} = \sum (\delta_n^{(k_1, k_2)} \cos n\tau + \gamma_n^{(k_1, k_2)} \sin n\tau), \qquad H^{(l)} = \sum_{k_1+k_2=l} a^{(k_1, k_2)} x^{k_1} y^{k_2},$$

$\delta_n^{(k_1, k_2)}$, $\gamma_n^{(k_1, k_2)}$ — вещественные постоянные.

Частные случаи этой задачи рассматривались в работах Леви-Чивита [5], Зигеля [6], Г. А. Мермана [7].

Система уравнений с функцией Гамильтона вида (5.1) представится в следующем виде:

$$x^{\cdot} = -\alpha y - a^{(2,1)}x^2 - 2a^{(1,2)}xy - 3a^{(0,3)}y^2 - \frac{\partial H^{(4)}(x, y, t)}{\partial y} - \ldots$$

$$y^{\cdot} = \alpha x + 3a^{(3,0)}x^2 + 2a^{(2,1)}xy + a^{(1,2)}y^2 + \frac{\partial H^{(4)}(x, y, t)}{\partial x} + \ldots \qquad (\tau = \beta t) \quad (5.2)$$

Преобразовывая эту систему согласно § 1, получим (5.3)

$$x_1^{\cdot} = \alpha^{(2,0)}x_1^2 + \alpha^{(1,1)}x_1y_1 + \alpha^{(0,2)}y_1^2 + X_1^3(x_1, y_1) + \ldots + X_1^{(N)}(x_1, y_1) + X_1^{(N+1)}(x_1, y_1, t) + \ldots,$$

$$y_1^{\cdot} = \beta^{(2,0)}x_1^2 + \beta^{(1,1)}x_1y_1 + \beta^{(0,2)}y_1^2 + Y_1^3(x_1, y_1) + \ldots + Y_1^{(N)}(x_1, y_1) + Y_1^{(N+1)}(x_1, y_1, t) + \ldots$$

Постоянные α^{k_1,k_2} и β^{k_1,k_2} $(k_1 + k_2 = 2)$ в силу каноничности системы (5.2) будут удовлетворять условиям

$$\beta^{(1,1)} = -2\alpha^{(2,0)}, \quad \alpha^{(1,1)} = -2\beta^{(0,2)} \qquad (5.4)$$

$$\alpha^{(2,0)} = {}^1/_8\,(-3\gamma_1^{(3,0)} + 3\gamma_3^{(3,0)} - 3\gamma_3^{(1,2)} + \gamma_1^{(1,2)} - \delta_1^{(2,1)} - 3\delta_3^{(2,1)} - 3\delta_1^{(0,3)} + 3\delta_3^{(0,3)})$$

$$\beta^{(0,2)} = {}^1/_8\,(-3\delta_1^{(3,0)} + 3\delta_3^{(3,0)} - \delta_1^{(1,2)} - 3\delta_3^{(1,2)} - \gamma_1^{(2,1)} + 3\gamma_3^{(2,1)} - 3\gamma_1^{(0,3)} - 3\gamma_3^{(0,3)})$$

$$\alpha^{(0,2)} = {}^3/_8\,(3\gamma_1^{(3,0)} - \gamma_3^{(3,0)} + \gamma_1^{(1,2)} + \gamma_3^{(1,2)} - \delta_1^{(2,1)} + \delta_3^{(2,1)} - 3\delta_1^{(0,3)} - \delta_3^{(0,3)})$$

$$\beta^{(2,0)} = {}^3/_8\,(-\delta_3^{(3,0)} - 3\delta_1^{(3,0)} - \delta_1^{(1,2)} + \delta_3^{(1,2)} - \gamma_1^{(2,1)} - \gamma_3^{(2,1)} - 3\gamma_1^{(0,3)} + \gamma_3^{(0,3)})$$

Согласно критериям устойчивости по формам m-го порядка, интегралы системы (5.3) при $X^{(l)} = Y^{(l)} \equiv 0$ $(l \geqslant 3)$ в общем случае могут быть устойчивы, если

(1) $\qquad \alpha^{(k_1,k_2)} = \beta^{(k_1,k_2)} = 0 \qquad (k_1 + k_2 = 2)$

(2) формы второго порядка имеют общий множитель вида $ax + by$, и форма $F_{-1}(x, y)$ знакоопределенна.

Во всех других случаях движение неустойчиво. Легко убедиться, что для канонических систем, в силу условий $\beta^{(1,1)} = -2\alpha^{(2,0)}$ и $\alpha^{(1,1)} = -2\beta^{(0,2)}$, второй случай не имеет места.

Первый случай может представиться, если $\beta > 3\alpha$, или, когда (5.4) при отличных от нуля $\delta_1^{(k_1,k_2)}$, $\gamma_1^{(k_1,k_2)}$, $\delta_3^{(k_1,k_2)}$, $\gamma_3^{(k_1,k_2)}$ приводят к равенствам $\alpha^{(k_1,k_2)} = \beta^{(k_1,k_2)} = 0$. В этом случае вопрос об устойчивости будет решаться формами более высокого порядка. Предположим, что наинизшие формы, не равные тождественно нулю, есть $X^{(m)}$ и $Y^{(m)}$. Тогда устойчивость по формам m-го порядка возможна лишь в двух случаях:

(1°) форма $R_0 = 0$ при $F_0(x, y) = 0$.

(2°) функция $F_0(x, y)$ знакоопределенная и

$$g = F_0(\cos\theta, \sin\theta)\int_0^{2\pi} \frac{R_0(\cos\theta, \sin\theta)}{F_0(\cos\theta, \sin\theta)}\,d\theta = 0$$

Случай $R_0 \leqslant 0$ при $F_0(x, y) = 0$ и случай $g < 0$ для канонических систем не имеет места, так как приводит к асимптотически устойчивым интегралам, что противоречит теореме Лиувилля.

Если же форма R_0 при $F_0(x, y) = 0$ принимает положительные значения, а также если $g > 0$ при знакоопределенной функции $F_0(x, y)$, то невозмущенное движение неустойчиво.

Для исследования случаев 1° и 2° необходимо привлечь к рассмотрению формы высших порядков. Рассмотрим формы $m+1$-го порядка.

Применяя критерий устойчивости, можно убедиться, что для канонических систем устойчивость в случае 1° возможна только тогда, когда при $F_0(x, y) = 0$ функции Φ_j также обращаются в нуль. В противном случае получим только неустойчивость, так как случай асимптотической устойчивости для канонических систем невозможен. К такому же заключению придем, рассматривая случай 2°.

Рассматривая формы выше $m+1$-го порядка, например формы $m+k$-го порядка, придем к аналогичным заключениям, т. е. будем получать или неустойчивость или встретимся опять с сомнительным случаем, когда формы $m+k$-го порядка вопроса об устойчивости не решают. Таким образом, как для рациональных λ, так и для иррациональных λ, устойчивость может иметь место лишь в существенно особенных случаях.

§ 6. Системы высших порядков. Рассмотрим систему (0.1), предполагая, что все λ_s иррациональны и между ними не существует соотношения

$$\sum_{s=1}^{n} m_s\lambda_s = 0 \qquad \text{для } \sum |m_s| \leqslant N \qquad (A)$$

где m_s — целые числа.

Полагая $z_s = x_s + iy_s$, $\bar{z}_s = x_s - iy_s$, получим

$$z_s^{\cdot} = i\lambda_s z_s + Z_s(z_1, \ldots, z_p, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p, \tau), \qquad \bar{z}_s^{\cdot} = -i\lambda_s\bar{z}_s + \bar{Z}_s(z_1, \ldots, z_p, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p, \tau) \quad (6.1)$$

Здесь

$$Z_s = \sum_{l=2}^{\infty} Z_s^{(l)}, \qquad \bar{Z}_s = \sum_{l=2}^{\infty} \bar{Z}_s^{(l)} \qquad (s = 1, \ldots, p)$$

$$Z_s^{**} = \sum A_s^{**}(\tau) z_1^{k_1} \ldots z_p^{k_p} \bar{z}_1^{n_1} \ldots \bar{z}_p^{n_p}$$

$$\bar{Z}_s^{**} = \sum \bar{A}_s^{**}(\tau) \bar{z}_1^{k_1} \ldots \bar{z}_p^{k_p} z_1^{n_1} \ldots z_p^{n_p}$$

$$A_s^{**}(\tau) = A_s^{**}(\tau + 2\pi) \qquad (k_1 + \cdots + k_p + n_1 + \cdots + n_p \geqslant 2)$$

Здесь и дальше одна звездочка означает верхний индекс $(k_1, \ldots, k_p)$, две звездочки — верхний индекс $(k_1, \ldots, k_p, n_1, \ldots, n_p)$.

Переходя к переменным ζ_s и $\bar{\zeta}_s$

$$\begin{aligned} \zeta_s &= z_s + \sum u_s^{**}(\tau) z_1^{k_1} \ldots z_p^{k_p} \bar{z}_1^{n_1} \ldots \bar{z}_p^{n_p} \\ \bar{\zeta}_s &= \bar{z}_s + \sum \bar{u}_s^{**}(\tau) \bar{z}_1^{k_1} \ldots \bar{z}_p^{k_p} z_1^{n_1} \ldots z_p^{n_p} \end{aligned} \qquad (6.2)$$

определим функции $u_s^{**}(\tau)$ и $\bar{u}_s^{**}(\tau)$ так, чтобы в правой части преобразованной системы $2N+1$ первых форм не содержали явно τ.

Такое определение функций $u_s^{**}(\tau)$ и $\bar{u}_s^{**}(\tau)$ всегда возможно, причем эти функции будут непрерывными и периодическими с периодом 2π. В результате получим

$$\zeta_s^{\cdot} = i\lambda_s\zeta_s + \zeta_s \sum_{k_1+\cdots+k_p\leqslant N} C_s^* (\zeta_1, \bar{\zeta}_1)^{k_1} \cdots (\zeta_p, \bar{\zeta}_p)^{k_p} + P_s(\zeta_1, \ldots, \zeta_p, \bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_p, \tau)$$

В этой системе C_s^* — постоянные, а P_s — голоморфные функции ζ_s и $\bar{\zeta}_s$, не содержащие в своих разложениях членов ниже $2N + 2$-го порядка; коэффициентами разложения этих функций будут непрерывные периодические функции τ с периодом 2π. Число N можно взять достаточно большим.

Полагая

$$\zeta_s = \xi_s + i\eta_s, \qquad C_s^* = \alpha_s^* + i\beta_s^*$$

получим

$$\xi_s^{\cdot} = -\lambda_s\eta_s + \xi_s \sum_{k_1+\cdots+k_p\geqslant 1}^{N} \alpha_s^* (\xi_1^2 + \eta_1^2)^{k_1} \cdots (\xi_p^2 + \eta_p^2)^{k_p} -$$

$$- \eta_s \sum_{k_1+\cdots+k_p\geqslant 1}^{N} \beta_s^* (\xi_1^2 + \eta_1^2)^{k_1} \cdots (\xi_p^2 + \eta_p^2)^{k_p} + K_s(\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta_1, \ldots, \eta_p, \tau) \quad (6.3)$$

$$\eta_s^{\cdot} = \lambda_s\xi_s + \xi_s \sum_{k_1+\cdots+k_p\geqslant 1}^{N} \beta_s^* (\xi_1^2 + \eta_1^2)^{k_1} \cdots (\xi_p^2 + \eta_p^2)^{k_p} +$$

$$+ \eta_s \sum_{k_1+\cdots+k_p\geqslant 1}^{N} \alpha_s^* (\xi_1^2 + \eta_1^2)^{k_1} \cdots (\xi_p^2 + \eta_p^2)^{k_p} + L_s(\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta_1, \ldots, \eta_p, \tau)$$

где K_s и L_s не содержат членов ниже $2N + 2$-го порядка. Полагая $\xi_s = r_s \cos\theta_s$, $\eta_s = r_s \sin\theta_s$, будем иметь

$$r_s^{\cdot} = r_s \sum \alpha_s^* r_1^{2k_1} \cdots r_p^{2k_p} + R_s(r_1, \ldots, r_p, \theta_1, \ldots, \theta_p, \tau)$$

$$r_s\theta_s^{\cdot} = \lambda_s r_s + r_s \sum \beta_s^* r_1^{2k_1} \cdots r_p^{2k_p} + F_s(r_1, \ldots, r_p, \theta_1, \ldots, \theta_p, \tau) \quad (6.4)$$

$$(2 \leqslant k_1 + \cdots + k_p \leqslant N, \ s = 1, \ldots, p)$$

В тех случаях, когда вопрос об устойчивости решается конечным числом членов правых частей системы уравнений (6.4), исследование устойчивости ее интегралов сводится к задаче об устойчивости систем p-го порядка с p нулевыми корнями, представляемой первой группой уравнений этой системы. Этот случай рассмотрен в работе [8].

Рассмотрим теперь случай рациональных $\lambda_s = \alpha_{s1} / \beta_{s1}$ (α_{s1}, β_{s1} — целые положительные числа). Пусть число β — наименьшее кратное всех β_{s1}. Полагая $\tau = \beta t$ и переходя к переменным ξ_s и η_s по формулам

$$x_s = \xi_s \cos\alpha_s t + \eta_s \sin\alpha_s t, \qquad y_s = \xi_s \sin\alpha_s t - \eta_s \cos\alpha_s t \qquad (\alpha_s = \beta\alpha_{s1} / \beta_{s1})$$

получим (6.5)

$$\xi_s^{\cdot} = \sum_{l=2}^{\infty} P_s^{(l)}(\xi_1, \ldots, \xi_p; \eta_1, \ldots, \eta_p, t), \qquad \eta_s^{\cdot} = \sum_{l=2}^{\infty} Q_s^{(l)}(\xi_1, \ldots, \xi_p; \eta_1, \ldots, \eta_p, t) \qquad (s=1, \ldots, p)$$

Производя замену (6.6)

$$x_{s1} = \xi_s + \sum u_s^{**} \xi_1^{k_1} \cdots \xi_p^{k_p} \eta_1^{n_1} \cdots \eta_p^{n_p}$$

$$y_{s1} = \eta_s + \sum v_s^{**}(t) \xi_1^{k_1} \cdots \xi_p^{k_p} \eta_1^{n_1} \cdots \eta_p^{n_p} \ (2 \leqslant k_1 + \cdots + k_p + n_1 + \cdots + n_p \leqslant N)$$

Определим функции u_s и v_s так, чтобы в преобразованной системе N первых форм имели постоянные коэффициенты.

Такое определение функций u_s и v_s всегда возможно. В результате будем иметь

$$x_{s1}^{\cdot} = X_{s1}^{(m)}(x_{11}, \ldots, x_{p1}; y_{11}, \ldots, y_{p1}) + \cdots + X_{s1}^{(m+N)}(x_{11}, \ldots, x_{p1}, y_{11}, \ldots, y_{p1}) +$$
$$+ X_{s1}^{(m+N+1)}(x_{11}, \ldots, x_{p1}; y_{11}, \ldots, y_{p1}, t) + \cdots$$
$$y_{s1}^{\cdot} = Y_{s1}^{(m)}(x_{11}, \ldots, x_{p1}; y_{11}, \ldots, y_{p1}) + \cdots + Y_{s1}^{(m+N)}(x_{11}, \ldots, x_{p1}, y_{11}, \ldots, y_{p1}) +$$
$$+ Y_{s1}^{(m+N+1)}(x_{11}, \ldots, x_{p1}; y_{11}, \ldots, y_{p1}, t) + \cdots$$
$$(m \geqslant 2,\ s = 1, \ldots, p) \tag{6.7}$$

Таким образом, исследование системы (6.1) в случае рациональных λ_s приводится к исследованию системы $2p$ уравнений с $2p$ нулевыми корнями, причем формы $X_{s1}^{(l)}$ и $Y_{s1}^{(l)}$ для $l \leqslant m + N$ могут иметь любые постоянные коэффициенты.

Примечание 1. Если система (6.1) имеет μ пар чисто мнимых корней с иррациональными λ_s и ν пар с рациональными ($\mu + \nu = p$), то, комбинируя преобразования (6.2) и (6.6), всегда можно эту систему преобразовать к системе $\mu + 2\nu$-го порядка с $\mu + 2\nu$ нулевыми корнями, если иррациональные λ_s удовлетворяют условию (A).

Примечание 2. Задача Ляпунова и задача об устойчивости в случае p пар чисто мнимых корней рассматривается здесь только для случая одних критических переменных. Легко убедиться, что выводы остаются справедливыми и для более общего случая, когда система (6.1), кроме p пар чисто мнимых корней, имеет еще n корней с отрицательными вещественными частями.

Отметим, что задача об устойчивости в случае иррациональных λ_s в общем случае допускает значительные упрощения и в случае $p = 1$ приводится к исследованию одного уравнения, которое получается из (6.3) заменой $\xi_1 = r\cos\theta$, $\eta_1 = r\sin\theta$. Это уравнение имеет вид $r^{\cdot} = \alpha^{(m)} r^m + \ldots$ Число $\alpha^{(m)}$ соответствует числу g, фигурирующему в методе Ляпунова [1]. В случае рациональных λ_s задача значительно усложняется. Эти усложнения, как видно из § 2—4, не исчезают и в случае $p = 1$, так как исследование системы (1.6) сопряжено с большими затруднениями.

Если для систем второго порядка (1.6) удалось сформулировать необходимые и достаточные условия устойчивости по формам второго порядка и разобрать наиболее общие случаи устойчивости по формам высших порядков, то для системы (6.7) таких общих условий устойчивости и неустойчивости найти не удается.

Один критерий неустойчивости по формам m-го порядка для систем (6.7) был получен автором в работе [8]. Приведем его формулировку.

Если система уравнений

$$x_s^{\cdot} = X_s^{(m)}(x_1, \ldots, x_n) + X_s^{(m+1)}(x_1, \ldots, x_n) + \cdots \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{6.8}$$

такова, что формы

$$F_{sk} = x_k X_s^{(m)} - x_s X_k^{(m)}$$

при любом фиксированном k и при $s = 1, 2 \ldots k-1, k+1, \ldots, n$ имеют вещественные решения, отличные от $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, и если форма

$$R = \sum_{s=1}^{n} x_s X_s^{(m)}(x_1, \ldots, x_n)$$

при $F_{sk} = 0$ может принимать положительные значения, то невозмущенное движение неустойчиво.

Следовательно, при наличии вещественных корней у системы уравнений $F_{sk} = 0$ устойчивость может иметь место только тогда, когда при всех значениях $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условию $F_{sk} = 0$, выражение $R \leqslant 0$.

В случае λ_s иррациональных система (6.1) приводится к системе (6.4), у которой формы $X_s^{(m)}$ таковы, что уравнения $F_{sk} = 0$ принимают вид

$$F_{sk} = r_s r_k (R_s^{(m-1)} - R_k^{(m-1)}) = 0$$
$$R_s^{(m-1)} = \sum \alpha^* r_1^{2k_1} \cdots r_p^{2k_p} \qquad (2k_1 + 2k_2 + \cdots + 2k_p = m - 1)$$

Система этих уравнений всегда имеет вещественные решения, отличные от $r_1 = r_2 = \ldots = r_p = 0$.

В случае λ_s рациональных такие решения будут при любых четных m. В случае нечетных m система уравнений $F_{sk} = 0$ может и не иметь вещественных решений, кроме $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Из приведенного критерия неустойчивости по формам m-го порядка следует, что формы F_{sk} и R играют весьма существенную роль в вопросах устойчивости интегралов системы (6.8).

Поэтому представляет интерес получить новую форму уравнений возмущенного движения, в правые части которой входили бы формы F_{sk} и R непосредственно. Преобразуем с этой целью систему (6.8), положив $x_s = ry_s (s = 1, 2, \ldots, n)$. Пусть $y_1^2 + \ldots + y_n^2 = 1$. Тогда $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = r^2$.

Дифференцируя последнее равенство по t и определяя производные от $y_1, \ldots, y_n$ по t в силу уравнений (6.8), получим новую систему вида

$$\frac{dr}{dt} = r^m R_0 + r^{m+1} R_1 + \cdots$$

$$\frac{dy_s}{dt} = r^{m-1}(y_1 F_{s1}^{(0)} + y_2 F_{s2}^{(0)} + \cdots + y_n F_{sn}^{(0)}) + r^m \sum_{k=1}^{n} y_k F_{sk}^{(1)} + \cdots$$

$$(s = 1, \ldots, n) \tag{6.9}$$

$$\sum_{s=1}^{n} y_s^2 = 1, \qquad R_l = \sum_{s=1}^{n} y_s X_s^{(m+l)}(y_1, y_2 \ldots, y_n) \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$F_{sk}^{(l)} = y_k X_s^{(m+l)}(y_1, \ldots, y_n) - y_s X_k^{(m+l)}(y_1, \ldots, y_n)$$

Отметим, что

$$F_{ss}^{(l)} \equiv 0, \qquad F_{sk}^{(l)} = -F_{ks}^{(l)}$$

Перепишем теперь первую группу уравнений (6.4) в виде

$$r_s^{\cdot} = r_s R_s^{(m-1)} + r_s R_s^{(m+1)} + \cdots \qquad \left(R_s^{(l)} = \sum_{2k_1+\cdots+2k_p=l} \alpha_s^* r_1^{2k_1} \cdots r_p^{2k_p}\right)$$

Полагая

$$r_s = ry_s, \quad z_s = y_s^2, \quad \rho = r^2 = \sum_{s=1}^{p} r_s^2, \quad m = 2k + 1$$

и учитывая, что

$$F_{sk} = r_s r_k (R_s - R_k) = r_s r_k R_{sk}$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= 2\rho^{k+1} R_0(z_1, \ldots, z_p) + 2\rho^{k+2} R_1(z_1, \ldots, z_p) + \cdots \\ \frac{dz_s}{dt} &= 2\rho^k z_s (z_1 R_{s1}^{(0)} + z_2 R_{s2}^{(0)} + \cdots + z_p R_{sp}^{(0)}) + \cdots \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} s = 1, \ldots, p \\ z_1 + \cdots + z_p = 1 \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

Для системы (6.10) функцию Ляпунова можно взять в виде $V = \rho e^{-Nu}$, где u — непрерывная и ограниченная функция $z_1, \ldots, z_p$. Производная этой функции по t в силу уравнений (6.10) будет иметь вид

$$V' = 2\rho^{k+1} e^{-Nu} \left\{ \left[R_0 - N \sum \left(\frac{\partial u}{\partial z_s} - \frac{\partial u}{\partial z_k} \right) z_s z_k R_{sk}^{(0)} \right] + \right.$$
$$\left. + \rho \left[R_1 - N \sum \left(\frac{\partial u}{\partial z_s} - \frac{\partial u}{\partial z_k} \right) z_s z_k R_{sk}^{(1)} \right] + \cdots \right\}$$

Если окажется, что функцию u можно выбрать из уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial z_s} - \frac{\partial u}{\partial z_k} = R_{sk}^{(0)} P_{sk}$$

где P_{sk} — положительные, непрерывные и ограниченные функции, не обращающиеся в нуль, или постоянные величины, то

$$V' = 2\rho^{k+1}e^{-Nu}\left[R_0 - N\sum P_{sk}(R_{sk}{}^{(0)})^2 z_s z_k\right] + \cdots$$

Предположим, что такая функция u найдена. Тогда необходимые условия асимптотической устойчивости по формам m-го порядка ($R_0 < 0$ при $F_{sk}{}^{(0)} = 0$) будут достаточными. Ограничимся исследованием простейшего случая $p = 2$, т. е. когда (6.1) является системой четвертого порядка.

В этом случае функция u определяется уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial z_1} - \frac{\partial u}{\partial z_2} = R_{12}{}^{(0)}, \qquad R_{12}{}^{(0)} = \sum_k a^{(k_1,\,k_2)} z_1{}^{k_1} z_2{}^{k_2} \qquad (k = k_1 + k_2)$$

Функцию u можно взять в виде формы

$$u = \sum_{k+1} A^{(k_1,k_2)} z_1{}^{k_1} z_2{}^{k_2} \qquad (k + 1 = k_1 + k_2)$$

В результате подстановки определим все коэффициенты $A^{(k_1,\,k_2)}$ через коэффициенты $a^{(k_1,\,k_2)}$.

Возвращаясь к производной V', которая в случае $p = 2$ имеет вид

$$V' = 2\rho^{k+1}e^{-Nu}\left[R_0 - N(R_{12}{}^{(0)})^2 z_1 z_2\right] + \cdots$$

приходим к заключению, что если при $F_{12} = z_1 z_2 R_{12}^{(0)} = 0$ форма $R_0 < 0$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво. Этот результат был получен в [8]. Рассматривая формы более высокого порядка и принимая за функцию

$$V = \rho e^{-Nu_1} + \rho^2 e^{u_2} + \cdots + \rho^\alpha e^{u_\alpha}$$

можно получить критерии устойчивости по формам выше m-го порядка. Но на этих вопросах останавливаться не будем. Отметим, что новая форма уравнений возмущенного движения вида (6.9), облегчая построение функций Ляпунова для систем (6.8), не преодолевает всех трудностей, связанных с их определением, если $p \geqslant 3$. В этих случаях можем встретиться с весьма серьезными затруднениями.

§ 7. Канонические системы. Пусть система уравнений (6.7) получена из системы (0.1) в предположении, что ей соответствует функция Гамильтона в виде

$$H = \sum_{s=1}^{p} \frac{\alpha_s}{2\beta_s}(x_s{}^2 + y_s{}^2) + \frac{1}{\beta}\sum_{l=3}^{\infty} H^{(l)}(x_1,\ldots,x_p;\, y_1,\ldots,y_p,\tau) \qquad (7.1)$$

Здесь

$$H^{(l)} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{**}(\tau)\, x_1{}^{k_1}\cdots x_p{}^{k_p} y_1{}^{n_1}\cdots y_p{}^{n_p}$$

$$a^{**}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}(\delta_n{}^{**}\cos n\tau + \gamma_n{}^{**}\sin n\tau)$$

$$(k_1 + k_2 + \cdots + k_p + n_1 + n_2 + \cdots + n_p = l)$$

Несмотря на частный характер правых частей полученной системы, исследование ее сопряжено с весьма большими затруднениями. Дело в том, что канонические системы относятся к тем особенным системам, когда вопрос об устойчивости не решается конечным числом форм правых частей систем (6.4) и (6.7). Эти системы хотя и содержат N первых форм с коэффициентами, не зависящими от времени, но это обстоятельство не упрощает исследование вопроса, так как эти формы могут определить или неустойчивость, или неасимптотическую устойчивость. Если же положить $N = \infty$, то можно получить автономную систему для форм любого порядка, и решение вопроса не представляло бы таких затруднений, если бы при этом преобразовании ряды (6.2), (6.6) были сходящимися. Но ряды эти в общем случае расходятся, а исследование их сходимости, даже для случая $p = 1$, представляет весьма трудную задачу.

Обходя трудности, связанные с исследованием устойчивости этих систем, рассмотрим те канонические системы, у которых неустойчивость невозмущенного движения может быть обнаружена рассмотрением N первых форм правых частей системы уравнений возмущенного движения. При этом необходимо ограничить исследования рациональными λ_s, так как в случае иррациональных λ_s невозмущенное движение будет устойчиво, на каком бы большом конечном числе N не пришлось остановиться.

Предположим, что в результате преобразования наинизшие формы $X_s^{(l)}$ и $Y_s^{(l)}$, входящие в систему (6.7), имеют индекс $l = 2$.

Рассмотрим систему алгебраических уравнений (7.2)

$$X_s^{(2)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, 1, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p) = 0 \quad (\lambda_s = x_s / x_k, \ \mu_s = y_s / x_k)$$

$$Y_s^{(2)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, 1, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p) = 0 \quad (s = 1, \ldots, p)$$

и систему уравнений

$$X_s^{(2)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_{k-1}, 1, \mu_{k+1}, \ldots, \mu_p) = 0 \quad (\lambda_s = x_s / y_k, \ \mu_s = y_s / y_k) \tag{7.3}$$

$$Y_s^{(2)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_{k-1}, 1, \mu_{k+1}, \ldots, \mu_p) = 0 \quad (s = 1, \ldots, p)$$

Для каждого значения k будем иметь две системы уравнений $2p$-го порядка с $2p - 1$ неизвестными. Если для какого-нибудь фиксированного k, по крайней мере, одна из этих систем не имеет общих вещественных корней, то невозмущенное движение, определяемое функцией Гамильтона (7.1), неустойчиво.

Если эти системы для любых значений k имеют общие корни, но уравнения $F_{sk} = 0$, составленные для системы (6.7), имеют корни, отличные от общих корней систем (7.2) и (7.3), то невозмущенное движение также неустойчиво.

Если окажется, что формы $X_s^{(l)}$ и $Y_s^{(l)}$ для $l = 2, 3, \ldots, m - 1$ обращаются тождественно в нули, а формы $X_s^{(m)}$ и $Y_s^{(m)}$ отличны от нуля, то, применяя к такого рода системам критерии неустойчивости, придем к аналогичным результатам в случае четного m.

В случае нечетного m надо рассмотреть $2p - 1$ систему алгебраических уравнений $F_{sk} = 0$ с $2p - 1$ неизвестным. Если окажется, что для одного из k система уравнений имеет вещественные решения и при $F_{sk} = 0$ форма

$$R_0 = \Sigma x_s X_s^{(m)} + \Sigma y_s Y_s^{(m)}$$

может принимать положительные значения, то невозмущенное движение неустойчиво.

Поступила 21 IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ, 1935.
2. Каменков Г. В. Исследование одного особенного случая задачи устойчивости движения. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1935, № 3.
3. Каменков Г. В. Исследование одного особенного случая задачи об устойчивости движения, II. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1936, № 5.
4. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. Изд-во АН СССР, 1962.
5. Levi-Civita T. Sorpa alcuni criteri di instabilita, Ann. Mat. Pura ed Appl., ser III, 1901, vol. 5.
6. Siegel C. L. Vorlesungen über Himmelsmechanik, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1956 (русск. перев.: Зигель К. Л. Лекции по небесной механике. Изд-во иностр. лит., 1959).
7. Мерман Г. А. О неустойчивости периодического решения канонической системы с одной степенью свободы в случае главного резонанса. Сб. «Пробл. движ. искусств. небесн. тел», Изд-во АН СССР, 1963.
8. Каменков Г. В. Об устойчивости движения. Тр.Казанск. авиац. ин-та, 1939, № 9.