

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ПРИ МАЛОЙ ТОЛЩИНЕ

Н. А. Базаренко, И. И. Ворович

(Ростов-на-Дону)

Изучается напряженное состояние полого изотропного цилиндра конечных размеров, подверженного действию осесимметричных нагрузок, приложенных по всей поверхности. Исследуется случай, когда относительная толщина цилиндра мала. На базе решения трехмерной задачи анализируется точность существующих прикладных теорий. Дается метод построения уточненных решений.

§ 1. Однородные решения для полого цилиндра. Будем рассматривать осесимметричную деформацию полого изотропного цилиндра, ограниченного коаксиальными круговыми цилиндрическими поверхностями радиусов  $R_1$  и  $R_2$  и плоскостями  $z = l$  и  $z = -l$  (фигура).

Предположим вначале, что цилиндр загружен только по торцевым поверхностям  $\Gamma_1$ . Уравнения равновесия в перемещениях имеют вид

$$\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \Delta w = 0, \quad \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \Delta u - \frac{1}{r^2} u = 0 \quad (1.1)$$

Здесь

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

Рассмотрим однородные решения системы (1.1), т. е. решения, для которых отсутствуют напряжения на цилиндрах  $r = R_1, R_2$ . Эти решения впервые были построены в работе [1], и их можно отыскать, положив<sup>1</sup>

$$u = a(r) \, dm / dz, \quad w = b(r) \, m(z) \quad (1.2)$$

Функцию  $m(z)$  подчиним условию

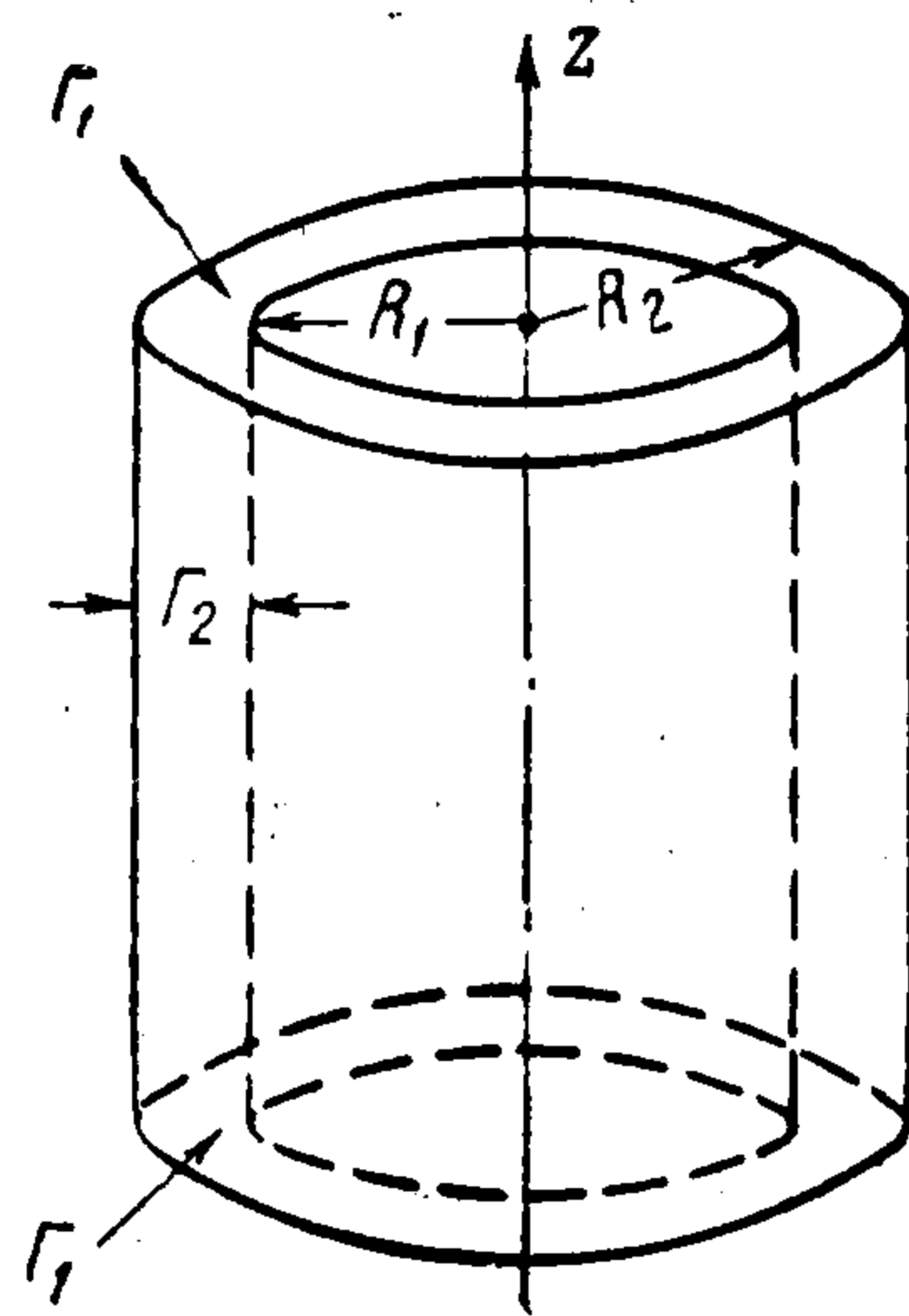
$$d^2 m(z) / dz^2 - \mu^2 m(z) = 0 \quad (1.3)$$

Здесь  $\mu$  -- некоторый параметр, который будет определен при удовлетворении граничных условий на цилиндрической части границы  $\Gamma_2$ .

Подставив (1.2) в уравнения (1.1) и учтя (1.3), получим

$$m(z) \left[ b'' + \frac{1}{r} b' + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} b \mu^2 + \frac{1}{1-2\nu} a' \mu^2 + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{r} a \mu^2 \right] = 0 \quad (1.4)$$

$$m'(z) \left[ a'' + \frac{1}{r} a' + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} a \mu^2 - \frac{1}{r^2} a + \frac{1}{2(1-\nu)} b' \right] = 0$$



<sup>1</sup> Описываемый метод построения однородных решений с некоторым видоизменением можно использовать и в неосесимметричном случае.

Легко видеть, что общее решение (1.4) дается формулами

$$a(r) = A_1 \mu^{-1} J_1 - A_2 r J_0 + A_3 \mu^{-1} Y_1 - A_4 r Y_0 \quad (1.5)$$

$$b(r) = -A_1 J_0 + A_2 [4(1-\nu) J_0 - \xi J_1] - \\ - A_3 Y_0 + A_4 [4(1-\nu) Y_0 - \xi Y_1]$$

Здесь  $J_1 = J_1(\xi)$ ,  $J_0 = J_0(\xi)$  и  $Y_1 = Y_1(\xi)$ ,  $Y_0 = Y_0(\xi)$  — функции Бесселя,  $\xi = \mu r$ , а  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) — постоянные. Чтобы решение (1.5) было определено и для  $\mu = 0$ , положим  $A_3 = A_3^* \mu^2$ . Зная  $a(r)$ ,  $b(r)$  и  $m(z)$ , найдем перемещения  $u$ ,  $w$  и напряжения  $\sigma_z$ ,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{rz}$ ; получим

$$u = m'(z) \frac{1}{\mu} [A_1 J_1 - A_2 \xi J_0 + A_3 Y_1 - A_4 \xi Y_0] \quad (1.6)$$

$$w = m(z) \{-A_1 J_0 + A_2 [4(1-\nu) J_0 - \xi J_1] - A_3 Y_0 + A_4 [4(1-\nu) Y_0 - \xi Y_1]\}$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} m'(z) \{-A_1 J_0 + A_2 [2(2-\nu) J_0 - \xi J_1] - \\ - A_3 Y_0 + A_4 [2(2-\nu) Y_0 - \xi Y_1]\}$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\nu} m'(z) \left\{ A_1 \left( J_0 - \frac{1}{\xi} J_1 \right) + A_2 [\xi J_1 - (1-2\nu) J_0] + \right. \\ \left. + A_3 \left( Y_0 - \frac{1}{\xi} Y_1 \right) + A_4 [\xi Y_1 - (1-2\nu) Y_0] \right\} \quad (1.7)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1+\nu} m'(z) \left[ A_1 \frac{1}{\xi} J_1 + A_2 (2\nu-1) J_0 + A_3 \frac{1}{\xi} Y_1 + A_4 (2\nu-1) Y_0 \right]$$

$$\tau_{rz} = \frac{E}{1+\nu} m(z) \mu \{ A_1 J_1 + A_2 [2(\nu-1) J_1 - \xi J_0] + \\ + A_3 Y_1 + A_4 [2(\nu-1) Y_1 - \xi Y_0] \}$$

Постоянные  $A_1 - A_4$  определяются из граничных условий

$$\sigma_r(R_1, z) = 0, \quad \tau_{rz}(R_1, z) = 0, \quad \sigma_r(R_2, z) = 0, \quad \tau_{rz}(R_2, z) = 0 \quad \text{на } \Gamma_2 \quad (1.8)$$

Подставив  $\sigma_r$ ,  $\tau_{rz}$ , из (1.7) в (1.8), получим линейную систему алгебраических уравнений относительно  $A_1, A_2, A_3^*, A_4$ . Указанная система будет иметь нетривиальное решение, если ее детерминант обращается в нуль.

Это приводит к характеристическому для  $\mu$  уравнению вида

$$\Delta(\mu) = \mu^2 \{ [\xi_1^2 + 2(\nu-1)] [\xi_2^2 + 2(\nu-1)] L_{11}^2 + \xi_1^2 \xi_2^2 L_{00}^2 + \\ + [\xi_1^2 + 2(\nu-1)] \xi_2^2 L_{10}^2 + [\xi_2^2 + 2(\nu-1)] \xi_1^2 L_{01}^2 - \\ - 4(\nu-1) - \xi_1^2 - \xi_2^2 \} = 0 \quad (1.9)$$

$$(L_{jk} = J_j(\xi_1) Y_k(\xi_2) - J_k(\xi_2) Y_j(\xi_1), \quad \xi_1 = \mu R_1, \quad \xi_2 = \mu R_2)$$

Трансцендентное уравнение (1.9) определяет счетное множество параметров  $\mu_k$ , а соответствующие им постоянные  $A_{1k}, A_{2k}, A_{3k}, A_{4k}$  пропорциональны алгебраическим дополнениям элементов какой-либо строки или столбца основного определителя.

Выбирая элементы первой строки, получим

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \{[\xi_2 + 2(\nu - 1)\xi_2^{-1}]Y_1(\xi_2)[\xi_1 L_{01} - 2(\nu - 1)L_{11}] + \xi_2 Y_0(\xi_2)[\xi_1 L_{00} - \\
 &\quad - 2(\nu - 1)L_{10}] + 2(\nu - 1)\xi_1 \xi_2^{-1} Y_0(\xi_1) + [\xi_2 + 2(\nu - 1)\xi_2^{-1}]Y_1(\xi_1)\} \Omega \\
 A_2 &= \{[\xi_2 + 2(\nu - 1)\xi_2^{-1}]Y_1(\xi_2)L_{11} + \xi_2 Y_0(\xi_2)L_{10} - \xi_1 \xi_2^{-1} Y_0(\xi_1)\} \Omega \quad (1.10) \\
 A_3 &= -\{[\xi_2 + 2(\nu - 1)\xi_2^{-1}]J_1(\xi_2)[\xi_1 L_{01} - 2(\nu - 1)L_{11}] + \xi_2 J_0(\xi_2)[\xi_1 L_{00} - \\
 &\quad - 2(\nu - 1)L_{10}] + 2(\nu - 1)\xi_1 \xi_2^{-1} J_0(\xi_1) + [\xi_2 + 2(\nu - 1)\xi_2^{-1}]J_1(\xi_1)\} \Omega \\
 A_4 &= -\{[\xi_2 + 2(\nu - 1)\xi_2^{-1}]J_1(\xi_2)L_{11} + \xi_2 J_0(\xi_2)L_{10} - \xi_1 \xi_2^{-1} J_0(\xi_1)\} \Omega
 \end{aligned}$$

Здесь индекс  $k$  опущен,  $\Omega$  — некоторый нормирующий множитель.

**§ 2. Анализ корней характеристического уравнения.** Исследуем поведение корней уравнения (1.9) при  $R_1 \rightarrow R_2$ . Для удобства введем новый параметр  $\gamma = \mu R_1$  и положим  $\varepsilon = (R_2 - R_1) / R_1$ . В этом случае уравнение (1.9) примет вид

$$\begin{aligned}
 \gamma^2 R_1^{-2} \Theta(\gamma, \varepsilon) &= \gamma^2 R_1^{-2} \{[\gamma^2 + 2(\nu - 1)][\gamma^2(1 + \varepsilon)^2 + 2(\nu - 1)]L_{11}^2 + \\
 &\quad + \gamma^4(1 + \varepsilon)^2 L_{00}^2 + [\gamma^2 + 2(\nu - 1)]\gamma^2(1 + \varepsilon)^2 L_{10}^2 + \\
 &\quad + [\gamma^2(1 + \varepsilon)^2 + 2(\nu - 1)]\gamma^2 L_{01}^2 - 4(\nu - 1) - \gamma^2 - \gamma^2(1 + \varepsilon)^2\} = 0 \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

Непосредственно видно, что  $\gamma_0 = 0$  — двукратный корень уравнения (2.1). Докажем теперь, что все остальные корни  $\gamma_k \rightarrow \infty$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Доказательство будем вести от противного, предположив, что  $\gamma_k \rightarrow \gamma_k^* \neq \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда справедливо предельное соотношение  $\Theta(\gamma_k, \varepsilon) \rightarrow \varepsilon^2 \Theta_0(\gamma_k^*)$ , где  $\Theta_0(\gamma_k^*)$  не зависит от  $\varepsilon$ . Таким образом, предельные точки множества корней  $\gamma_k$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  определяются из уравнения  $\Theta_0(\gamma_k^*) = 0$ . В рассматриваемом случае  $\Theta_0(\gamma_k^*) \equiv 4(\nu^2 - 1)$ , и, следовательно, предположение о существовании ограниченных при  $\varepsilon \rightarrow 0$  корней несостоятельно.

Выясним, далее, характер стремления корней  $\gamma_k$  к  $\infty$ , когда  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Пусть  $\alpha_k = \varepsilon \gamma_k$ . Тогда при  $\varepsilon \rightarrow 0$  возможны в принципе следующие предельные соотношения: 1)  $\alpha_k \rightarrow 0$ , 2)  $\alpha_k \rightarrow \text{const}$ , 3)  $\alpha_k \rightarrow \infty$ . По ранее доказанному  $\gamma_k \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , поэтому, используя асимптотические разложения функций Бесселя, уравнению (2.1) можно придать вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\gamma^2}{R_1 R_2} \left\{ [\sin^2 \alpha_k - \alpha_k^2] + \varepsilon^2 \left[ \frac{8\nu - 7}{4} + \frac{8\nu - 7 \sin 2\alpha_k}{8 \alpha_k} + \frac{8\nu^2 - 8\nu - 1 \sin^2 \alpha_k}{2 \alpha_k^2} \right] + \right. \\
 \left. + \varepsilon^3 \left[ -\frac{8\nu - 7}{4} - \frac{8\nu - 7 \sin 2\alpha_k}{8 \alpha_k} - \frac{8\nu^2 - 8\nu - 1 \sin^2 \alpha_k}{2 \alpha_k^2} \right] + \dots \right\} = 0 \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

В первом случае  $\alpha_k \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Используя это свойство для малых  $\alpha_k$  и  $\varepsilon$ , запишем уравнение (2.2) в виде

$$\begin{aligned}
 \gamma^2 R_1^{-1} R_2^{-1} \{[-\frac{1}{3} \alpha_k^4 + \frac{2}{45} \alpha_k^6 + \dots] + \varepsilon^2 [4(\nu^2 - 1) - \frac{4}{3} \alpha_k^2 (\nu^2 - 1) + \\
 + \frac{1}{90} \alpha_k^4 (16\nu^2 + 8\nu - 23) + \dots] + \varepsilon^3 [-4(\nu^2 - 1) + \frac{4}{3} \alpha_k^2 (\nu^2 - 1) - \\
 - \frac{1}{90} \alpha_k^4 (16\nu^2 + 8\nu - 23) + \dots] + \dots\} = 0 \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

Из (2.3) вытекает асимптотическое разложение

$$\gamma_k = \frac{\delta_k}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \delta_k = \gamma_{0k} + \varepsilon \gamma_{1k} + \varepsilon^2 \gamma_{2k} + \dots, \quad \gamma_{0k}^4 - 12(\nu^2 - 1) = 0 \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{1k} &= \frac{3}{5} (1 - \nu^2) \frac{1}{\gamma_{0k}} - \frac{1}{4} \gamma_{0k} \\ \gamma_{2k} &= \left( \frac{229}{2100} + \frac{1}{15} \nu + \frac{863}{16800} \nu^2 \right) \gamma_{0k} + \frac{9}{20} (\nu^2 - 1) \frac{1}{\gamma_{0k}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Рассмотрим второй случай  $\alpha_k \rightarrow \alpha_{0k}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда, как легко видеть из (2.2),  $\alpha_{0k}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\alpha_{0k}^4} (\sin^2 \alpha_{0k} - \alpha_{0k}^2) = 0 \quad (2.6)$$

Важно отметить, что уравнение (2.6) фактически совпадает с уравнением, определяющим показатели краевых эффектов Сен-Венана в теории плит [2,3]. Поскольку уравнение (2.6) имеет счетное множество корней, то и (2.2) также имеет счетное множество корней таких, что  $\gamma_k \varepsilon \rightarrow \text{const}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Можно получить уточненные значения указанных корней, воспользовавшись разложением

$$\gamma_k = \frac{\Delta_k}{\varepsilon}; \quad \Delta_k = \delta_{0k} + \varepsilon^2 \delta_{2k} + \varepsilon^3 \delta_{3k} + \dots, \quad \frac{1}{\delta_{0k}^4} (\sin^2 \delta_{0k} - \delta_{0k}^2) = 0 \quad (2.7)$$

$$\delta_{2k} = \frac{2(1 - \nu^2)}{\sin 2\delta_{0k} - 2\delta_{0k}} + \frac{7 - 8\nu}{16\delta_{0k}}, \quad \delta_{3k} = -\delta_{2k} \quad (2.8)$$

Покажем, что третий случай неосуществим. В самом деле, из (2.2) видно, что если  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то выполнение асимптотического равенства  $\sin^2 \alpha_k \sim \alpha_k^2$  для  $\alpha_k$ , непрерывно стремящегося к бесконечности, невозможно.

Весь вышеизложенный анализ показывает, что характеристическое уравнение (2.1) содержит три группы корней:

- (1) двукратный корень, не зависящий от  $\varepsilon$ ,  $\gamma_0 = 0$ ;
- (2) четыре корня  $\gamma_k$ , определяемых по формулам (2.4), (2.5) и растущих как  $1/\sqrt{\varepsilon}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;
- (3) счетное множество корней, определяемых по (2.7), (2.8) и растущих как  $1/\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**§ 3. Анализ напряженного и деформированного состояния, соответствующего каждой группе корней. Группа (1).** Двукратному корню  $\gamma_0 = 0$  соответствуют

$$m_0(z) = \frac{A_0}{1 + \nu} z, \quad a(r) = -\nu r, \quad b(r) = 1 \quad (3.1)$$

Перемещения и напряжения даются формулами

$$u = -R_1 \frac{\nu}{1 + \nu} A_0 \rho, \quad w = R_1 \frac{1}{1 + \nu} A_0 \zeta \quad \left( \rho = \frac{r}{R_1}, \quad \zeta = \frac{z}{R_1} \right) \quad (3.2)$$

$$\sigma_z = 2GA_0, \quad \sigma_r = 0, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{rz} = 0 \quad (3.3)$$

Здесь  $\rho, \zeta$  — безразмерные координаты;  $G$  — модуль сдвига. Таким образом, корню первой группы  $\gamma_0 = 0$  отвечает чистое растяжение вдоль оси симметрии. Это напряженное состояние проникает без затухания внутрь области оболочки.

Группа (2). Функция  $m_k(z)$  находится из уравнения

$$m_k'' - \gamma_k^2 / R_1^2 m_k = 0 \quad (\gamma_k = \delta_k / \sqrt{\varepsilon})$$

а  $\delta_k$  дается соотношением (2.4). Отсюда

$$m_k(z) = R_1 \left( E_k \exp \frac{\delta_k \zeta}{\sqrt{\varepsilon}} + N_k \exp \frac{-\delta_k \zeta}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \quad (3.4)$$

где  $E_k, N_k$  — постоянные интегрирования, определяемые из условия загрузки торцевых поверхностей  $\Gamma_1$ .

$$u(r, z) = u_1(\gamma_1 \rho, \gamma_1 \zeta) + u_2(\gamma_2 \rho, \gamma_2 \zeta) \quad (3.5)$$

$$w(r, z) = w_1(\gamma_1 \rho, \gamma_1 \zeta) + w_2(\gamma_2 \rho, \gamma_2 \zeta)$$

$$\sigma_z(r, z) = \sigma_{z1}(\gamma_1 \rho, \gamma_1 \zeta) + \sigma_{z2}(\gamma_2 \rho, \gamma_2 \zeta)$$

$$\sigma_r(r, z) = \sigma_{r1}(\gamma_1 \rho, \gamma_1 \zeta) + \sigma_{r2}(\gamma_2 \rho, \gamma_2 \zeta)$$

$$\sigma_\theta(r, z) = \sigma_{\theta1}(\gamma_1 \rho, \gamma_1 \zeta) + \sigma_{\theta2}(\gamma_2 \rho, \gamma_2 \zeta) \quad (3.6)$$

$$\tau_{rz}(r, z) = \tau_{rz1}(\gamma_1 \rho, \gamma_1 \zeta) + \tau_{rz2}(\gamma_2 \rho, \gamma_2 \zeta)$$

В выражениях (3.5) и (3.6) величины  $u_k, w_k$  и  $\sigma_{zk}, \sigma_{rk}, \sigma_{\theta k}, \tau_{rzk}$ , т. е. перемещения и напряжения, отвечающие корню второй группы  $\gamma_k$ , находятся из (1.6), (1.7), (1.10), (3.4), в которых следует положить

$$\mu = \gamma_k / R_1, \quad \xi = \gamma_k \rho, \quad \xi_1 = \gamma_k, \quad \xi_2 = \gamma_k(1 + \varepsilon), \quad \Omega = \gamma_k^2 / \sqrt{\varepsilon}$$

Суммирование ведется по тем корням  $\gamma_k$ , для которых  $\text{Re } \gamma_k > 0$ . Раскладывая по малому параметру  $\varepsilon$  решения второй группы, найдем для них следующие асимптотические выражения:

$$m_k(z) = R_1 \left[ m_k^* + \sqrt{\varepsilon} \zeta \gamma_{1k} \frac{dm_k^*}{d\eta_k} + \varepsilon \frac{\zeta^2}{2} \gamma_{1k}^2 m_k^* + \right. \\ \left. + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \left( \frac{\zeta^3}{6} \gamma_{1k}^3 + \zeta \gamma_{2k} \right) \frac{dm_k^*}{d\eta_k} + \dots \right] \\ m_k'(z) = \frac{\gamma_{0k}}{\sqrt{\varepsilon}} \left[ \frac{dm_k^*}{dr_k} + \sqrt{\varepsilon} \zeta \gamma_{1k} m_k^* + \varepsilon \left( \frac{\gamma_{1k}}{\gamma_{0k}} + \frac{\zeta^2}{2} \gamma_{1k}^2 \right) \frac{dm_k^*}{dr_k} + \right. \\ \left. + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \left( \frac{\zeta^3}{6} \gamma_{1k}^3 + \zeta \gamma_{2k} + \zeta \frac{\gamma_{1k}^2}{\gamma_{0k}} \right) m_k^* + \dots \right] \quad (3.7)$$

$$\left( m_k^* = E_k e^{\eta_k} + N_k e^{-\eta_k}, \quad r_k = \frac{\gamma_{0k}}{\sqrt{\varepsilon}} \zeta \right)$$

$$u_k = m_k'(z) R_1 \{ \sqrt{\varepsilon} [-4(v-1)] + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} [2(v-1)(3-v) + \\ + 2v(v-1)r_0 - 4/3 \gamma_{0k}^2 + v(5/6 + 1/2 r_0^2) \gamma_{0k}^2] + \dots \} \quad (3.8)$$

$$w_k = m_k(z) \{ \sqrt{\varepsilon} [4(v-1)v + 2\gamma_{0k}^2(v-1)r_0] + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} [2v(v-4) + \\ + (v+1)(r_0^3 - 3r_0) - (v^2-1)(r_0^3 + 37/5 r_0) + \\ + (v+1)\gamma_{0k}^2(-7/6 + r_0 - 1/2 r_0^2) - \gamma_{0k}^2(3/2 + 3r_0 + 1/2 r_0^2)](v-1) + \dots \} \quad (3.9)$$

$$\tau_{rzk} = 2Gm_k(z) R_1^{-1} \{ \sqrt{\varepsilon} [6(v^2-1)(r_0^2-1)] + \\ + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} [(v-1)(r_0^2-1)(1-1/3 r_0) + (1-r_0^2)(4+2/3 r_0) + \\ + \gamma_{0k}^2(1-r_0^2)(13/20 + 1/12 r_0^2)] 3(v^2-1) + \dots \} \quad (3.10)$$

$$\sigma_{zk} = 2Gm_k'(z) \{ \sqrt{\varepsilon} [-2\gamma_{0k}^2 r_0] + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} [(\nu^2 - 1)(^{22/5} r_0 + 2r_0^3) - (\nu - 1)(^{1/6} + r_0 - ^{1/2} r_0^2) \gamma_{0k}^2 + (^{1/6} + 3r_0 + ^{1/2} r_0^2) \gamma_{0k}^2] + \dots \} \quad (3.11)$$

$$\sigma_{\theta k} = 2Gm_k'(z) \{ \sqrt{\varepsilon} [-4(\nu^2 - 1) - 2\nu\gamma_{0k}^2 r_0] + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} [2(\nu^2 - 1)(4 - \nu) + 2(\nu^2 - 1)(1 + ^{37/10} \nu) r_0 + \nu(\nu^2 - 1) r_0^3 - ^{4/3} \gamma_{0k}^2 + ^{1/6} \nu(7\nu - 1) \gamma_{0k}^2 + \nu(4 - \nu) \gamma_{0k}^2 r_0 + ^{1/2} \nu(1 + \nu) \gamma_{0k}^2 r_0^2] + \dots \} \quad (3.12)$$

$$\sigma_{rk} = 2Gm_k'(z) \{ \varepsilon \sqrt{\varepsilon} [(\nu^2 - 1)(r_0 - r_0^3) + ^{1/2} \nu \gamma_{0k}^2 (1 - r_0^2)] + \dots \} \quad (3.13)$$

Здесь  $r_0$  — новая координата, отсчитываемая от срединной поверхности. Ее связь с переменной  $\rho$  дается соотношением

$$\rho = 1 + ^{1/2} \varepsilon (1 + r_0), \quad -1 \leq r_0 \leq 1 \quad (3.14)$$

Из (3.7) — (3.13) можно заметить, что  $u_k$ ,  $\sigma_{zk}$ ,  $\sigma_{\theta k}$  при малых  $\varepsilon$  имеют порядок 1;  $w_k$ ,  $\tau_{rzk}$  — порядок  $\sqrt{\varepsilon}$ ;  $\sigma_{rk}$  — порядок  $\varepsilon$ .

Итак, решения, соответствующие второй группе корней, представляют собою краевые эффекты, убывающие при продвижении внутрь области, занятой оболочкой, как  $\exp(-\delta_k n / \sqrt{\varepsilon})$ , где  $n$  — расстояние по нормали к торцевому срезу  $\Gamma_1$ .

Для разъяснения картины напряженного состояния, отвечающего данной группе корней, вычислим главные вектор и момент

$$P_k + iT_k = \int_{R_1}^{R_2} (\sigma_{zk} + i\tau_{rzk}) r dr, \quad M_k = \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{zk} r^2 dr$$

действующих по сечению  $\zeta = \text{const}$  напряжений. Имеем

$$P_k = 0, \quad T_k = \frac{m_k(z)}{m_k'(z)} \frac{\gamma_k^2}{R_1^2} M_k \quad (3.15)$$

$$M_k = 2Gm_k'(z) R_1^3 \{ \varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon} [-^{1/3} \gamma_{0k}^2] + \varepsilon^3 \sqrt{\varepsilon} [^{14/15} (\nu^2 - 1) + ^{1/6} \gamma_{0k}^2 (3 - \nu)] + \dots \} \neq 0$$

Таким образом,  $T_k$  и  $M_k$  имеют соответственно порядок  $\varepsilon \sqrt{\varepsilon}$  и  $\varepsilon^2$ , и, следовательно, используя эту группу решений, можно снять главные момент и вектор касательных напряжений системы усилий, заданных на торцах, т. е. добиться чтобы

$$\int_{R_1}^{R_2} \tau_{rz} r dr = 0, \quad \int_{R_1}^{R_2} \sigma_z r^2 dr = 0$$

Группа (3). Функция  $m_p(z)$  будет определяться из уравнения

$$m_p'' - \gamma_p^2 / R_1^2 m_p = 0 \quad (\gamma_p = \varepsilon^{-1} \Delta p)$$

а  $\Delta p$  дается (2.7), (2.8). Отсюда

$$m_p(z) = R_1 [E_p^* \exp(\varepsilon^{-1} \zeta \Delta p) + N_p^* \exp(-\varepsilon^{-1} \zeta \Delta p)] \quad (3.16)$$

Перемещения и напряжения находятся здесь по формулам (1.6), (1.7), (1.10), (3.16), в которых  $\gamma_p$  — соответствующий корень третьей группы, для которого  $\text{Re } \gamma_p > 0$  и  $\Omega = \gamma_p$ . Напряженные состояния, соответствующие третьей группе корней, представляют собою краевые эффекты,

убывающие при продвижении внутрь области, занятой оболочкой как  $\exp \varepsilon^{-1} n \Delta p$ . Раскладывая по степеням малого параметра  $\varepsilon$  решения этой группы, найдем следующие асимптотические выражения:

$$m_p(z) = R_1 \left[ m_p^* + \varepsilon \delta_{2p} \zeta \frac{dm_p^*}{d\lambda_p} + \varepsilon^2 \left( m_p^* \frac{\zeta^2}{2} \delta_{2p}^2 + \delta_{3p} \zeta \frac{dm_p^*}{d\lambda_p} \right) + \dots \right] \quad (3.17)$$

$$m_p'(z) = \frac{\delta_{0p}}{\varepsilon} \left[ \frac{dm_p^*}{d\lambda_p} + \varepsilon \delta_{2p} \zeta m_p^* + \varepsilon^2 \left( \frac{dm_p^*}{d\lambda_p} \frac{\zeta^2}{2} \delta_{2p}^2 + \frac{dm_p^*}{d\lambda_p} \frac{\delta_{2p}}{\delta_{0p}} + m_p^* \delta_{3p} \zeta \right) + \dots \right]$$

$$\left( m_p^* = E_p^* e^{\lambda_p} + N_p^* e^{-\lambda_p}, \quad \lambda_p = \frac{\delta_{0p}}{\varepsilon} (\zeta) \right)$$

$$\begin{aligned} u_p &= m_p'(z) R_1 (u_{0p} \varepsilon^2 + u_{1p} \varepsilon^3 + \dots), & w_p &= m_p(z) (w_{0p} \varepsilon + w_{1p} \varepsilon^2 + \dots) \\ \sigma_{zp} &= 2G m_p'(z) (\sigma_{z0p} \varepsilon + \sigma_{z1p} \varepsilon^2 + \dots) \\ \tau_{rzp} &= 2G m_p(z) R_1^{-1} (\tau_{rz0p} + \tau_{rz1p} \varepsilon + \dots) \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\sigma_{\theta p} = 2G m_p'(z) (\sigma_{\theta 0p} \varepsilon + \sigma_{\theta 1p} \varepsilon^2 + \dots), \quad \sigma_{rp} = 2G m_p'(z) (\sigma_{r0p} \varepsilon + \sigma_{r1p} \varepsilon^2 + \dots)$$

$$\begin{aligned} u_{0p} &= \left[ \frac{\sin 2\delta_{0p}}{2\delta_{0p}} r_1 + r_1 - 2\nu + 1 \right] \sin \delta_{0p} r_1 + \\ &+ \left[ (1 - \nu) \left( \frac{\sin 2\delta_{0p}}{\delta_{0p}^2} + \frac{2}{\delta_{0p}} \right) - \delta_{0p} r_1 \right] \cos \delta_{0p} r_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{1p} &= \left[ -\frac{\sin 2\delta_{0p}}{2\delta_{0p}} \left( r_1 + \frac{r_1^2}{2} \right) + 1 - \frac{1}{\delta_{0p}^2} + \frac{r_1}{2} - \frac{r_1^2}{2} + \right. \\ &+ (\nu - 1) \left( \frac{\sin 2\delta_{0p}}{\delta_{0p}^3} + 2 - \frac{2}{\delta_{0p}^2} + 3r_1 \right) + 2(\nu - 1)^2 \frac{\sin 2\delta_{0p}}{\delta_{0p}^3} \left. \right] \sin \delta_{0p} r_1 + \\ &+ \left[ \frac{\sin 2\delta_{0p}}{2\delta_{0p}^2} r_1 + \delta_{0p} r_1 + \frac{r_1^2}{2} \delta_{0p} + (\nu - 1) \left( \frac{\sin 2\delta_{0p}}{\delta_{0p}^2} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{3}{2} \frac{\sin 2\delta_{0p}}{\delta_{0p}^2} r_1 + \frac{r_1}{\delta_{0p}} \right) - \frac{4}{\delta_{0p}} (\nu - 1)^2 \right] \cos \delta_{0p} r_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{0p} &= \left[ \frac{\sin 2\delta_{0p}}{2\delta_{0p}} + 1 - r_1 \delta_{0p}^2 + (\nu - 1) \left( \frac{\sin 2\delta_{0p}}{\delta_{0p}} + 2 \right) \right] \sin \delta_{0p} r_1 + \\ &+ \left[ -\frac{r_1}{2} \sin 2\delta_{0p} - r_1 \delta_{0p} - 2(\nu - 1) \delta_{0p} \right] \cos \delta_{0p} r_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{1p} &= \left[ -\frac{\sin 2\delta_{0p}}{2\delta_{0p}} - \frac{1}{2} - r_1 + \delta_{0p}^2 \left( r_1 + \frac{r_1^2}{2} \right) + (\nu - 1) \left( \frac{\sin 2\delta_{0p}}{2\delta_{0p}} r_1 - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\sin 2\delta_{0p}}{\delta_{0p}} + 1 - r_1 \right) \right] \sin \delta_{0p} r_1 + \left[ \sin 2\delta_{0p} \left( \frac{r_1}{2} + \frac{r_1^2}{4} \right) + \delta_{0p} \left( \frac{r_1}{2} + \frac{r_1^2}{2} \right) + \right. \\ &\left. + (\nu - 1) \left( \frac{3}{2} \frac{\sin 2\delta_{0p}}{\delta_{0p}^2} + \frac{1}{\delta_{0p}} + 2\delta_{0p} - r_1 \delta_{0p} \right) \right] \cos \delta_{0p} r_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{z0p} &= \left[ -\frac{\sin 2\delta_{0p}}{2\delta_{0p}} - 1 - r_1\delta_{0p}^2 \right] \sin \delta_{0p}r_1 + \\
&\quad + \left[ -\frac{r_1}{2} \sin 2\delta_{0p} + 2\delta_{0p} - r_1\delta_{0p} \right] \cos \delta_{0p}r_1 \\
\sigma_{z1p} &= \left[ \frac{\sin 2\delta_{0p}}{2\delta_{0p}} (1 + r_1) + \frac{1}{2} + \delta_{0p}^2 \left( r_1 + \frac{r_1^2}{2} \right) + \right. \\
&\quad + (\nu - 1) \left( \frac{\sin 2\delta_{0p}}{\delta_{0p}} r_1 - 2 \right) \left. \right] \sin \delta_{0p}r_1 + \left[ -\frac{\sin 2\delta_{0p}}{2\delta_{0p}^2} + \sin 2\delta_{0p} \left( \frac{r_1}{2} + \frac{r_1^2}{4} \right) - \right. \\
&\quad - 2\delta_{0p} + \frac{1}{\delta_{0p}} + \delta_{0p} \left( \frac{r_1^2}{2} - \frac{r_1}{2} \right) + (\nu - 1) \left( -\frac{\sin 2\delta_{0p}}{\delta_{0p}^2} + \frac{2}{\delta_{0p}} - 2r_1\delta_{0p} \right) \left. \right] \cos \delta_{0p}r_1 \\
\tau_{rz0p} &= \left[ \frac{r_1}{2} \delta_{0p} \sin 2\delta_{0p} - \delta_{0p}^2 (1 - r_1) \right] \sin \delta_{0p}r_1 - r_1\delta_{0p}^3 \cos \delta_{0p}r_1 \\
\tau_{rz1p} &= \left[ -\delta_{0p} \sin 2\delta_{0p} \left( \frac{r_1}{2} + \frac{r_1^2}{4} \right) - 1 + \delta_{0p}^2 \left( 1 + \frac{r_1}{2} - \frac{r_1^2}{2} \right) + \right. \\
&\quad + (\nu - 1) (2r_1\delta_{0p}^2 - 2) \left. \right] \sin \delta_{0p}r_1 + \\
&\quad + \left[ \frac{r_1}{2} \sin 2\delta_{0p} + \delta_{0p}^3 \left( r_1 + \frac{r_1^2}{2} \right) + (\nu - 1) r_1 \sin 2\delta_{0p} \right] \cos \delta_{0p}r_1 \\
\sigma_{r0p} &= \left[ -\frac{\sin 2\delta_{0p}}{2\delta_{0p}} + \delta_{0p}^2 r_1 - 1 \right] \sin \delta_{0p}r_1 + \left[ \frac{r_1}{2} \sin 2\delta_{0p} + r_1\delta_{0p} \right] \cos \delta_{0p}r_1 \\
\sigma_{r1p} &= \left[ -\frac{\sin 2\delta_{0p}}{2\delta_{0p}} (r_1 - 1) + \frac{3}{2} - \delta_{0p}^2 \left( r_1 + \frac{r_1^2}{2} \right) - \right. \\
&\quad - (\nu - 1) \frac{\sin 2\delta_{0p}}{\delta_{0p}} r_1 \left. \right] \sin \delta_{0p}r_1 + \\
&\quad + \left[ -\sin 2\delta_{0p} \left( \frac{r_1}{2} + \frac{r_1^2}{4} \right) + \delta_{0p} \left( \frac{r_1}{2} - \frac{r_1^2}{2} \right) + 2r_1 (\nu - 1) \delta_{0p} \right] \cos \delta_{0p}r_1 \\
\sigma_{\theta 0p} &= \left( -\nu \frac{\sin 2\delta_{0p}}{\delta_{0p}} - 2\nu \right) \sin \delta_{0p}r_1 + 2\nu \delta_{0p} \cos \delta_{0p}r_1 \\
\sigma_{\theta 1p} &= \left[ \frac{\sin 2\delta_{0p}}{\delta_{0p}} (1 + r_1) + 2r_1 + (\nu - 1) \left( \frac{\sin 2\delta_{0p}}{\delta_{0p}} + \frac{r_1}{2} \frac{\sin 2\delta_{0p}}{\delta_{0p}} - 5 + r_1 \right) - \right. \\
&\quad - 4(\nu - 1)^2 \left. \right] \sin \delta_{0p}r_1 + \left[ -\frac{\sin 2\delta_{0p}}{2\delta_{0p}^2} - 2\delta_{0p} (1 + r_1) + \frac{1}{\delta_{0p}} - \right. \\
&\quad - 2(\nu - 1)^2 \frac{\sin 2\delta_{0p}}{\delta_{0p}^2} + (\nu - 1) \left( -\frac{7}{2} \frac{\sin 2\delta_{0p}}{\delta_{0p}^2} - \frac{1}{\delta_{0p}} - 2\delta_{0p} - \delta_{0p}r_1 \right) \left. \right] \cos \delta_{0p}r_1
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Здесь  $r_1$  — новая координата, отсчитываемая от внутренней цилиндрической поверхности:

$$\rho = 1 + \varepsilon r_1 \quad (0 \leq r_1 \leq 1) \tag{3.20}$$

Из (3.17) — (3.19) можно заметить, что перемещения  $u_p$  и  $w_p$  имеют порядок  $\varepsilon$ , а напряжения  $\sigma_{zr}$ ,  $\tau_{rz}$ ,  $\sigma_{\theta r}$ ,  $\sigma_{rp}$  — порядок 1.

Если вернуться к координате  $r_0$ , отсчитываемой от срединной поверхности, то  $u_{0p}$ ,  $\tau_{rz0p}$  будут четными, а  $w_{0p}$ ,  $\sigma_{z0p}$ ,  $\sigma_{\theta 0p}$ ,  $\sigma_{r0p}$  — нечетными

функциями относительно  $r_0$ , когда

$$(A) \quad \delta_{0p} = \sin \delta_{0p} \quad (3.21)$$

Наоборот,  $u_{0p}$ ,  $\tau_{rz0p}$  будут нечетными, а  $w_{0p}$ ,  $\sigma_{z0p}$ ,  $\sigma_{\theta 0p}$ ,  $\sigma_{r0p}$  — четными функциями относительно  $r_0$ , когда

$$(B) \quad \delta_{0p} = -\sin \delta_{0p} \quad (3.22)$$

Это дает основание считать, что корни  $\sigma_p = 2(\sigma_{0p}/\varepsilon + \sigma_{2p}\varepsilon + \dots)$ , для которых будут выполняться соотношения  $(\sin 2\sigma_{0p} - 2\sigma_{0p})/\sigma_{0p}^3 = 0$ , образуют решения, соответствующие преимущественно изгибу оболочки, а корни  $\omega_p = 2(\omega_{0p}/\varepsilon + \omega_{2p}\varepsilon + \dots)$ , для которых выполняется  $(\sin 2\omega_{0p} + 2\omega_{0p})/\omega_{0p} = 0$ , образуют решения, соответствующие преимущественно растяжению оболочки. При этом имеем:

для группы (A)

$$\begin{aligned} u_{0p} &= -2(\nu - 1)\sigma_{0p}^{-1} \cos \sigma_{0p} \cos \sigma_{0p} r_0 - \sin \sigma_{0p} \cos \sigma_{0p} r_0 + r_0 \sin \sigma_{0p} r_0 \cos \sigma_{0p} \\ w_{0p} &= 2 \sin \sigma_{0p} r_0 (\cos \sigma_{0p} - \sigma_{0p} \sin \sigma_{0p}) - 2r_0 \sigma_{0p} \cos \sigma_{0p} r_0 \cos \sigma_{0p} + \\ &\quad + 4(\nu - 1) \sin \sigma_{0p} r_0 \cos \sigma_{0p} \\ \sigma_{z0p} &= -2 \sin \sigma_{0p} r_0 \cos \sigma_{0p} - 2\sigma_{0p} \sin \sigma_{0p} r_0 \sin \sigma_{0p} - 2r_0 \sigma_{0p} \cos \sigma_{0p} r_0 \cos \sigma_{0p} \quad (3.23) \\ \tau_{rz0p} &= -4\sigma_{0p}^2 \cos \sigma_{0p} r_0 \sin \sigma_{0p} + 4\sigma_{0p}^2 r_0 \sin \sigma_{0p} r_0 \cos \sigma_{0p} \\ \sigma_{r0p} &= 2r_0 \sigma_{0p} \cos \sigma_{0p} r_0 \cos \sigma_{0p} - 2 \sin \sigma_{0p} r_0 (\cos \sigma_{0p} - \sigma_{0p} \sin \sigma_{0p}) \\ \sigma_{\theta 0p} &= -4\nu \sin \sigma_{0p} r_0 \cos \sigma_{0p} \end{aligned}$$

для группы (B)

$$\begin{aligned} u_{0p} &= 2(\nu - 1)\omega_{0p}^{-1} \sin \omega_{0p} \sin \omega_{0p} r_0 - \sin \omega_{0p} r_0 \cos \omega_{0p} + r_0 \cos \omega_{0p} r_0 \sin \omega_{0p} \\ w_{0p} &= 2 \cos \omega_{0p} r_0 (\sin \omega_{0p} + \omega_{0p} \cos \omega_{0p}) + 2r_0 \omega_{0p} \sin \omega_{0p} r_0 \sin \omega_{0p} + \\ &\quad + 4(\nu - 1) \cos \omega_{0p} r_0 \sin \omega_{0p} \\ \sigma_{z0p} &= -2 \cos \omega_{0p} r_0 \sin \omega_{0p} + 2\omega_{0p} \cos \omega_{0p} r_0 \cos \omega_{0p} + 2r_0 \omega_{0p} \sin \omega_{0p} r_0 \sin \omega_{0p} \\ \tau_{rz0p} &= -4\omega_{0p}^2 \sin \omega_{0p} r_0 \cos \omega_{0p} + 4\omega_{0p}^2 r_0 \cos \omega_{0p} r_0 \sin \omega_{0p} \\ \sigma_{r0p} &= -2r_0 \omega_{0p} \sin \omega_{0p} r_0 \sin \omega_{0p} - 2 \cos \omega_{0p} r_0 (\sin \omega_{0p} + \omega_{0p} \cos \omega_{0p}) \\ \sigma_{\theta 0p} &= -4\nu \cos \omega_{0p} r_0 \sin \omega_{0p} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Рассмотрим теперь главный вектор и главный момент напряжений, действующих по сечению  $\zeta = \text{const}$ . Имеем

$$P_p = \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{zp} r dr = 0, \quad M_p = \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{zp} r^2 dr \neq 0, \quad T_p = \frac{m_p(z)}{m_p'(z)} \frac{\gamma_p^2}{R_1^2} M_p$$

$$\begin{aligned} M_p &= 2Gm_p'(z) R_1^3 \left\{ \varepsilon^4 \left[ -\frac{\sin 2\delta_{0p}}{\delta_{0p}^4} + \frac{2\cos \delta_{0p}}{\delta_{0p}^3} + \frac{2\sin \delta_{0p}}{\delta_{0p}^4} - \frac{2}{\delta_{0p}^3} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\nu - 1) \left( -\frac{\sin 2\delta_{0p}}{\delta_{0p}^4} + \frac{2\cos \delta_{0p}}{\delta_{0p}^3} + \frac{2\sin \delta_{0p}}{\delta_{0p}^4} - \frac{2}{\delta_{0p}^3} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^5 \left[ \frac{2}{\delta_{0p}^3} + \frac{\sin 2\delta_{0p}}{\delta_{0p}^4} - \frac{3\cos \delta_{0p}}{\delta_{0p}^3} - \frac{\sin \delta_{0p}}{\delta_{0p}^4} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\nu - 1) \left( \frac{\sin 2\delta_{0p}}{\delta_{0p}^4} - \frac{3\cos \delta_{0p}}{\delta_{0p}^3} - \frac{3\sin \delta_{0p}}{\delta_{0p}^4} - \frac{4}{\delta_{0p}^3} \right) - \frac{4}{\delta_{0p}^3} (\nu - 1)^2 \right] + \dots \right\} \end{aligned}$$

Из (3.25) видно, что  $T_p$  и  $M_p$ , отвечающие корню  $\sigma_p$ , имеют порядок  $\varepsilon^3$  и  $\varepsilon^4$ , а для корня  $\omega_p$  они порядка  $\varepsilon^2$  и  $\varepsilon^3$  соответственно.

Таким образом, данная система напряженных состояний в сечении  $\zeta = \text{const}$  может считаться эквивалентной нулю с точностью до  $\varepsilon^2$  — для главного вектора и с точностью до  $\varepsilon^3$  — для главного момента.

Все вышеизложенное дает основание заключить, что краевые эффекты прикладных теорий оболочек соответствуют второй группе решений. Третья же группа решений дает краевые эффекты типа Сен-Венана, которые в теории Кирхгофа вообще отсутствуют.

Предыдущие рассмотрения позволяют нам получить некоторое суждение о точности применяющихся теорий цилиндрических оболочек.

1. Теория В. З. Власова [4]. В случае осесимметричной деформации здесь имеем соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + \nu \frac{\partial u}{\partial \zeta} - c^2 \frac{\partial^3 u}{\partial \zeta^3} &= \frac{1 - \nu^2}{Eh} R^2 X & \left( c^2 = \frac{h^2}{12R^2}, R = 0.5(R_1 + R_2) \right) \\ \nu \frac{\partial w}{\partial \zeta} - c^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \zeta^3} + c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial \zeta^4} + (1 + c^2) u &= - \frac{1 - \nu^2}{Eh} R^2 Z \end{aligned} \quad (3.26)$$

Здесь  $u$  — радиальное перемещение точек срединной поверхности,  $w$  — перемещение вдоль образующей.  $X$  и  $Z$  — тангенциальная и нормальная составляющие внешних усилий.

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$(1 - \nu^2) + \varepsilon^2 (1/12 + 1/6 \nu \gamma^2 + 1/12 \gamma^4) + \varepsilon^3 (-1/12 - 1/6 \nu \gamma^2 - 1/12 \gamma^4) + \varepsilon^4 (1/16 + 1/8 \nu \gamma^2 + 1/16 \gamma^4) + \dots = 0 \quad (3.27)$$

Из (3.27) получаем разложение показателя краевого эффекта оболочки для данной прикладной теории

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{\delta_k}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \delta_k = \gamma_{0k} + \varepsilon \gamma_{1k} + \dots, \\ \gamma_{0k}^4 - 12(\nu^2 - 1) &= 0, \quad \gamma_{1k} = \frac{1}{4} \gamma_{0k} - \frac{\nu}{2} \frac{1}{\gamma_{0k}} \end{aligned} \quad (3.28)$$

2. Теория В. М. Даревского [5]. Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид

$$12(1 - \nu^2) \gamma^4 + \varepsilon^2 [(4 - 3\nu^2) \gamma^4 + 2\nu \gamma^6 + \gamma^8] + \varepsilon^3 [(3\nu^2 - 4) \gamma^4 - 2\nu \gamma^6 - \gamma^8] + \dots = 0 \quad (3.29)$$

Отсюда для показателя краевого эффекта имеем разложение

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{\delta_k}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \delta_k = \gamma_{0k} + \varepsilon \gamma_{1k} + \dots, \\ \gamma_{0k}^4 - 12(\nu^2 - 1) &= 0, \quad \gamma_{1k} = \frac{1}{4} \gamma_{0k} - \frac{\nu}{2} \frac{1}{\gamma_{0k}} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Сравнивая (3.28), (3.30) с точным разложением (2.4), (2.5), замечаем, что первые члены разложения совпадают, последующие же члены существенно разнятся. Аналогичный вывод оказывается справедливым и для всех других теорий цилиндрических оболочек.

Итак, анализ существующих прикладных теорий показывает, что все они в первом приближении точно аппроксимируют напряженное состояние второй группы и в то же время совершенно не могут претендовать на какие-либо уточнения в последующих приближениях, так как ни в одной из этих теорий второй член приближения не совпадает с точным его значением, даваемым формулой (2.4), (2.5).

4. Удовлетворение краевым условиям на торцах цилиндра при помощи класса однородных решений. Рассмотрим теперь детальнее вопрос о полном снятии системы напряжений с торцевых частей границы  $\Gamma_1$ . Предположим, что на торцевых участках  $\zeta_1 = l/R_1$  и  $\zeta_2 = -l/R_1$  заданы две системы напряжений  $\sigma_{z1}, \tau_{rz1}$  и  $\sigma_{z2}, \tau_{rz2}$ . Причем достаточно изучить два следующих случая.

(1) Нагрузка симметрична относительно плоскости  $\zeta = 0$

$$\sigma_{z1} = \sigma_{z2}, \quad \tau_{rz1} = -\tau_{rz2}$$

(2) Нагрузка кососимметрична относительно плоскости  $\zeta = 0$

$$\sigma_{z1} = -\sigma_{z2}, \quad \tau_{rz1} = \tau_{rz2}$$

В первом случае можно положить  $m_0 = \zeta$ ,  $m_k = \text{sh } \gamma_k \zeta$ ; во втором следует взять  $m_k = \text{ch } \gamma_k \zeta$ . Изложение будем вести применительно к первому случаю, так как результаты, относящиеся ко второму случаю, получаются из первого путем формальной замены  $\text{sh } \gamma_k \zeta$  на  $\text{ch } \gamma_k \zeta$ . Предварительно имеет смысл выделить решение, соответствующее чистому растяжению вдоль оси  $\zeta$

$$u = -\frac{\nu}{1+\nu} R_1 A_0 \rho, \quad w = R_1 \frac{A_0}{1+\nu} \zeta, \quad \sigma_z = 2GA_0, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = \tau_{rz} = 0 \quad (4.1)$$

$$A_0 = \frac{1}{2GS_0} \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{z1} r dr, \quad S_0 = \int_{R_1}^{R_2} r dr$$

Оставшуюся систему нормальных напряжений, эквивалентную нулю, обозначим  $\sigma_{z1}^*$

$$\sigma_{z1}^* = \sigma_{z1} - \frac{1}{S_0} \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{z1} r dr \quad (4.2)$$

Общее решение для этой задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^2 u_k(\gamma_k \rho, \gamma_k \zeta) B_k + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\sigma_k \rho, \sigma_k \zeta) C_k + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\omega_k \rho, \omega_k \zeta) D_k \\ w &= \sum_{k=1}^2 w_k(\gamma_k \rho, \gamma_k \zeta) B_k + \sum_{k=1}^{\infty} w_k(\sigma_k \rho, \sigma_k \zeta) C_k + \sum_{k=1}^{\infty} w_k(\omega_k \rho, \omega_k \zeta) D_k \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \sum_{k=1}^2 \sigma_{zk}(\gamma_k \rho, \gamma_k \zeta) B_k + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{zk}(\sigma_k \rho, \sigma_k \zeta) C_k + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{zk}(\omega_k \rho, \omega_k \zeta) D_k \\ \sigma_\theta &= \sum_{k=1}^2 \sigma_{\theta k}(\gamma_k \rho, \gamma_k \zeta) B_k + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{\theta k}(\sigma_k \rho, \sigma_k \zeta) C_k + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{\theta k}(\omega_k \rho, \omega_k \zeta) D_k \\ \sigma_r &= \sum_{k=1}^2 \sigma_{rk}(\gamma_k \rho, \gamma_k \zeta) B_k + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{rk}(\sigma_k \rho, \sigma_k \zeta) C_k + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{rk}(\omega_k \rho, \omega_k \zeta) D_k \\ \tau_{rz} &= \sum_{k=1}^2 \tau_{rzk}(\gamma_k \rho, \gamma_k \zeta) B_k + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_{rzk}(\sigma_k \rho, \sigma_k \zeta) C_k + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_{rzk}(\omega_k \rho, \omega_k \zeta) D_k \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь  $B_k, C_k, D_k$  — пока произвольные постоянные;  $\gamma_k$  — корни второй группы;  $\sigma_k$  и  $\omega_k$  — корни третьей группы, первые члены в разложении которых удовлетворяют соответственно уравнениям

$$(\sin 2\sigma_{0k} - 2\sigma_{0k}) / \sigma_{0k}^3 = 0, \quad (\sin 2\omega_{0k} + 2\omega_{0k}) / \omega_{0k} = 0.$$

Для определения коэффициентов  $B_k, C_k, D_k$  используем принцип возможных перемещений Лагранжа, взяв в качестве обобщенных параметров эти же коэффициенты.

В данном случае, однородные решения удовлетворяют точно уравнениям равновесия и граничным условиям на  $\Gamma_2$ , поэтому принцип возможных перемещений можно записать так:

$$\int_{R_1}^{R_2} (\sigma_z \delta w + \tau_{rz} \delta u) r dr = \int_{R_1}^{R_2} (\sigma_{z1}^* \delta w + \tau_{rz1} \delta u) r dr \quad (4.5)$$

Отсюда получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^2 B_p I(\gamma_k, \gamma_p) + \sum_{p=1}^{\infty} C_p I(\gamma_k, \sigma_p) + \sum_{p=1}^{\infty} D_p I(\gamma_k, \omega_p) &= \frac{1}{2G} T(\gamma_k) \\ (k=1, 2) \\ \sum_{p=1}^2 B_p I(\sigma_k, \gamma_p) + \sum_{p=1}^{\infty} C_p I(\sigma_k, \sigma_p) + \sum_{p=1}^{\infty} D_p I(\sigma_k, \omega_p) &= \frac{1}{2G} T(\sigma_k) \\ (k=1, 2, \dots, \infty) \\ \sum_{p=1}^2 B_p I(\omega_k, \gamma_p) + \sum_{p=1}^{\infty} C_p I(\omega_k, \sigma_p) + \sum_{p=1}^{\infty} D_p I(\omega_k, \omega_p) &= \frac{1}{2G} T(\omega_k) \\ (k=1, 2, \dots, \infty) \end{aligned} \quad (4.6)$$

В (4.6) введены следующие обозначения:

$$I(\gamma_k, \gamma_s) = Q(\gamma_k, \gamma_s) [(\gamma_k^2 - \gamma_s^2)(\nu - 1) M_{k1} M_{s1} + \\ + \gamma_k \gamma_s \rho (\gamma_k M_{k1} M_{s0} - \gamma_s M_{s1} M_{k0})] \Big|_{\rho=1}^{\rho=1+\varepsilon} \quad (\gamma_k \neq \gamma_s)$$

$$I(\gamma_k, \gamma_k) = -\frac{1}{2} \gamma_k^{-1} \operatorname{sh} 2\gamma_k l_0 \{M_{k0}^2 [(\nu - 1) \rho^2 \gamma_k^2 - \frac{4}{3} \rho^4 \gamma_k^4] + \\ + M_{k1}^2 [-3(\nu - 1) \rho^2 \gamma_k^2 - 2(\nu - 1)^2 + \frac{2}{3} \rho^2 \gamma_k^2 - \frac{4}{3} \rho^4 \gamma_k^4] + \\ + M_{k0} M_{k1} [-4(\nu - 1) \rho \gamma_k - \frac{2}{3} \rho^3 \gamma_k^3]\} \Big|_{\rho=1}^{\rho=1+\varepsilon} \quad (\gamma_k = \gamma_s)$$

$$T(\gamma_k) = \int_{R_1}^{R_2} (\sigma_{z1}^* w_k(\gamma_k \rho, \gamma_k l_0) + \tau_{rz1} u_k(\gamma_k \rho, \gamma_k l_0)) r dr$$

где

$$Q(\gamma_k, \gamma_s) = -\frac{4}{(\gamma_k^2 - \gamma_s^2)^3} [(\nu - 1)(\gamma_k^2 - \gamma_s^2)(\gamma_k \operatorname{sh} \gamma_k l_0 \operatorname{ch} \gamma_s l_0 - \\ - \gamma_s \operatorname{ch} \gamma_k l_0 \operatorname{sh} \gamma_s l_0) + (\gamma_k^2 + \gamma_s^2)(\gamma_k \operatorname{sh} \gamma_k l_0 \operatorname{ch} \gamma_s l_0 + \gamma_s \operatorname{ch} \gamma_k l_0 \operatorname{sh} \gamma_s l_0)] \quad (4.7)$$

$$M_{k1} = A_{2k} J_1(\gamma_k \rho) + A_{4k} Y_1(\gamma_k \rho), \quad M_{k0} = A_{2k} Y_0(\gamma_k \rho) + A_{4k} Y_0(\gamma_k \rho), \quad l_0 = l / R_1$$

Можно показать, что эта система линейных алгебраических уравнений является положительно определенной в пространстве энергий  $H_0$  и поэтому всегда разрешима при физически осмысленных условиях, наложенных на правую часть.

Исследуем структуру рассматриваемой системы при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Для этого разложим коэффициенты системы по степеням  $\varepsilon$ . Имеем

$$I(\gamma_k, \gamma_p) = \varepsilon \sqrt{\varepsilon} I_0(\gamma_k, \gamma_p) + \varepsilon^2 I_1(\gamma_k, \gamma_p) + \varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon} I_2(\gamma_k, \gamma_p) + \dots \quad (4.8)$$

$$I(\gamma_k, \sigma_p) = \varepsilon^2 I_0(\gamma_k, \sigma_p) + \varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon} I_1(\gamma_k, \sigma_p) + \varepsilon^3 I_2(\gamma_k, \sigma_p) + \dots$$

$$I(\gamma_k, \omega_p) = \varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon} I_0(\gamma_k, \omega_p) + \varepsilon^3 I_1(\gamma_k, \omega_p) + \varepsilon^3 \sqrt{\varepsilon} I_2(\gamma_k, \omega_p) + \dots$$

$$I(\sigma_k, \sigma_p) = \varepsilon^2 I_0(\sigma_k, \sigma_p) + \varepsilon^3 I_1(\sigma_k, \sigma_p) + \varepsilon^4 I_2(\sigma_k, \sigma_p) + \dots$$

$$I(\sigma_k, \omega_p) = \varepsilon^3 I_0(\sigma_k, \omega_p) + \varepsilon^4 I_1(\sigma_k, \omega_p) + \varepsilon^5 I_2(\sigma_k, \omega_p) + \dots$$

$$I(\omega_k, \omega_p) = \varepsilon^2 I_0(\omega_k, \omega_p) + \varepsilon^3 I_1(\omega_k, \omega_p) + \varepsilon^4 I_2(\omega_k, \omega_p) + \dots$$

$$T(\gamma_k) = \varepsilon \sqrt{\varepsilon} T_0(\gamma_k) + \varepsilon^2 T_1(\gamma_k) + \varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon} T_2(\gamma_k) + \dots$$

$$T(\sigma_k) = \varepsilon^2 T_0(\sigma_k) + \varepsilon^3 T_1(\sigma_k) + \varepsilon^4 T_2(\sigma_k) + \dots$$

$$T(\omega_k) = \varepsilon^2 T_0(\omega_k) + \varepsilon^3 T_1(\omega_k) + \varepsilon^4 T_2(\omega_k) + \dots$$

$$B_k = B_{0k} + \sqrt{\varepsilon} B_{1k} + \varepsilon B_{2k} + \dots$$

$$C_k = C_{0k} + \sqrt{\varepsilon} C_{1k} + \varepsilon C_{2k} + \dots$$

$$D_k = D_{0k} + \sqrt{\varepsilon} D_{1k} + \varepsilon D_{2k} + \dots$$

(4.9)

Здесь

$$I_0(\gamma_k, \gamma_p) = -16(v-1)(1-v^2) \sqrt[4]{3(1-v^2)} \left( \sin 2 \sqrt[4]{3(1-v^2)} \frac{l_0}{\sqrt{\varepsilon}} + \right. \\ \left. + \operatorname{sh} 2 \sqrt[4]{3(1-v^2)} \frac{l_0}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \\ (k \neq p)$$

$$I_0(\gamma_k, \gamma_k) = 0, \quad I_0(\sigma_k, \sigma_k) = 4\sigma_{0k}^3 \left( 1 - \frac{2}{3} \cos \sigma_{0k}^2 \right) \operatorname{sh} 4\sigma_{0k} \frac{l_0}{\varepsilon} \\ (k=p)$$

$$I_0(\gamma_k, \sigma_p) = 96v(1-v^2) \frac{1}{\gamma_{0k}\sigma_{0p}} \sin^2 \sigma_{0p} \operatorname{sh} 2\sigma_{0p} \frac{l_0}{\varepsilon} \operatorname{ch} \gamma_{0k} \frac{l_0}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$I_0(\sigma_k, \sigma_p) = \frac{32\sigma_{0k}^2\sigma_{0p}^2}{(\sigma_{0k}^2 - \sigma_{0p}^2)^3} \left[ (v-1)(\sigma_{0k}^2 - \sigma_{0p}^2) \left( \sigma_{0k} \operatorname{sh} 2\sigma_{0k} \frac{l_0}{\varepsilon} \operatorname{ch} 2\sigma_{0p} \frac{l_0}{\varepsilon} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sigma_{0p} \operatorname{sh} 2\sigma_{0k} \frac{l_0}{\varepsilon} \operatorname{ch} 2\sigma_{0k} \frac{l_0}{\varepsilon} \right) + (\sigma_{0k}^2 + \sigma_{0p}^2) \times \right. \\ \left. \times \left( \sigma_{0k} \operatorname{sh} 2\sigma_{0k} \frac{l_0}{\varepsilon} \operatorname{ch} 2\sigma_{0p} \frac{l_0}{\varepsilon} + \sigma_{0p} \operatorname{sh} 2\sigma_{0p} \frac{l_0}{\varepsilon} \operatorname{ch} 2\sigma_{0k} \frac{l_0}{\varepsilon} \right) \right] (\cos^2 \sigma_{0k} - \cos^2 \sigma_{0p}) \\ (k \neq p)$$

$$I_0(\omega_k, \omega_p) = \frac{32\omega_{0k}^2\omega_{0p}^2}{(\omega_{0k}^2 - \omega_{0p}^2)^3} \left[ (v-1)(\omega_{0k}^2 - \omega_{0p}^2) \left( \omega_{0k} \operatorname{sh} 2\omega_{0k} \frac{l_0}{\varepsilon} \operatorname{ch} 2\omega_{0p} \frac{l_0}{\varepsilon} - \right. \right. \\ \left. \left. - \omega_{0p} \operatorname{sh} 2\omega_{0p} \frac{l_0}{\varepsilon} \operatorname{ch} 2\omega_{0k} \frac{l_0}{\varepsilon} \right) + (\omega_{0k}^2 + \omega_{0p}^2) \times \right. \\ \left. \times \left( \omega_{0k} \operatorname{sh} 2\omega_{0k} \frac{l_0}{\varepsilon} \operatorname{ch} 2\omega_{0p} \frac{l_0}{\varepsilon} + \omega_{0p} \operatorname{sh} 2\omega_{0p} \frac{l_0}{\varepsilon} \operatorname{ch} 2\omega_{0k} \frac{l_0}{\varepsilon} \right) \right] (\sin^2 \omega_{0k} - \sin^2 \omega_{0p}) \\ (k \neq p)$$

$$I_0(\omega_k, \omega_k) = 4\omega_{0k}^3 \left( 1 - \frac{2}{3} \sin^2 \omega_{0k} \right) \operatorname{sh} 4\omega_{0k} \frac{l_0}{\varepsilon} \\ (k=p)$$

$$T_0(\gamma_k) = \int_{-1}^1 \left\{ \sigma_{z1}^* [4(v-1)v + 2\gamma_{0k}^2(v-1)r_0] \operatorname{sh} \gamma_{0k} \frac{l_0}{\sqrt{\varepsilon}} - \right. \\ \left. - 4(v-1) \tau_{rz1} \gamma_{0k} \operatorname{ch} \gamma_{0k} \frac{l_0}{\sqrt{\varepsilon}} \right\} dr_0$$

$$T_0(\sigma_k) = \int_{-1}^1 \left[ \sigma_{z1}^* w_{0k}(\sigma_{0k}) \operatorname{sh} 2\sigma_{0k} \frac{l_0}{\varepsilon} + \tau_{rz1} u_{0k}(\sigma_{0k}) 2\sigma_{0k} \operatorname{ch} 2\sigma_{0k} \frac{l_0}{\varepsilon} \right] dr_0 \quad (4.10)$$

$$T_0(\omega_k) = \int_{-1}^1 \left[ \sigma_{z1}^* w_{0k}(\omega_{0k}) \operatorname{sh} 2\omega_{0k} \frac{l_0}{\varepsilon} + \tau_{rz1} u_{0k}(\omega_{0k}) 2\omega_{0k} \operatorname{ch} 2\omega_{0k} \frac{l_0}{\varepsilon} \right] dr_0$$

Из анализа структуры системы при  $\varepsilon \rightarrow 0$  можно заключить, что первые приближения каждой группы искомых неизвестных  $B_{0k}$ ,  $C_{0k}$ ,  $D_{0k}$  определяются независимо, т. е.  $B_{0k}$  находятся из двух уравнений,  $C_{0k}$  находятся из одной бесконечной счетной системы алгебраических уравнений, а  $D_{0k}$  находятся отдельно из другой бесконечной счетной системы

$$\sum_{p=1}^2 \left( B_{0p} I_0(\gamma_k, \gamma_p) - \frac{1}{2G} T_0(\gamma_k) \right) = 0 \quad (k=1, 2) \quad (4.11)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left( C_{0p} I_0(\sigma_k, \sigma_p) - \frac{1}{2G} T_0(\sigma_k) \right) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, \infty) \quad (4.12)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left( D_{0p} I_0(\omega_k, \omega_p) - \frac{1}{2G} T_0(\omega_k) \right) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, \infty) \quad (4.13)$$

Важно подчеркнуть, что определение  $B_{ik}$ ,  $C_{ik}$ ,  $D_{ik}$  неизменно сводится к обращению одних и тех же матриц, соответствующих системам (4.11) — (4.13). Элементы этих матриц не зависят от вида нагрузки на торцах  $\Gamma_1$ , а потому обращение может быть произведено один раз и навсегда. Для полубесконечного цилиндра  $m_k = \exp(-\gamma_k \xi)$  система аналогична (4.11) — (4.13), но выражения для  $I_0$  и  $T_0$  уже другие

$$I_0(\gamma_k, \gamma_p) = 32(1-v^2)(v-1)^4 \sqrt{3(1-v^2)} \exp\left(-2\sqrt{3(1-v^2)} \frac{l_0}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \quad (k \neq p)$$

$$I_0(\gamma_k, \gamma_k) = 0 \quad (k=p)$$

$$I_0(\sigma_k, \sigma_k) = -4\sigma_{0k}^3 \left(1 - \frac{2}{3} \cos^2 \sigma_{0k}\right) \exp\left(-4\sigma_{0k} \frac{l_0}{\varepsilon}\right) \quad (k=p)$$

$$I_0(\sigma_k, \sigma_p) = -\frac{32\sigma_{0k}^2 \sigma_{0p}^2}{(\sigma_{0k}^2 - \sigma_{0p}^2)^2 (\sigma_{0k} - \sigma_{0p})} [\nu(\sigma_{0k} - \sigma_{0p})^2 + 2\sigma_{0k} \sigma_{0p}] \times \\ \times (\cos^2 \sigma_{0k} - \cos^2 \sigma_{0p}) \exp\left[-(\sigma_{0k} + \sigma_{0p}) \frac{l_0}{\varepsilon}\right] \quad (k \neq p)$$

$$I_0(\omega_k, \omega_p) = -\frac{32\omega_{0k}^2 \omega_{0p}^2}{(\omega_{0k}^2 - \omega_{0p}^2)^2 (\omega_{0k} - \omega_{0p})} [\nu(\omega_{0k} - \omega_{0p})^2 + 2\omega_{0k} \omega_{0p}] \times \\ \times (\sin^2 \omega_{0k} - \sin^2 \omega_{0p}) \exp\left\{-\frac{l_0}{\varepsilon} (\omega_{0k} + \omega_{0p})\right\} \quad (k \neq p)$$

$$I_0(\omega_k, \omega_k) = -4\omega_{0k}^3 \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \omega_{0k}\right) \exp\left(-4\omega_{0k} \frac{l_0}{\varepsilon}\right) \quad (k=p) \quad (4.14)$$

$$T_0(\gamma_k) =$$

$$= \int_{-1}^1 \left\{ \sigma_{z1}^* [4(v-1)\nu + 2\gamma_{0k}^2(v-1)r_0] + 4(v-1)\tau_{rz1}\gamma_{0k} \right\} \exp\left(-\gamma_{0k} \frac{l_0}{\sqrt{\varepsilon}}\right) dr_0$$

$$T_0(\sigma_k) = \int_{-1}^1 [\sigma_{z1}^* w_{0k}(\sigma_{0k}) - \tau_{rz1} u_{0k}(\sigma_{0k}) 2\sigma_{0k}] \exp\left(-2\sigma_{0k} \frac{l_0}{\varepsilon}\right) dr_0 \quad (4.15)$$

$$T_0(\omega_k) = \int_{-1}^1 [\sigma_{z1}^* w_{0k}(\omega_{0k}) - \tau_{rz1} u_{0k}(\omega_{0k}) 2\omega_{0k}] \exp\left(-2\omega_{0k} \frac{l_0}{\varepsilon}\right) dr_0$$

Следует отметить, что системы (4.12), (4.13) с учетом (4.14), (4.15) встречаются в теории плит; для их решения оказался пригодным метод урезания. Система (4.12) соответствует изгибу плиты, (4.13) — растяжению.

§ 5. Снятие напряжений с цилиндрической части границы. Построение уточненных теорий. До сих пор изучались однородные решения. Однако метод, используемый в § 1, позволяет построить решение, снимающее напряжение и с цилиндрической части границы, если нагрузка на этой границе представима рядом Фурье. С этой целью найдем решение, отвечающее  $k$ -й гармонике внешних усилий и удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \sigma_r(R_1, z) &= 2GA \cos k\zeta, & \tau_{rz}(R_1, z) &= 2GB \sin k\zeta \\ \sigma_r(R_2, z) &= 2GC \cos k\zeta, & \tau_{rz}(R_2, z) &= 2GD \sin k\zeta \end{aligned} \quad (5.1)$$

Эта задача будет иметь вспомогательный характер, и ее решение может быть записано в виде

$$(R_1/R_2) \gamma^2 \Theta(\gamma, \varepsilon) u = (AP_1(\rho, \gamma, \varepsilon) + BP_2(\rho, \gamma, \varepsilon) + CP_3(\rho, \gamma, \varepsilon) + DP_4(\rho, \gamma, \varepsilon)) \cos k\zeta \quad (5.2)$$

$$(R_1/R_2) \gamma^2 \Theta(\gamma, \varepsilon) w = (AQ_1(\rho, \gamma, \varepsilon) + BQ_2(\rho, \gamma, \varepsilon) + CQ_3(\rho, \gamma, \varepsilon) + DQ_4(\rho, \gamma, \varepsilon)) \sin k\zeta \quad (5.3)$$

где  $\gamma = ik$ ,  $\Theta$  дается (2.1), а

$$P_i = A_{1i} J_1(\gamma\rho) - A_{2i} \gamma\rho J_0(\gamma\rho) + A_{3i} Y_1(\gamma\rho) - A_{4i} \gamma\rho Y_0(\gamma\rho) \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} Q_i &= -A_{1i} J_0(\gamma\rho) + A_{2i} [4(1-\nu) J_0(\gamma\rho) - \gamma\rho J_1(\gamma\rho)] - \\ &- A_{3i} Y_0(\gamma\rho) + A_{4i} [4(1-\nu) Y_0(\gamma\rho) - \gamma\rho Y_1(\gamma\rho)] \end{aligned} \quad (5.5)$$

Величины  $A_{ki}$  находятся по формулам (5.4)–(5.7). Полагая  $\xi_1 = \eta$ ,  $\xi_2 = \eta(1+\varepsilon)$ , имеем

$$A_{11} = \gamma^3 \{ [\xi_2 + 2(\nu-1)\xi_2^{-1}] Y_1(\xi_2) [\xi_1 L_{01} - 2(\nu-1)L_{11}] + \xi_2 Y_0(\xi_2) [\xi_1 L_{00} - 2(\nu-1)L_{10}] + 2(\nu-1)\xi_1 \xi_2^{-1} Y_0(\xi_1) + [\xi_2 + 2(\nu-1)\xi_2^{-1}] Y_1(\xi_1) \} \quad (5.6)$$

$$A_{21} = \gamma^3 \{ [\xi_2 + 2(\nu-1)\xi_2^{-1}] Y_1(\xi_2) L_{11} + \xi_2 Y_0(\xi_2) L_{10} - \xi_1 \xi_2^{-1} Y_0(\xi_1) \}$$

$$A_{31} = -\gamma^3 \{ [\xi_2 + 2(\nu-1)\xi_2^{-1}] J_1(\xi_2) [\xi_1 L_{01} - 2(\nu-1)L_{11}] + \xi_2 J_0(\xi_2) [\xi_1 L_{00} - 2(\nu-1)L_{10}] + 2(\nu-1)\xi_1 \xi_2^{-1} J_0(\xi_1) + [\xi_2 + 2(\nu-1)\xi_2^{-1}] J_1(\xi_1) \}$$

$$A_{41} = -\gamma^3 \{ [\xi_2 + 2(\nu-1)\xi_2^{-1}] J_1(\xi_2) L_{11} + \xi_2 J_0(\xi_2) L_{10} - \xi_1 \xi_2^{-1} J_0(\xi_1) \}$$

$$A_{12} = \gamma^3 \{ Y_1(\xi_2) [\xi_2 + 2(\nu-1)\xi_2^{-1}] [(2\nu-1)L_{01} + \xi_1 L_{11}] + \xi_2 Y_0(\xi_2) [(2\nu-1)L_{00} + \xi_1 L_{10}] + 2(\nu-1) \frac{1}{\xi_2} Y_1(\xi_1) [\xi_1 + (2\nu-1)\xi_1^{-1}] - \xi_2 Y_0(\xi_1) + \xi_2 \xi_1^{-1} Y_1(\xi_1) \}$$

$$A_{22} = \gamma^3 \{ Y_1(\xi_2) [\xi_2 + 2(\nu-1)\xi_2^{-1}] (\xi_1^{-1} L_{11} - L_{01}) + \xi_2 Y_0(\xi_2) (\xi_1^{-1} L_{10} - L_{00}) - \xi_2^{-1} Y_1(\xi_1) [\xi_1 + 2(\nu-1)\xi_1^{-1}] - \xi_2^{-1} Y_0(\xi_1) \}$$

$$A_{32} = -\gamma^3 \{ J_1(\xi_2) [\xi_2 + 2(\nu-1)\xi_2^{-1}] [(2\nu-1)L_{01} + \xi_1 L_{11}] + \xi_2 J_0(\xi_2) [\xi_1 L_{10} + (2\nu-1)L_{00}] + 2(\nu-1)\xi_2^{-1} J_1(\xi_1) [\xi_1 + (2\nu-1)\xi_1^{-1}] - \xi_2 J_0(\xi_1) + \xi_2 \xi_1^{-1} J_1(\xi_1) \}$$

$$A_{42} = -\gamma^3 \{ J_1(\xi_2) [\xi_2 + 2(\nu-1)\xi_2^{-1}] (\xi_1^{-1} L_{11} - L_{01}) + \xi_2 J_0(\xi_2) (\xi_1^{-1} L_{10} - L_{00}) - \xi_2^{-1} J_1(\xi_1) [\xi_1 + 2(\nu-1)\xi_1^{-1}] - \xi_2^{-1} J_0(\xi_1) \}$$

$$\begin{aligned}
A_{13} &= \gamma^3 \{ [\xi_1 + 2(\nu - 1)\xi_1^{-1}] Y_1(\xi_1) [2(\nu - 1)L_{11} - \xi_2 L_{10}] + \xi_1 Y_0(\xi_1) \times \\
&\quad \times [2(\nu - 1)L_{01} - \xi_2 L_{00}] + 2(\nu - 1)\xi_2 \xi_1^{-1} Y_0(\xi_2) + [\xi_1 + 2(\nu - 1)\xi_1^{-1}] Y_1(\xi_2) \} \\
A_{23} &= -\gamma^3 \{ [\xi_1 + 2(\nu - 1)\xi_1^{-1}] Y_1(\xi_1) L_{11} + \xi_1 Y_0(\xi_1) L_{01} + \xi_2 \xi_1^{-1} Y_0(\xi_2) \} \\
A_{33} &= -\gamma^3 \{ [\xi_1 + 2(\nu - 1)\xi_1^{-1}] J_1(\xi_1) [2(\nu - 1)L_{11} - \xi_2 L_{10}] + \xi_1 J_0(\xi_1) \times \\
&\quad \times [2(\nu - 1)L_{01} - \xi_2 L_{00}] + 2(\nu - 1)\xi_1^{-1} \xi_2 J_0(\xi_2) + [\xi_1 + 2(\nu - 1)\xi_1^{-1}] J_1(\xi_2) \} \\
A_{43} &= \gamma^3 \{ [\xi_1 + 2(\nu - 1)\xi_1^{-1}] J_1(\xi_1) L_{11} + \xi_1 J_0(\xi_1) L_{01} + \xi_2 \xi_1^{-1} J_0(\xi_2) \} \\
A_{14} &= -\gamma^3 \{ Y_1(\xi_1) [\xi_1 + 2(\nu - 1)\xi_1^{-1}] [(2\nu - 1)L_{10} + \xi_2 L_{11}] + \xi_1 Y_0(\xi_1) \times \\
&\quad \times [(2\nu - 1)L_{00} + \xi_2 L_{01}] - 2(\nu - 1)\xi_1^{-1} Y_1(\xi_2) [\xi_2 + (2\nu - 1)\xi_2^{-1}] + \\
&\quad + \xi_1 Y_0(\xi_2) - \xi_1 \xi_2^{-1} Y_1(\xi_2) \} \\
A_{24} &= \gamma^3 \{ Y_1(\xi_1) [\xi_1 + 2(\nu - 1)\xi_1^{-1}] (L_{10} - \xi_2^{-1} L_{11}) + \xi_1 Y_0(\xi_1) (L_{00} - \xi_2^{-1} L_{01}) - \\
&\quad - \xi_1^{-1} Y_1(\xi_2) [\xi_2 + 2(\nu - 1)\xi_2^{-1}] - \xi_1^{-1} Y_0(\xi_2) \} \\
A_{34} &= \gamma^3 \{ J_1(\xi_1) [\xi_1 + 2(\nu - 1)\xi_1^{-1}] [(2\nu - 1)L_{10} + \xi_2 L_{11}] + \xi_1 J_0(\xi_1) [\xi_2 L_{01} + \\
&\quad + (2\nu - 1)L_{00}] - 2(\nu - 1)\xi_1^{-1} J_1(\xi_2) [\xi_2 + (2\nu - 1)\xi_2^{-1}] + \xi_1 J_0(\xi_2) - \xi_1 \xi_2^{-1} J_1(\xi_2) \} \\
A_{44} &= -\gamma^3 \{ J_1(\xi_1) [\xi_1 + 2(\nu - 1)\xi_1^{-1}] (L_{10} - \xi_2^{-1} L_{11}) + \xi_1 J_0(\xi_1) (L_{00} - \xi_2^{-1} L_{01}) - \\
&\quad - \xi_1^{-1} J_1(\xi_2) [\xi_2 + 2(\nu - 1)\xi_2^{-1}] - \xi_1^{-1} J_0(\xi_2) \} \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Точное решение, построенное этим путем, используем для оценки точности существующих прикладных теорий. Допустим, что представляет интерес некоторая характеристика вышеприведенного решения. Например, поведение  $u$  и  $w$  на срединной поверхности  $r = 0.5(R_1 + R_2)$ , когда относительная толщина оболочки  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для этого разложим  $\Theta$ ,  $P_i$  и  $Q_i$  в ряд по степеням  $\varepsilon$ . Удержав в (5.2,3) слева и справа некоторое определенное число членов с  $\varepsilon$ , можно для снятия напряжений с цилиндрической части границы использовать соотношения вида

$$\begin{aligned}
u \sum_{p=1}^N \Delta_p^*(ik) \varepsilon^p &= \sum_{p=1}^N (AP_{1p}(ik) + BP_{2p}(ik) + CP_{3p}(ik) + DP_{4p}(ik)) \varepsilon^p \cos k\xi \\
w \sum_{p=1}^N \Delta_p^*(ik) \varepsilon^p &= \sum_{p=1}^N (AQ_{1p}(ik) + BQ_{2p}(ik) + CQ_{3p}(ik) + DQ_{4p}(ik)) \varepsilon^p \sin k\xi
\end{aligned} \quad (5.8)$$

де  $\Delta_p^*(ik)$ ,  $P_{ip}(ik)$ ,  $Q_{ip}(ik)$  — полиномы от  $ik$ .

Формулы (5.8) будут тем точнее, чем меньше  $\varepsilon k$  и чем больше  $N$ . Легко видеть, что к формулам (5.8) можно прийти, если предположить, что  $u$  и  $w$  определяются на основе некоей прикладной теории, которая описывается уравнениями

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^N \Delta_p^* \left( \frac{d}{d\xi} \right) u \varepsilon^p &= \sum_{p=1}^N \left( P_{1p} \left( \frac{d}{d\xi} \right) \sigma_r^*(R_1, z) + P_{2p} \left( \frac{d}{d\xi} \right) \tau_{rz}^*(R_1, z) + \right. \\
&\quad \left. + P_{3p} \left( \frac{d}{d\xi} \right) \sigma_r^*(R_2, z) + P_{4p} \left( \frac{d}{d\xi} \right) \tau_{rz}^*(R_2, z) \right) \varepsilon^p \\
\sum_{p=1}^N \Delta_p^* \left( \frac{d}{d\xi} \right) w \varepsilon^p &= \sum_{p=1}^N \left( Q_{1p} \left( \frac{d}{d\xi} \right) \sigma_r^*(R_1, z) + Q_{2p} \left( \frac{d}{d\xi} \right) \tau_{rz}^*(R_1, z) + \right. \\
&\quad \left. + Q_{3p} \left( \frac{d}{d\xi} \right) \sigma_r^*(R_2, z) + Q_{4p} \left( \frac{d}{d\xi} \right) \tau_{rz}^*(R_2, z) \right) \varepsilon^p
\end{aligned} \quad (5.9)$$

Очевидно, уравнения (5.8), (5.9) тем более точны, чем меньше  $\varepsilon k$ , где  $k$  определяет границы существенной части спектра внешних напряжений. Таким образом, здесь фактически развит подход к построению прикладных теорий для цилиндрической оболочки. При этом, удерживая в (5.9) большее число членов, будем получать и более точные теории. Отметим, что данные прикладные теории, по идее предназначены лишь для снятия напряжений с цилиндрической части границы.

Снятие напряжений с торцов производится ранее найденными однородными решениями. Тем не менее, можно поставить вопрос о соотношениях краевых эффектов прикладных теорий типа (5.9) и точных краевых эффектов, определяемых характеристическим уравнением (2.1). Так, если отыскивать однородные решения уравнений (5.9) в виде  $u, w \sim e^{\gamma \zeta}$ , то для  $\gamma$  получим уравнение

$$P_N(\gamma) = \Delta_1^*(\gamma) \varepsilon + \Delta_2^*(\gamma) \varepsilon^2 + \dots + \Delta_N^*(\gamma) \varepsilon^N = 0 \quad (5.10)$$

Из уравнения (5.10) нетрудно найти первые  $[1/2N]$  членов ряда в разложении корней второй группы. Что же касается корней третьей группы, определяющих краевые эффекты Сен-Венана, то их определение из уравнения (5.10) невозможно.

В качестве конкретной прикладной теории, базирующейся на уравнениях (5.9), предлагается теория, в которой  $N = 4$ . Вычисления дают

$$\begin{aligned} & \left\{ \varepsilon^2 \left[ 4(v^2 - 1) \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] + \varepsilon^3 \left[ -4(v^2 - 1) \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] + \varepsilon^4 \left[ -\frac{1}{3} \frac{d^6}{d\zeta^6} - \frac{4}{3} (v^2 - 1) \frac{d^4}{d\zeta^4} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 5(v^2 - 1) \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] \right\} u = \frac{R_1}{2G} \left\{ \left\langle \varepsilon \left[ -4(v-1) \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] + \varepsilon^2 \left[ -2(v-1)^2 \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \varepsilon^3 \left[ -\frac{1}{2} \frac{d^4}{d\zeta^4} + \frac{5}{6} (v-1) \frac{d^4}{d\zeta^4} + \frac{5}{2} (v-1)^2 \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] + \varepsilon^4 \left[ -\frac{1}{4} (v-1) \frac{d^4}{d\zeta^4} + \frac{5}{12} (v-1)^2 \times \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \frac{d^4}{d\zeta^4} - 3(v-1)^2 \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] \right\rangle \sigma_r^*(R_1, z) + \left\langle \varepsilon \left[ -4v(v-1) \frac{d}{d\zeta} \right] + \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon^2 \left[ 4v(v-1) \frac{d}{d\zeta} + 2(v-1) \frac{d^3}{d\zeta^3} \right] + \varepsilon^3 \left[ -\frac{1}{2} \frac{d^3}{d\zeta^3} - 5v(v-1) \frac{d}{d\zeta} + \frac{7}{6} (v-1)^2 \frac{d^3}{d\zeta^3} \right] + \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon^4 \left[ \frac{1}{12} \frac{d^5}{d\zeta^5} + 6v(v-1) \frac{d}{d\zeta} - \frac{7}{12} (v-1) \frac{d^3}{d\zeta^3} - \frac{1}{4} (v-1) \frac{d^5}{d\zeta^5} - \frac{19}{12} (v-1)^2 \frac{d^3}{d\zeta^3} \right] \right\rangle \times \\ & \quad \times \tau_{rz}^*(R_1, z) + \left\langle \varepsilon \left[ 4(v-1) \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] + \varepsilon^2 \left[ -2(v-1)^2 \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] + \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon^3 \left[ \frac{1}{2} \frac{d^4}{d\zeta^4} - \frac{5}{6} (v-1) \frac{d^4}{d\zeta^4} - \frac{1}{2} (v-1)^2 \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] + \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon^4 \left[ -\frac{1}{4} (v-1) \frac{d^4}{d\zeta^4} + \frac{5}{12} (v-1)^2 \frac{d^4}{d\zeta^4} \right] \right\rangle \sigma_r^*(R_2, z) + \left\langle \varepsilon \left[ 4v(v-1) \frac{d}{d\zeta} \right] + \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon^2 \left[ 2(v-1) \frac{d^3}{d\zeta^3} \right] + \varepsilon^3 \left[ \frac{1}{2} \frac{d^3}{d\zeta^3} + v(v-1) \frac{d}{d\zeta} - \frac{7}{6} (v-1)^2 \frac{d^3}{d\zeta^3} \right] + \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon^4 \left[ -\frac{1}{2} \frac{d^3}{d\zeta^3} - v(v-1) \frac{d}{d\zeta} - \frac{7}{12} (v-1) \frac{d^3}{d\zeta^3} - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{5}{12} (v-1)^2 \frac{d^3}{d\zeta^3} + \frac{1}{12} \frac{d^5}{d\zeta^5} - \frac{1}{4} (v-1) \frac{d^5}{d\zeta^5} \right] \right\rangle \tau_{rz}^*(R_2, z) \Big\} \\ & \left\{ \varepsilon^2 \left[ 4(v^2 - 1) \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] + \varepsilon^3 \left[ -4(v^2 - 1) \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] + \varepsilon^4 \left[ -\frac{1}{3} \frac{d^6}{d\zeta^6} - \frac{4}{3} (v^2 - 1) \frac{d^4}{d\zeta^4} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 5(v^2 - 1) \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] \right\} w = \frac{R_1}{2G} \left\{ \left\langle \varepsilon \left[ 4v(v-1) \frac{d}{d\zeta} \right] + \varepsilon^2 \left[ -6v(v-1) \frac{d}{d\zeta} \right] + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \varepsilon^3 \left[ 8v(v-1) \frac{d}{d\zeta} - \frac{3}{2} (v-1) \frac{d^3}{d\zeta^3} - \frac{7}{6} (v-1)^2 \frac{d^3}{d\zeta^3} \right] + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \varepsilon^4 \left[ -10v(v-1) \frac{d}{d\zeta} + \frac{1}{6} v \frac{d^5}{d\zeta^5} + \frac{25}{12} (v-1) \frac{d^3}{d\zeta^3} + \frac{5}{3} (v-1)^2 \frac{d^3}{d\zeta^3} \right] \right\rangle \sigma_r^*(R_1, z) + \right. \\ & \quad \left. + \left\langle \varepsilon \left[ 4(v-1) \right] + \varepsilon^2 \left[ -6(v-1) - 2v(v-1) \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] + \varepsilon^3 \left[ 8(v-1) + \frac{5}{6} (v-1) \frac{d^2}{d\zeta^2} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{3} (v-1) \frac{d^4}{d\zeta^4} + \frac{11}{6} (v-1)^2 \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] + \varepsilon^4 \left[ -\frac{5}{12} \frac{d^4}{d\zeta^4} - 10(v-1) - \frac{9}{4} (v-1) \frac{d^2}{d\zeta^2} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{7}{12} (v-1) \frac{d^4}{d\zeta^4} - \frac{29}{12} (v-1)^2 \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{5}{12} (v-1)^2 \frac{d^4}{d\zeta^4} \right] \right\rangle \tau_{rz}^*(R_1, z) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\langle \varepsilon \left[ -4\nu(\nu-1) \frac{d}{d\zeta} \right] + \varepsilon^2 \left[ -2\nu(\nu-1) \frac{d}{d\zeta} \right] + \varepsilon^3 \left[ \frac{3}{2}(\nu-1) \frac{d^3}{d\zeta^3} + \frac{7}{6}(\nu-1)^2 \frac{d^3}{d\zeta^3} \right] + \right. \\
& \quad \left. + \varepsilon^4 \left[ \frac{\nu}{6} \frac{d^5}{d\zeta^5} + \frac{7}{12}(\nu-1) \frac{d^3}{d\zeta^3} + \frac{1}{2}(\nu-1)^2 \frac{d^3}{d\zeta^3} \right] \right\rangle \sigma_r^*(R_2, z) + \left\langle \varepsilon [-4(\nu-1)] + \right. \\
& + \varepsilon^2 \left[ 2(\nu-1) - 2\nu(\nu-1) \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] + \varepsilon^3 \left[ -2(\nu-1) + \frac{7}{6}(\nu-1) \frac{d^2}{d\zeta^2} - \frac{1}{3}(\nu-1) \frac{d^4}{d\zeta^4} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{6}(\nu-1)^2 \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] + \varepsilon^4 \left[ \frac{1}{6} \frac{d^4}{d\zeta^4} + 2(\nu-1) - \frac{17}{12}(\nu-1) \frac{d^2}{d\zeta^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{7}{12}(\nu-1) \frac{d^4}{d\zeta^4} - \frac{3}{4}(\nu-1)^2 \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{5}{12}(\nu-1)^2 \frac{d^4}{d\zeta^4} \right] \right\rangle \tau_{rz}^*(R_2, z) \quad (5.11)
\end{aligned}$$

Для сравнения приводятся теории В. З. Власова (5.12) и В. В. Новожилова (5.13) [6], представленные в аналогичной форме

$$\begin{aligned}
& \left\{ \varepsilon^2 \left[ 4(\nu^2-1) \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] + \varepsilon^3 \left[ -4(\nu^2-1) \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] + \varepsilon^4 \left[ -\frac{2}{3}\nu \frac{d^4}{d\zeta^4} - \frac{1}{3} \frac{d^6}{d\zeta^6} - \frac{1}{3} \frac{d^2}{d\zeta^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + 3(\nu^2-1) \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] \right\} u = \frac{R_1}{2G} \left\{ \left\langle \varepsilon \left[ -4(\nu-1) \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] \right\rangle \sigma_r^*(R_1, z) + \left\langle \varepsilon \left[ -4\nu(\nu-1) \frac{d}{d\zeta} \right] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \varepsilon^3 \left[ \frac{1}{3}(\nu-1) \frac{d^3}{d\zeta^3} \right] + \varepsilon^4 \left[ -\frac{1}{3}(\nu-1) \frac{d^3}{d\zeta^3} \right] \right\rangle \tau_{rz}^*(R_1, z) \right\} \quad (5.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \varepsilon^2 \left[ 4(\nu^2-1) \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] + \varepsilon^3 \left[ -4(\nu^2-1) \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] + \varepsilon^4 \left[ -\frac{2}{3}\nu \frac{d^4}{d\zeta^4} - \frac{1}{3} \frac{d^6}{d\zeta^6} - \frac{1}{3} \frac{d^2}{d\zeta^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + 3(\nu^2-1) \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] \right\} w = \frac{R_1}{2G} \left\{ \left\langle \varepsilon \left[ 4\nu(\nu-1) \frac{d}{d\zeta} \right] + \varepsilon^3 \left[ -\frac{1}{3}(\nu-1) \frac{d^3}{d\zeta^3} \right] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \varepsilon^4 \left[ \frac{1}{3}(\nu-1) \frac{d^3}{d\zeta^3} \right] \right\rangle \sigma_r^*(R_1, z) + \left\langle \varepsilon [4(\nu-1)] + \varepsilon^3 \left[ \frac{1}{3}(\nu-1) \frac{d^4}{d\zeta^4} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{3}(\nu-1) \right] + \varepsilon^4 \left[ -\frac{1}{3}(\nu-1) \frac{d^4}{d\zeta^4} - \frac{1}{3}(\nu-1) \right] \right\rangle \tau_{rz}^*(R_1, z) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \varepsilon^2 \left[ 4(\nu^2-1) \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] + \varepsilon^3 \left[ -4(\nu^2-1) \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] + \varepsilon^4 \left[ -\frac{1}{3} \frac{d^6}{d\zeta^6} + 3(\nu^2-1) \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] \right\} u = \\
& = \frac{R_1}{2G} \left\{ \left\langle \varepsilon \left[ 4(\nu-1) \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] \right\rangle \sigma_r^*(R_2, z) + \left\langle \varepsilon \left[ 4\nu(\nu-1) \frac{d}{d\zeta} \right] \right\rangle \tau_{rz}^*(R_2, z) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \varepsilon^2 \left[ 4(\nu^2-1) \frac{d^3}{d\zeta^3} \right] + \varepsilon^3 \left[ -4(\nu^2-1) \frac{d^3}{d\zeta^3} \right] + \varepsilon^4 \left[ -\frac{1}{3} \frac{d^7}{d\zeta^7} + 3(\nu^2-1) \frac{d^3}{d\zeta^3} \right] \right\} w = \\
& = \frac{R_1}{2G} \left\{ \left\langle \varepsilon \left[ -4\nu(\nu-1) \frac{d^2}{d\zeta^2} \right] \right\rangle \sigma_r^*(R_2, z) + \left\langle \varepsilon \left[ -4(\nu-1) \frac{d}{d\zeta} \right] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \varepsilon^3 \left[ -\frac{1}{3}(\nu-1) \frac{d^5}{d\zeta^5} \right] + \varepsilon^4 \left[ \frac{1}{3}(\nu-1) \frac{d^5}{d\zeta^5} \right] \right\rangle \tau_{rz}^*(R_2, z) \right\} \quad (5.13)
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что совпадение теории (5.11) с прикладными теориями (5.12) и (5.13) имеет место лишь в первом приближении.

Такое же заключение следует и из работы [7], в которой автор строит приближенные дифференциальные уравнения цилиндрической оболочки в иной форме.

Поступила 25 VI 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Прокопов В. К. Равновесие упругого толстостенного осесимметричного цилиндра. ПММ, 1949, т. 12, вып. 2.
2. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1955.
3. Аксиентян О. К., Ворович И. И. Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
4. Власов В. З. Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек. ПММ, 1944, т. 8, вып. 2.
5. Даревский В. М. Об основных соотношениях теории тонких оболочек. ПММ, 1961, т. 25, вып. 3.
6. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1962.
7. Колывагин А. А. Автоматизация вычислительных работ. Машгиз, 1962.