

КОРОТКОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА ДИФРАКЦИОННОГО ПОЛЯ НА СФЕРЕ ПРИ ПАДЕНИИ ПЛОСКИХ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН

И. М. Яворская

(Москва)

Задачи, связанные с распространением волн в упругих средах, представляются более сложными по сравнению с акустическими и электромагнитными, поскольку в упругой среде имеются две скорости распространения волн и в граничных условиях появляется необходимость учитывать взаимодействие продольных и поперечных волн. Этим вопросам последнее время посвящено значительное количество работ, из которых можно отметить, например [1-15].

В [1] сформулированы задачи о дифракции упругих волн на круговом и эллиптическом цилиндрах при различных граничных условиях. Решение получено в виде бесконечных рядов по соответствующим ортогональным функциям. Эти ряды сходятся достаточно быстро лишь для случая, когда линейный размер цилиндра мал или сравним с длиной волны. В сборнике [2] дана постановка некоторых задач о распространении волн в упругих средах с цилиндрическими и сферическими границами раздела, предложен метод исследования бесконечных рядов, представляющих решение; обсуждаются вопросы, связанные с обоснованием предложенного метода.

Достаточно общий метод решения задач о рассеянии упругих волн большой частоты на криволинейных объектах предложен в [3,4]. Но получающиеся этим методом решения справедливы (в соответствии с принципом Кирхгоффа) лишь в освещенной области. Многочисленные зарубежные работы [5-10] по рассеянию упругих волн на цилиндре и сфере в основном относятся к релеевскому случаю ($k_1 a \ll 1$, a — характерный размер тела), в решении учитываются один или несколько первых членов ряда по соответствующим ортогональным функциям.

Дифракция ступенчатых волн на цилиндре обычно рассматривалась либо в области света [11], либо для моментов времени $t > 2a/c$ (c — скорость волны) [12,13].

В [14,15] показана важность нахождения коротковолновой асимптотики решения стационарных задач, так как из нее, используя формулу обращения преобразования Лапласа, можно получить решение нестационарной задачи. В [15] этот метод использован при решении задачи дифракции волны сжатия от линейного импульсного источника жестким цилиндром. Решение найдено вблизи фронта волны.

В данной работе, как и в предыдущих [16,17], используется метод Ватсона [18], развитый и дополненный В. А. Фоком [19] и применявшийся ранее для задач акустики и электродинамики [18-22]. Этим методом решается задача о дифракции плоских поперечных волн сферой и находится коротковолновая асимптотика для смещений в рассеянных волнах в различных областях упругого пространства: света, тени и полутени.

§ 1. Постановка задачи. На сферу радиуса a (фиг. 1), находящуюся в однородном упругом пространстве, падает плоская поперечная волна, смещения в которой поляризованы в направлении оси x

$$W_0 = w_0 \exp(-i\omega t) = x_0 \exp[-i(\omega t + k_2 z)] \quad (1.1)$$

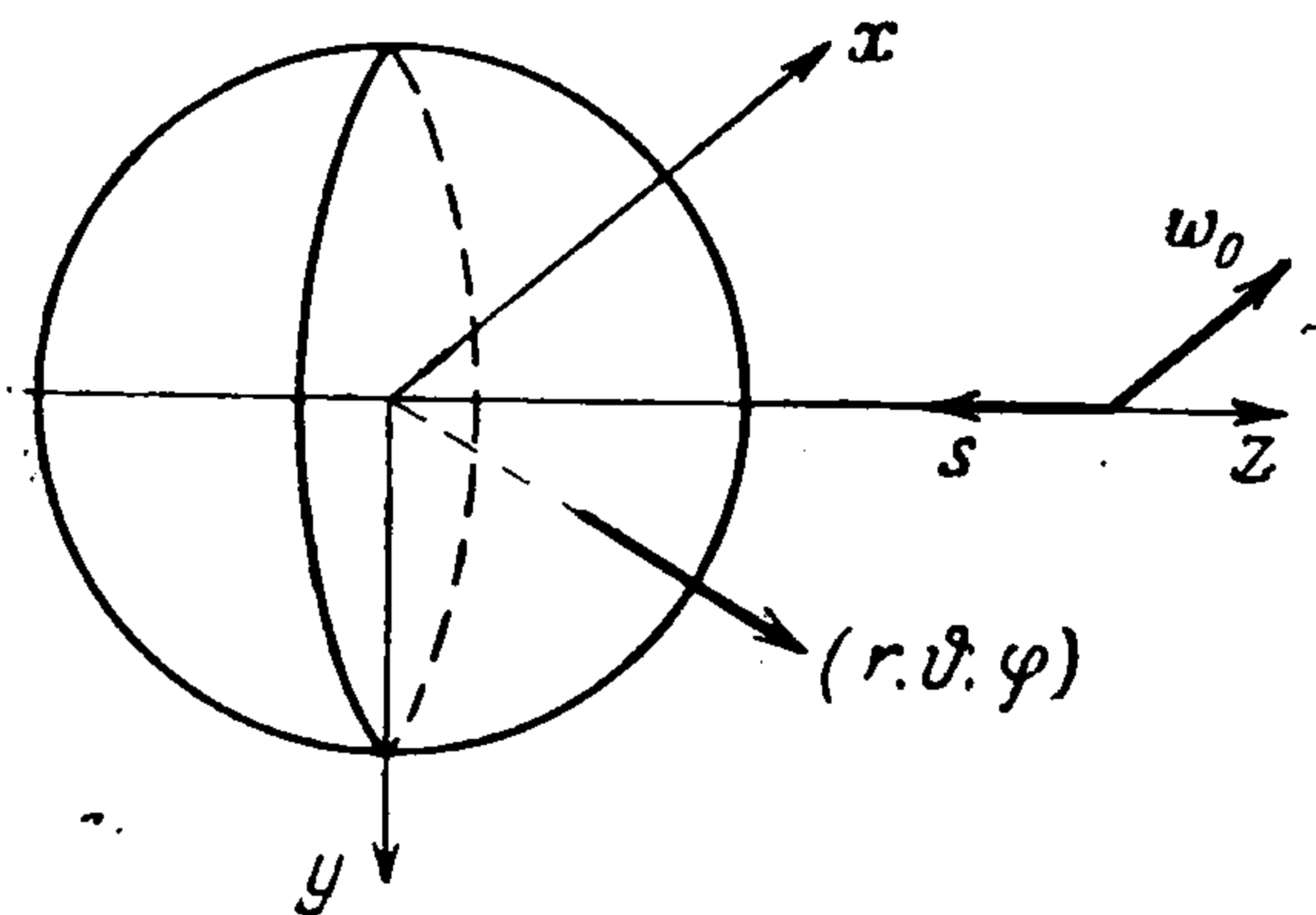
Общее поле смещений в стационарных волнах удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{k_1^2} \nabla \nabla w - \frac{1}{k_2^2} \nabla \times \nabla \times w + w = 0 \quad (1.2)$$

Чтобы решить уравнение (1.2), рассмотрим три решения векторного волнового уравнения [23]

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{mn}^{\mp} &= \mathbf{r}_0 \frac{\partial}{\partial r} z_n(k_1 r) P_n^m(\mu) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} + \vartheta_0 \frac{z_n(k_1 r)}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} P_n^m(\mu) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \mp \\ &\mp \varphi_0 \frac{m}{r \sin \vartheta} z_n(k_1 r) P_n^m(\mu) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \quad (\mu = \cos \vartheta) \\ \mathbf{m}_{mn}^{\mp} &= \mp \vartheta_0 \frac{m}{\sin \vartheta} z_n(k_2 r) P_n^m(\mu) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} - \varphi_0 z_n(k_2 r) \frac{\partial}{\partial \vartheta} P_n^m(\mu) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \\ \mathbf{n}_{mn}^{\mp} &= \mathbf{r}_0 \frac{n(n+1)}{k_2 r} z_n(k_2 r) P_n^m(\mu) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} + \vartheta_0 \frac{1}{k_2 r} \frac{\partial}{\partial r} [r z_n(k_2 r)] \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial \vartheta} P_n^m(\mu) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \mp \varphi_0 \frac{m}{k_2 r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial r} [r z_n(k_2 r)] P_n^m(\mu) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \end{aligned}$$

Здесь k_1 и k_2 — волновые числа продольных и поперечных волн, \mathbf{r}_0 , ϑ_0 , φ_0 — единичные орты сферической системы координат, $P_n^m(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра, $z_n(\xi)$ — сферические функции Бесселя $j_n(\xi)$ или Ханкеля $h_n(\xi)$; верхние индексы минус и плюс (\mp) соответствуют знакам минус и плюс, а также расположению функций $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$ в правой части (1.3). Эти решения векторного волнового уравнения (1.3) в сферических координатах получают непосредственно из характеристического решения соответствующего скалярного уравнения при помощи операций grad и rot [23]. Поэтому функции \mathbf{l} соответствуют продольным волнам, а \mathbf{m} и \mathbf{n} — двум типам поперечных волн.



Фиг. 1

Разложим плоскую падающую векторную волну (1.1) по сферическим волновым функциям [23]

$$\mathbf{w}_0 = \sum_1^{\infty} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [\mathbf{m}_{1n}^+ + i\mathbf{n}_{1n}^-] \quad (1.4)$$

Тогда рассеянное поле от падающей волны (1.4), удовлетворяющее уравнению (1.2), вне сферы может быть записано в виде [10]

$$\mathbf{w} = \sum_1^{\infty} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[\frac{a_n}{k_1} \mathbf{l}_{1n}^{(2)-} + \mathbf{m}_{1n}^{(1)+} + c_n \mathbf{m}_{1n}^{(2)+} + i\mathbf{n}_{1n}^{(1)-} + b_n \mathbf{n}_{1n}^{(2)-} \right] \quad (1.5)$$

верхние индексы (1) и (2) относятся к функциям $j_n(\xi)$ и $h_n^{(1)}(\xi)$ соответственно, a_n , b_n и c_n — неопределенные коэффициенты, которые должны определяться из граничных условий. Граничное условие при $r = a$:

для случая абсолютно твердой сферы бесконечной плотности

$$u = v = w = 0 \quad (1.6)$$

для сферы, свободной от напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \left(\frac{2u}{r} + \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \vartheta + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) = 0 \\ r_{r\vartheta} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) = 0, \quad \tau_{r\varphi} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь λ и μ — упругие постоянные. Используя граничные условия (1.6) или (1.7) и соотношения ортогональности волновых функций l , m и n [23], получим систему уравнений для определения коэффициентов в (1.5):

для случая жесткой сферы

$$\begin{aligned} a_n h_n^{(1)'}(x) + b_n \frac{n(n+1)}{y} h_n^{(1)}(y) &= -i \frac{n(n+1)}{y} j_n(y), \quad c_n h_n^{(1)}(y) = -j_n(y) \\ \frac{a_n}{x} h_n^{(1)}(x) + \frac{b_n}{y} [h_n^{(1)}(y) + y h_n^{(1)'}(y)] &= -\frac{i}{y} [j_n(y) + y j_n'(y)] \end{aligned} \quad (1.8)$$

для сферической полости

$$\begin{aligned} a_n \left[2h_n^{(1)'}(x) - \frac{n(n-1) - 1/2y^2}{x} h_n^{(1)}(x) \right] + b_n n(n+1) [y^{-1} h_n^{(1)}(y) - h_n^{(1)'}(y)] &= \\ = -in(n+1) [y^{-1} j_n(y) - j_n'(y)] \\ a_n [h_n^{(1)'}(x) - x^{-1} h_n^{(1)}(x)] + b_n \left[\frac{n(n+1) - 1 - 1/2y^2}{y} h_n^{(1)}(y) - h_n^{(1)'}(y) \right] &= \\ = -i \left[\frac{n(n+1) - 1 - 1/2y^2}{y} j_n(y) - j_n'(y) \right] \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$c_n [y h_n^{(1)'}(y) - h_n^{(1)}(y)] = -y j_n'(y) + j_n(y) \quad (x = k_1 a, y = k_2 a)$$

Так как коэффициент c_n при волновой функции m в (1.5) входит только в последние уравнения систем (1.8) и (1.9), то волны, соответствующие m , не взаимодействуют с двумя другими видами волн, представленными в (1.5) волновыми векторами l и n . Это показывает, что волновые векторы m описывают распространение поперечных SH-волн, поляризованных перпендикулярно плоскости падения, а n и l — поперечных SV-волн, поляризованных в плоскости падения, и продольных P-волн.

Введем верхний индекс r для величин, относящихся к случаю твердой сферы, и e для свободной границы, и определим коэффициенты в (1.5)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{A_n}{\Delta}, \quad b_n = -\frac{iB_n}{\Delta}, \quad c_n = -\frac{C_n}{\Delta} \\ A_n^r &= xy^{-2}n(n+1), \quad A_n^e = 2xy^{-2}n(n+1)[2n(n+1) - 4 - y^2] \\ \Lambda^r &= h_n^{(1)}(y), \quad \Lambda^e = y h_n^{(1)'}(y) - h_n^{(1)}(y) \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \Delta^r &= xy h_n^{(1)'}(x) h_n^{(1)'}(y) + x h_n^{(1)'}(x) h_n^{(1)}(y) - n(n+1) h_n^{(1)}(x) h_n^{(1)}(y) \\ \Delta^e &= 4[n(n+1) - 2] xy h_n^{(1)'}(x) h_n^{(1)'}(y) - 2y^3 h_n^{(1)}(x) h_n^{(1)'}(y) + \\ &+ 4[n(n+1) - y^2 - 2] x h_n^{(1)'}(x) h_n^{(1)}(y) - \\ &- [4n^2(n+1)^2 + y^4 - 4y^2n(n+1) - 8n(n+1) + 2y^2] h_n^{(1)}(x) h_n^{(1)}(y) \end{aligned}$$

Коэффициенты C_n и B_n аналогичны Λ и Δ соответственно с заменой $h_n^{(1)}(y)$ на $j_n(y)$. Таким образом, поле смещений примет вид

$$\begin{aligned} w &= \sum_1^{\infty} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left\{ \varphi_0 a_n h_n^{(1)'}(k_1 r) P_n^1(\mu) \cos \varphi + \vartheta_0 \frac{a_n}{k_1 r} h_n^{(1)}(k_1 r) \times \right. \\ &\times \frac{\partial P_n^1(\mu)}{\partial \theta} \cos \varphi - \varphi_0 \frac{a_n}{k_1 r} h_n^{(1)}(k_1 r) \frac{P_n^1(\mu)}{\sin \vartheta} \sin \varphi + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + r_0 \frac{n(n+1)}{k_2 r} [b_n h_n^{(1)}(k_2 r) + i j_n(k_2 r)] P_n^1(\mu) \cos \varphi + \vartheta_0 \frac{1}{k_2 r} \frac{\partial}{\partial r} \times \\
& \times [b_n r h_n^{(1)}(k_2 r) + i j_n(k_2 r)] \frac{\partial P_n^1(\mu)}{\partial \vartheta} \cos \varphi - \varphi_0 \frac{1}{k_2 r} \frac{\partial}{\partial r} [b_n r h_n^{(1)}(k_2 r) + i j_n(k_2 r)] \times \\
& \times \frac{P_n^1(\mu)}{\sin \vartheta} \sin \varphi + \vartheta_0 [c_n h_n^{(1)}(k_2 r) + j_n(k_2 r)] \frac{P_n^1(\mu)}{\sin \vartheta} \cos \varphi - \\
& - \varphi_0 [c_n h_n^{(1)}(k_2 r) + j_n(k_2 r)] \frac{\partial P_n^1(\mu)}{\partial \vartheta} \sin \varphi \} \quad (1.11)
\end{aligned}$$

Известно, что ряды, представляющие решение (1.11), сходятся. Однако для высоких частот ($k_1 a$ и $k_2 a \gg 1$) они сходятся очень медленно и не пригодны для практического применения.

§ 2. Преобразование Ватсона. Для изучения дифракции волн высокой частоты ($k_1 a$ и $k_2 a \gg 1$) воспользуемся методом Ватсона [18] и преобразуем ряды (1.11) в интегралы комплексной плоскости ν (фиг. 2).

$$\begin{aligned}
w^p &= e^{-i\pi/4} \int_C \frac{\nu a_{\nu-1/2}}{\nu^2 - 1/4} \frac{\exp(-i\nu\pi/2)}{\cos \nu\pi} f_1(\nu) d\nu \\
w^{sv} &= e^{-i\pi/4} \int_C \frac{\nu}{\nu^2 - 1/4} \frac{\exp(-i\nu\pi/2)}{\cos \nu\pi} [b_{\nu-1/2} f_2(\nu) + i f_2^*(\nu)] d\nu \quad (2.1) \\
w^{sn} &= e^{-i\pi/4} \int_C \frac{|\nu|}{\nu^2 - 1/4} \frac{[\exp(-i\nu\pi/2)]}{\cos \nu\pi} [c_{\nu-1/2} f_3(\nu) + f_3^*(\nu)] d\nu
\end{aligned}$$

Здесь и далее

$$\begin{aligned}
P_{\nu-1/2}^1(\mu) &\equiv P_{\nu-1/2}^1, \quad P_{\nu-1/2}^1(-\mu) \equiv P_{\nu-1/2}^{1*} \\
f_1(\nu) &= r_0 h_{\nu-1/2}^{(1)'}(k_1 r) P_{\nu-1/2}^{1*} \cos \varphi + \vartheta_0 \frac{h_{\nu-1/2}^{(1)}(k_1 r)}{k_1 r} \frac{\partial P_{\nu-1/2}^{1*}}{\partial \vartheta} \cos \varphi - \varphi_0 \frac{h_{\nu-1/2}^{(1)}(k_1 r)}{k_1 r} \frac{P_{\nu-1/2}^{1*}}{\sin \vartheta} \sin \varphi \\
f_2(\nu) &= r_0 \frac{\nu^2 - 1/4}{k_2 r} h_{\nu-1/2}^{(1)}(k_2 r) P_{\nu-1/2}^{1*} \cos \varphi + \left[\vartheta_0 \frac{\partial}{\partial \vartheta} P_{\nu-1/2}^{1*} \cos \varphi - \varphi_0 P_{\nu-1/2}^{1*} \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \right] \times \\
& \times \frac{1}{k_2 r} \frac{\partial}{\partial r} [r h_{\nu-1/2}^{(1)}(k_2 r)] \\
f_3(\nu) &= h_{\nu-1/2}^{(1)}(k_2 r) \left[\vartheta_0 P_{\nu-1/2}^{1*} \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta} - \varphi_0 \frac{\partial}{\partial \vartheta} P_{\nu-1/2}^{1*} \sin \varphi \right]
\end{aligned}$$

Выражения $f_2^*(\nu)$ и $f_3^*(\nu)$ отличаются от $f_2(\nu)$ и $f_3(\nu)$ тем, что в них функция $h_{\nu-1/2}^{(1)}(k_2 r)$ заменена на $j_{\nu-1/2}(k_2 r)$.

Интегралы (2.1) по петле C можно заменить на интегрирование по контуру EF_* охватывающему все полюсы подынтегральных выражений (2.1) как функций ν , лежащие в первом квадранте. Это верно, поскольку из-за нечетности подынтегральных выражений все интегралы по BD обращаются в нуль, а интегралы по частям окружности AB , DE и FG стремятся к нулю при стремлении радиуса окружности к бесконечности

$$w^p = e^{3i\pi/4} \int_E^F \frac{\nu}{\nu^2 - 1/4} \frac{\exp(-i\nu\pi/2)}{\cos \nu\pi} f_1(\nu) a_{\nu-1/2} d\nu \quad (2.2)$$

$$w^{sv} = e^{3i\pi/4} \int_E^F \frac{\nu}{\nu^2 - 1/4} \frac{\exp(-i\nu\pi/2)}{\cos \nu\pi} [b_{\nu-1/2} f_2(\nu) + i f_2^*(\nu)] d\nu$$

$$w^{sn} = e^{3i\pi/4} \int_E^F \frac{\nu}{\nu^2 - 1/4} \frac{\exp(-i\nu\pi/2)}{\cos \nu\pi} [c_{\nu-1/2} f_3(\nu) + f_3^*(\nu)] d\nu \quad (2.3)$$

Вычислим интегралы через вычеты в полюсах ν_k и κ_k соответствующих подынтегральных выражений

$$\begin{aligned} w^p &= -2\pi e^{i\pi/4} \sum_{\nu_k} \frac{\nu_k A_{\nu_k^{-1/2}} \exp(-i\nu_k \pi/2)}{(\nu_k^2 - 1/4) \cos \nu_k \pi (\partial \Delta / \partial \nu)_{\nu_k}} f_1(\nu_k) \\ w^{sv} &= 2\pi e^{3i\pi/4} \sum_{\nu_k} \frac{\nu_k B_{\nu_k^{-1/2}} \exp(-i\nu_k \pi/2)}{(\nu_k^2 - 1/4) \cos \nu_k \pi (\partial \Delta / \partial \nu)_{\nu_k}} f_2(\nu_k) \\ w^{sh} &= 2\pi e^{i\pi/4} \sum_{\kappa_k} \frac{\kappa_k C_{\kappa_k^{-1/2}} \exp(-i\kappa_k \pi/2)}{(\kappa_k^2 - 1/4) \cos \kappa_k \pi (\partial \Delta / \partial \nu)_{\kappa_k}} f_3(\kappa_k) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Сходимость этих рядов следует из сходимости рядов (1.11). Все приведенные до сих пор формулы были точными. Далее будем изучать коротковолновую асимптотику смещений для $k_1 a$ и $k_2 a \gg 1$, поэтому заменим входящие в решение цилиндрические и сферические функции их асимптотическим разложением [19, 24].

Полюсы подынтегрального выражения (2.3) определяются по (1.10) нулями функции Λ . С точностью до $(k_1 a)^{-1}$ и $(k_2 a)^{-1}$ порядка

$$\Lambda^e \approx y h_{\nu^{-1/2}}^{(1)'}(y) = 0, \quad \Lambda^r \approx h_{\nu^{-1/2}}^{(1)}(y) = 0 \quad (2.5)$$

Таким образом, κ_k^r нули функций Λ^r совпадают с нулями сферической функции Ханкеля первого рода, а κ_k^e — с нулями ее производной (2.5). Нули этих функций известны [19, 20]. Полюсы подынтегральных выражений в (2.2) совпадают, согласно (1.10), с нулями уравнений $\Delta = 0$, которые для $k_1 a$ и $k_2 a \gg 1$ принимают вид

$$\begin{aligned} \Delta^e &= 4\nu^2 x y h_{\nu^{-1/2}}^{(1)'}(x) h_{\nu^{-1/2}}^{(1)'}(y) - (2\nu^2 - y^2)^2 h_{\nu^{-1/2}}^{(1)}(x) h_{\nu^{-1/2}}^{(1)}(y) = 0 \\ \Delta^r &= x y h_{\nu^{-1/2}}^{(1)'}(x) h_{\nu^{-1/2}}^{(1)'}(y) - \nu^2 h_{\nu^{-1/2}}^{(1)}(x) h_{\nu^{-1/2}}^{(1)}(y) = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Уравнения (2.6) совпадают с точностью до постоянных с аналогичными уравнениями в задачах дифракции на цилиндре [15-17]. Эти уравнения имеют два ряда корней, расположенных в первом квадранте, которые приближенно (аппроксимация Ханкеля — Фока) имеет вид

$$\lambda_k = x + (1/2x)^{1/3} t_k, \quad \mu_k = y + (1/2y)^{1/3} \tau_k$$

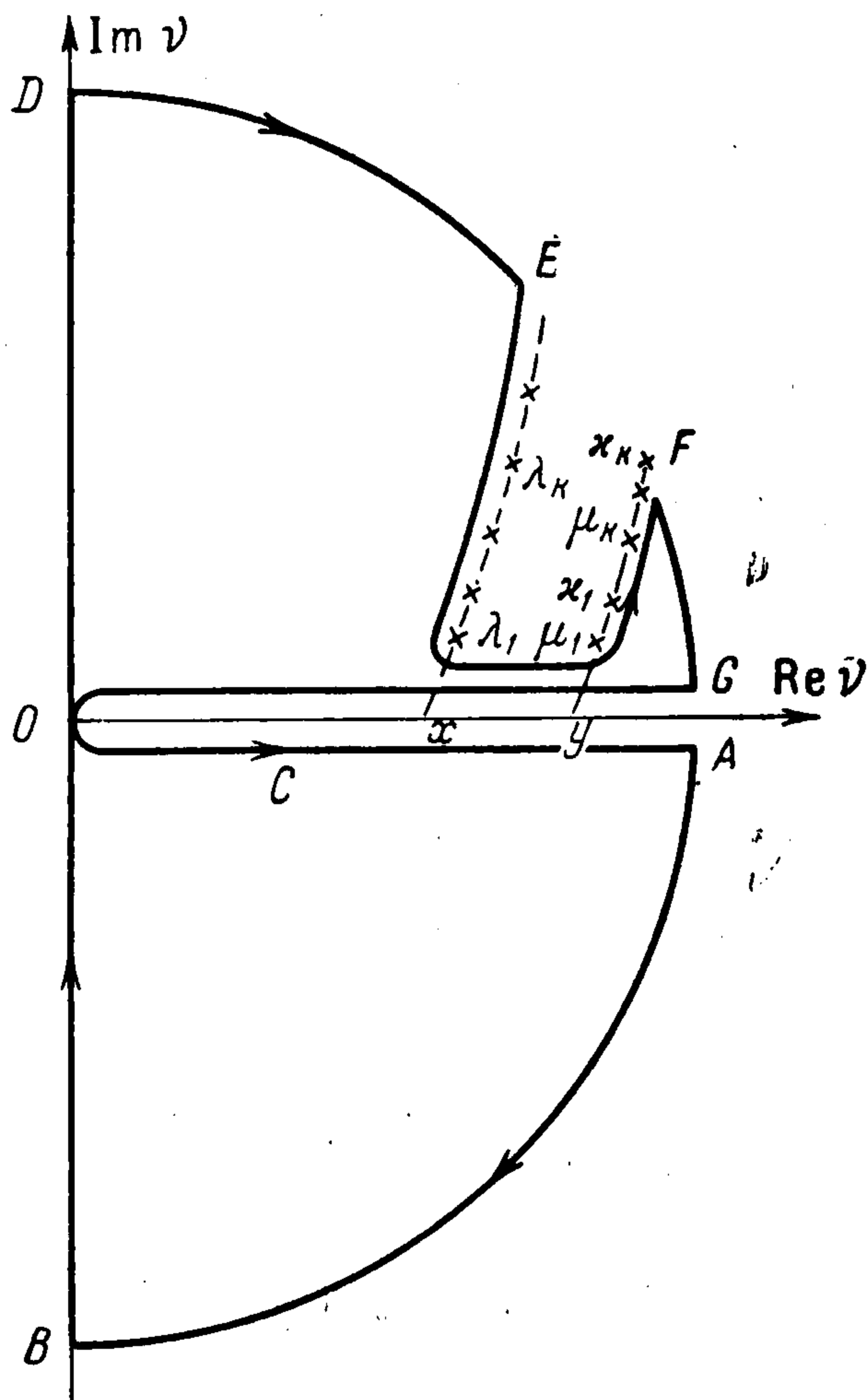
при этом t_k и τ_k будут корнями уравнений

$$\begin{aligned} w'(t) - q_1(t) w(t) &= 0 \\ w'(\tau) - q_2(\tau) w(\tau) &= 0 \end{aligned}$$

Здесь $w(\xi) = u(\xi) + i v(\xi)$ — функция Эйри [19]; для полюсов t_k и τ_k , лежащих вблизи x и y соответственно, $q_1(t)$ и $q_2(\tau)$ можно принять постоянными

$$\begin{aligned} q_1^r &= \frac{i\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/3} \\ q_1^e &= \frac{i(2\varepsilon^2-1)^2}{4\varepsilon^3 \sqrt{1-\varepsilon^2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/3} \\ q_2^r &= \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left(\frac{y}{2}\right)^{1/3} \\ q_2^e &= \frac{1}{4\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left(\frac{y}{2}\right)^{1/3} \end{aligned} \quad \left(\varepsilon = \frac{k_1}{k_2} < 1\right)$$

Для случая полости уравнение $\Delta^e = 0$ имеет еще один действительный корень $\nu^* = \kappa y$ ($\kappa > 1$). Вычеты подынтегральных выражений (2.1) в этом полюсе дадут смещение в поверхностной волне Рэлея [17].



Фиг. 2

§ 3. Картина дифракции в области тени. Изучим коротковолновую асимптотику для смещений (2.4). Оценим прежде всего порядок величин составляющих смещений в продольных и поперечных упругих волнах при $k_1 a \gg 1$, используя асимптотические выражения сферических функций Бесселя и присоединенных функций Лежандра. Тогда окажется, что в (1.11) составляющие смещений w^p , w^{sv} , v^{sn} имеют порядок $(k_1 a)^{-1}$ по сравнению с остальными членами, и ими можно пренебречь. При помощи асимптотических формул [24]

$$\begin{aligned} P_{\nu^{-1/2}}^{1\times} &= \frac{dP_{\nu^{-1/2}}^{\times}}{d\vartheta} = \left(\frac{2\nu}{\pi \sin \vartheta}\right)^{1/2} \sin[\nu(\pi - \vartheta) - 1/4\pi] \\ \frac{dP_{\nu^{-1/2}}^{1\times}}{d\vartheta} &= \frac{d^2 P_{\nu^{-1/2}}^{\times}}{d\vartheta^2} = -\left(\frac{2\nu^3}{\pi \sin \vartheta}\right)^{1/2} \cos[\nu(\pi - \vartheta) - 1/4\pi] \end{aligned} \quad \text{при } \begin{cases} |\nu \sin \vartheta| \gg 1 \\ \operatorname{Re} \nu > 1/2 \end{cases} \quad (3.1)$$

и соответствующих асимптотических выражений для сферических функций Бесселя и Ханкеля [19] получим

$$\begin{aligned} w_1^p &= \frac{2\varepsilon^2 K \cos \varphi}{(1 - a^2/r^2)^{1/4} (1 - \varepsilon^2)^{1/4}} \left(\frac{\pi}{\sin \vartheta}\right)^{1/2} e^{i[k_1 \sqrt{r^2 - a^2} - k_2 a \sqrt{1 - \varepsilon^2} + 1/4\pi]} \frac{a}{r} \times \\ &\quad \times \sum_k \frac{\exp[i\lambda_k (\arccos \varepsilon - \arccos a/r - 1/2\pi)]}{w(t_k) (t_k - q_1^2) \cos \lambda_k \pi} \times \\ &\quad \times \left\{ r_0 i \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{1/2} \sin\left[\lambda_k (\pi - \vartheta) - \frac{\pi}{4}\right] - \vartheta_0 \frac{a}{r} \cos\left[\lambda_k (\pi - \vartheta) - \frac{\pi}{4}\right] \right\} \\ &\quad \left(K^r = 1, \quad K^e = 1 - \frac{1}{2\varepsilon^2}\right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} w_{11}^{sv} &= \frac{2\varepsilon^2 K^2 \cos \varphi}{(1 - \varepsilon^2 a^2/r^2)^{1/4} (1 - \varepsilon^2)^{1/2}} \left(\frac{\pi}{\sin \vartheta}\right)^{1/2} e^{ik_2 [Vr^2 - a^2 \varepsilon^2 - 2a \sqrt{1 - \varepsilon^2}]} \left(\frac{k_1 a}{2}\right)^{1/6} \frac{a}{r} \times \\ &\quad \times \sum_k \frac{\exp[i\lambda_k (2\arccos \varepsilon - \arccos \varepsilon a/r - 1/2\pi)]}{(t_k - q_1^2) \cos \lambda_k \pi} \times \\ &\quad \times \left\{ r_0 \frac{\varepsilon a}{r} \sin\left[\lambda_k (\pi - \vartheta) - \frac{\pi}{4}\right] - \vartheta_0 i \left(1 - \frac{\varepsilon^2 a^2}{r^2}\right)^{1/2} \cos\left[\lambda_k (\pi - \vartheta) - \frac{\pi}{4}\right] \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} w_{12}^{sv} &= \frac{2 \cos \varphi}{(1 - a^2/r^2)^{1/4}} \left(\frac{\pi}{\sin \vartheta}\right)^{1/2} e^{ik_2 \sqrt{r^2 - a^2}} \left(\frac{k_2 a}{2}\right)^{-1/6} \frac{a}{r} \times \\ &\quad \times \frac{\exp[-i\mu_k (\arccos a/r + 1/2\pi)]}{w^2(\tau_k) (\tau_k - q_2^2) \cos \mu_k \pi} \left\{ r_0 \frac{a}{r} \sin\left[\mu_k (\pi - \vartheta) - \frac{\pi}{4}\right] - \right. \\ &\quad \left. - \vartheta_0 i \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{1/2} \cos\left[\mu_k (\pi - \vartheta) - \frac{\pi}{4}\right] \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} w_1^{sn} &= \frac{2i\varphi_0 \sin \varphi}{(1 - a^2/r^2)^{1/4}} \left(\frac{\pi}{\sin \vartheta}\right)^{1/2} e^{ik_2 \sqrt{r^2 - a^2}} \left(\frac{k_2 a}{2}\right)^{-1/6} \times \\ &\quad \times \sum_k I_{\kappa_k} \exp\left[-i\kappa_k \left(\arccos \frac{a}{r} + \frac{\pi}{2}\right)\right] \frac{\cos[\kappa_k (\pi - \vartheta) - 1/4\pi]}{\cos \kappa_k \pi} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$I_{\kappa_k}^r = \frac{1}{[w'(\tau_k^0)]^2}, \quad I_{\kappa_k}^e = -\frac{1}{\tau_k' w^2(\tau_k')}, \quad \kappa_k = y + (1/2 y)^{1/2} \tau_k$$

Здесь τ_k^0 — корни $w(\tau_k^0) = 0$, а τ_k' — корни $w'(\tau_k') = 0$. Определим области, в которых ряды быстро сходятся.

Величины λ_k , μ_k и κ_k имеют положительную мнимую часть, возрастающую с увеличением номера k , поэтому ряды (3.2) — (3.5) сходятся достаточно быстро, если выполняются соответственно неравенства

$$\begin{aligned} \operatorname{arc} \cos \varepsilon - \operatorname{arc} \cos (a / r) + \vartheta - 1/2\pi &> 0 \\ 2 \operatorname{arc} \cos \varepsilon - \operatorname{arc} \cos (\varepsilon a / r) + \vartheta - 1/2\pi &> 0 \\ - \operatorname{arc} \cos (a / r) + \vartheta - 1/2\pi &> 0 \\ - \operatorname{arc} \cos (a / r) + \vartheta - 1/2\pi &> 0 \end{aligned}$$

Таким образом, ряд для продольных смещений (3.2) будет быстро сходиться везде в области тени для продольных смещений, граница которой

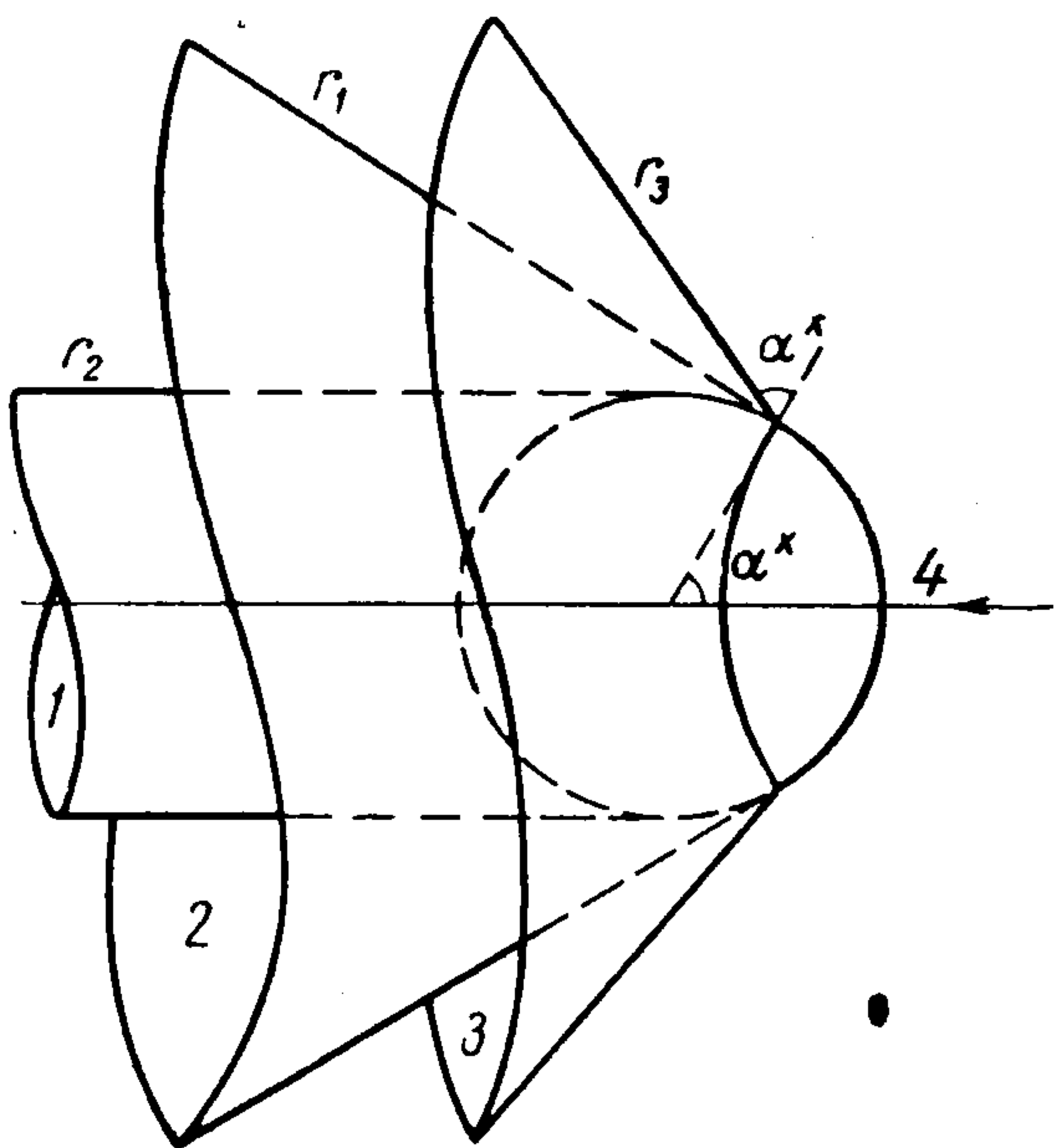
$$r_1 = a / \cos (\vartheta - \alpha^x)$$

представляет усеченный конус раствора $\pi - 2\alpha^x$, опирающийся на α^x -параллель (α^x — угол полного внутреннего отражения).

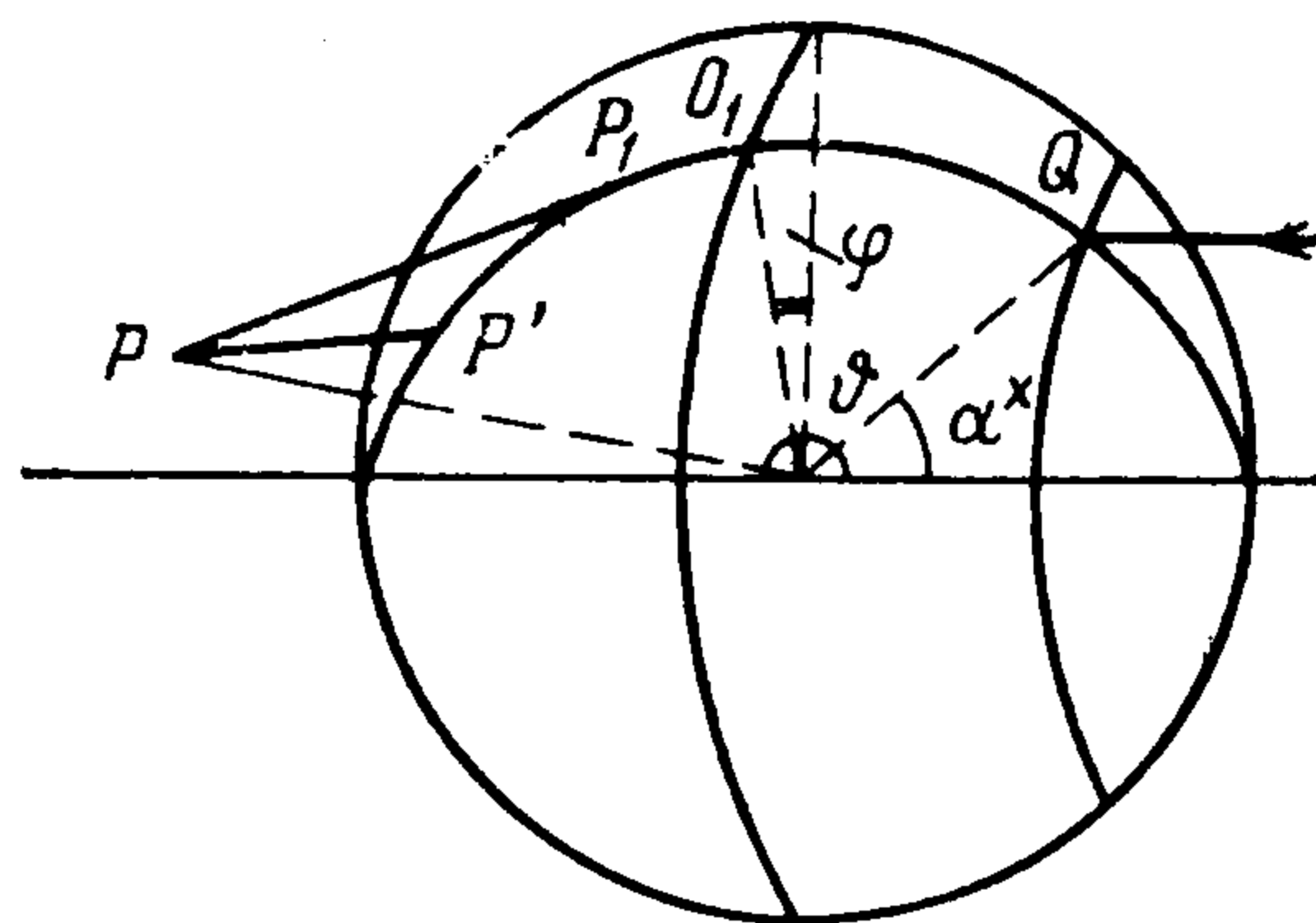
Ряды для поперечных смещений (3.4) и (3.5) имеют одну и ту же область сходимости, совпадающую с областью геометрической тени, граница которой

$$r_2 = a / \cos (\vartheta - 1/2\pi)$$

— поверхность полуцилиндра слева от экваториального круга (фиг. 3).



Фиг. 3



Фиг. 4

Ряд для поперечных смещений (3.3) описывает смещения в дифрагированных волнах типа головных [17], граница его области сходимости (фиг. 3)

$$r_3 = a\varepsilon / \cos (\vartheta + 1/2\pi - 2\alpha^x)$$

— поверхность усеченного конуса раствора $2(\pi - 2\alpha^x)$ (угол раствора r_3 в два раза больше, чем r_1), опирающегося на ту же самую α -параллель.

Физический смысл выражений (3.2) — (3.5) таков: они дают смещения в дифрагированных или «ползущих волнах», огибающих сферу.

Дифрагированные продольные волны (3.2) и поперечные типа головных (3.3) начинаются на α^x -параллели, где падающие поперечные лучи составляют угол α^x с нормалью к сфере; здесь образуются продольные дифрагированные волны, которые идут по поверхности сферы вдоль меридианов, испуская по касательной продольные, а под углом α^x поперечные волны. Как легко видеть из выражения для смещений (4.11), в образовании продольных рассеянных волн участвуют только SV-поляризованные поперечные волны (фиг. 4). Падающие поперечные лучи, касающиеся сферы по экваториальной окружности, дают начало «ползущим» поперечным SV- и SH-волнам (3.4), (3.5), которые также распространяются по сфере вдоль меридианов, а затем испускаются в точку наблюдения по касательной (фиг. 4). Наличие в (3.2) — (3.5) $\cos \nu l$ в зна-

менателе показывает, что учитываются также дифрагированные волны, огибающие сферу 1, 2, ..., n ... раз, прежде чем попасть в точку наблюдения. Особенность $(\sin \vartheta)^{-1/2}$ указывает, что «ползушие» волны фокусируются в точках оси $\vartheta = \pi$. Вблизи $\vartheta = \pi$ формулы (3.1) не будут справедливыми (не выполнено условие $|\nu \sin \vartheta| \gg 1$), и следует использовать асимптотические выражения, получающиеся из

$$P_{\nu-1/2}(-\mu) \rightarrow I_0[\nu(\pi - \vartheta)]$$

справедливые при $|\nu| \gg 1$ и величине $|\nu(\pi - \vartheta)|$ сравнимой с 1.

Таким образом, в отличие от акустического и электромагнитного случаев при рассеянии упругих волн, как видно из (3.2) — (3.5), существуют четыре типа различных дифрагированных волн, для которых области света и тени будут различны (фиг. 3).

§ 4. Картина дифракции в «освещенных» областях. В тех областях, где формулы (3.2) — (3.5) перестают быть справедливыми (это области света для соответствующих типов волн), будем исходить из формул (2.2) (2.3), в которых заменим $P_{\nu-1/2}^{1 \times}$ и $\partial P_{\nu-1/2}^{1 \times} / \partial \vartheta$ на соответствующие выражения, вытекающие из (3.1) и

$$P_{\nu-1/2}^{1 \times} = \exp[i(\nu - 1/2)\pi] P_{\nu-1/2} + 2i \cos \nu \pi Q_{\nu-1/2} \quad (4.1)$$

Будем вычислять первые слагаемые в (2.2), (2.3), соответствующие первому члену в (4.1), через вычеты в полюсах подынтегральных выражений получим

$$\begin{aligned} w_1^p = & \frac{2ie^2 K \cos \varphi}{(1 - a^2/r^2)^{1/4} (1 - \varepsilon^2)^{1/4}} \left(\frac{\pi}{\sin \vartheta} \right)^{1/2} e^{i[k_1 \sqrt{r^2 - a^2} - k_2 a \sqrt{1 - \varepsilon^2 + 1/4 \pi}]} \frac{a}{r} \times \\ & \times \sum_k \frac{\exp[i\lambda_k (\arccos \varepsilon - \arccos a/r + 1/2 \pi)]}{w(t_k)(t_k - q_1^2) \cos \lambda_k \pi} \left\{ r_0 i \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{1/2} \sin\left(\lambda_k \vartheta - \frac{\pi}{4}\right) + \right. \\ & \left. + \vartheta_0 \frac{a}{r} \cos\left(\lambda_k \vartheta - \frac{\pi}{4}\right) \right\} + w_g^p \equiv w_2^p + w_g^p \quad (4.2) \end{aligned}$$

$$w^{sv} \equiv w_{21}^{sv} + w_{22}^{sv} + w_g^{sv}$$

$$\begin{aligned} w_{21}^{sv} = & \frac{2ie^2 K^2 \cos \varphi K}{(1 - \varepsilon^2 a^2/r^2)^{1/4} (1 - \varepsilon^2)^{1/4}} \left(\frac{\pi}{\sin \vartheta} \right)^{1/2} e^{ik_2 [V \sqrt{r^2 - a^2 \varepsilon^2} - 2a \sqrt{1 - \varepsilon^2}]} \left(\frac{k_1 a}{2} \right)^{1/6} \frac{a}{r} \times \\ & \times \sum_k \frac{\exp[i\lambda_k (2 \arccos \varepsilon - \arccos \varepsilon a/r + 1/2 \pi)]}{(t_k - q_1^2) \cos \lambda_k \pi} \times \\ & \times \left[r_0 \frac{\varepsilon a}{r} \sin\left(\lambda_k \vartheta - \frac{\pi}{4}\right) + \vartheta_0 i \left(1 - \frac{\varepsilon^2 a^2}{r^2}\right)^{1/2} \cos\left(\lambda_k \vartheta - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (4.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{22}^{sv} = & \frac{2i \cos \varphi}{(1 - a^2/r^2)^{1/4}} \left(\frac{\pi}{\sin \vartheta} \right)^{1/2} e^{ik_2 \sqrt{r^2 - a^2}} \left(\frac{k_2 a}{2} \right)^{-1/6} \frac{a}{r} \times \\ & \times \sum_k \frac{\exp[-i\mu_k (\arccos a/r - 1/2 \pi)]}{w^2(\tau_k)(\tau_k - q_2^2) \cos \mu_k \pi} \left[r_0 \frac{a}{r} \sin\left(\mu_k \vartheta - \frac{\pi}{4}\right) + \right. \\ & \left. + \vartheta_0 i \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{1/2} \cos\left(\mu_k \vartheta - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (4.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1^{sh} = & \frac{2\varphi_0 \sin \varphi}{(1 - a^2/r^2)^{1/4}} \left(\frac{\pi}{\sin \vartheta} \right)^{1/2} e^{ik_2 \sqrt{r^2 - a^2}} \left(\frac{k_2 a}{2} \right)^{-1/6} \frac{a}{r} \times \\ & \times \sum_k I_{\kappa_k} \frac{\exp[-i\kappa_k (\arccos a/r - 1/2 \pi)]}{\cos \kappa_k \pi} \cos(\kappa_k \vartheta - 1/4 \pi) \equiv w_2^{sh} + w_g^{sh} \quad (4.5) \end{aligned}$$

Здесь нижним индексом g обозначены те члены в (2.2), (2.3), которые соответствуют второму слагаемому в (4.1). Используя асимптотику Дебая для сферических функций Бесселя и Ханкеля и асимптотическое выражение

$$Q_{\nu-1/2} = \frac{\exp i(\nu\vartheta - 1/4\pi)}{\sqrt{2\pi\nu \sin \vartheta}} \quad (|\nu \sin \vartheta| \gg 1, \operatorname{Re} \nu > 3/2)$$

вычислим w_g^p , w_g^{sv} , w_g^{sh} методом седловой точки. Путь наимышнейшего спуска проводим как и в [17], получим

$$w_g^p = 2 \cos \varphi \frac{a}{r} \left(\frac{\sin \alpha_1}{\sin \vartheta} \right)^{1/2} \frac{\Omega(\varepsilon, a, \alpha_1) \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 U}{W(\varepsilon, \alpha_1) D_+(\alpha_1)} \left[r_0 \Omega(\varepsilon, r, \alpha_1) + \right. \\ \left. + \vartheta_0 \frac{a}{r} \sin \alpha_1 \right] \exp \{ ik_2 a [\Omega(\varepsilon, r, \alpha_1) - \Omega(\varepsilon, a, \alpha_1) - \cos \alpha_1] \} \quad (4.6)$$

$$w_g^{sv} = \cos \varphi \frac{a}{r} \left(\frac{\sin \alpha_2}{\sin \vartheta} \right)^{1/2} \frac{\cos \alpha_2 D_-(\alpha_2)}{W(1, \alpha_2) D_+(\alpha_2)} \left[r_0 \frac{a}{r} \sin \alpha_2 - \right. \\ \left. - \vartheta_0 \Omega(1, r, \alpha_2) \right] \exp \{ ik_2 r [\Omega(1, r, \alpha_2) - 2 \frac{a}{r} \cos \alpha_2] \} + w_0^{sv} \quad (4.7)$$

$$w_g^{sh} = \mp \sin \varphi \frac{a}{r} \left(\frac{\sin \alpha_2}{\sin \vartheta} \right)^{1/2} \frac{\cos \alpha_2}{W(1, \alpha_2)} \varphi_0 \exp \{ ik_2 r [\Omega(1, r, \alpha_2) - \\ - 2 \frac{a}{r} \cos \alpha_2] \} + w_0^{sh} \quad (4.8)$$

Здесь w_0 — смещения в падающей волне

$$U^r = 1, \quad U^e = 2(2 \sin^2 \alpha_1 - 1), \quad \Omega(\varepsilon, r, \alpha) = \sqrt{\varepsilon^2 - a^2 \sin^2 \alpha / r^2}$$

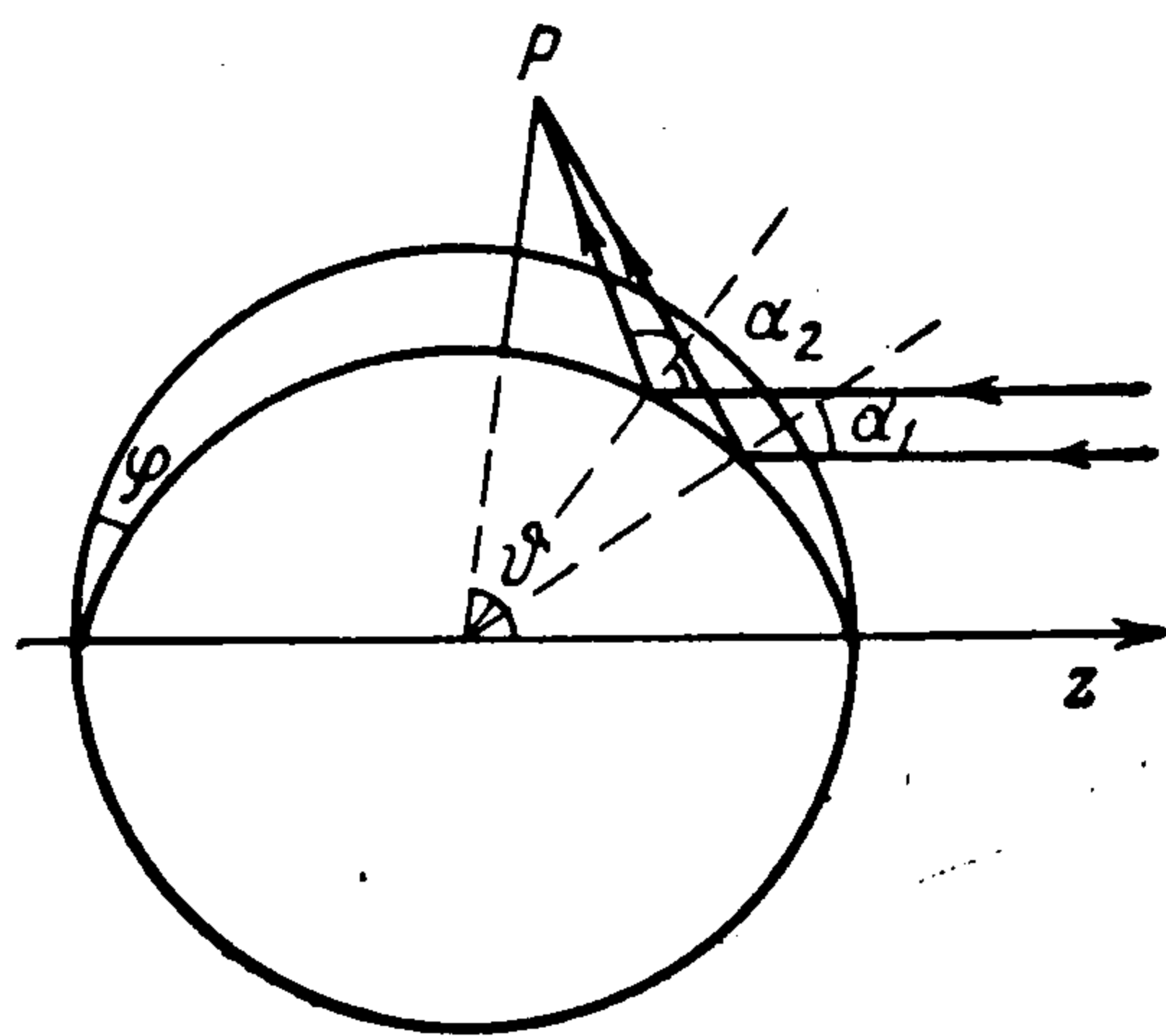
$$W(\varepsilon, \alpha) = \sqrt{\Omega(\varepsilon, r, \alpha) [\Omega(\varepsilon, a, \alpha) + \cos \alpha] - (\alpha/r) \cos \alpha \Omega(\varepsilon, a, \alpha)}$$

$$D_{\pm}^e(\alpha) = (2 \sin^2 \alpha - 1)^2 \pm 4 \sin^2 \alpha \cos \alpha \Omega(\varepsilon, a, \alpha)$$

$$D_{\pm}^r(\alpha) = \sin^2 \alpha \pm \cos \alpha \Omega(\varepsilon, a, \alpha)$$

Геометрический смысл углов α_1 и α_2 указан на фиг. 5, это — углы падения тех поперечных лучей, которые отражаются как продольные или поперечные лучи и приходят в точку наблюдения $P(r, \vartheta, \varphi)$.

В формуле (4.8) верхний знак относится к жесткой сфере, нижний — к полости. Легко видеть, что (4.6) — (4.8) дают смещения в волнах, отраженных от сферы по законам геометрической теории. Формулы (4.7) и (4.8) справедливы в области света для поперечных смещений (фиг. 3) и перестают быть верными в области полутени ω_2 вблизи границы геометрической тени r_2 . В области ω_2 верно $|\nu^2 - y^2| \sim Ay^{4/3}$ ($A \sim 2.5$), и асимптотика Дебая, примененная для функции $h_{\nu-1/2}^{(1),(2)}(y)$ при выводе (4.7), (4.8), там не годится. Кроме того, (4.7) не справедливо и в переходной области ω_3 вблизи поверхности конуса r_3 , так как там не верна асимптотика Дебая для функции $h_{\nu-1/2}^{(1)}(x)$. Формула (4.6) для продольных смещений справедлива в области света для продольных волн и нарушается в области своей полутени ω_1 (фиг. 3) вблизи конуса r_1 . Следует заметить, что при преобразовании контура EF в путь наимышнейшего спуска между ними иногда оказываются полюса функции $b_{\nu-1/2}$, которые так же, как и в работе [17], учтены при получении окончательных формул для смещений.



Фиг. 5

§ 5. Вычисление смещений в переходных областях. В областях $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ смещения находятся по формулам (4.2) — (4.5). Однако там члены, соответствующие $w_g^p, w_g^{sv}, w_g^{sn}$ следует, согласно Фоку [19], вычислять при помощи квадратур, используя для $h_{\nu-1/2}^{(1)}(x)$ и $h_{\nu-1/2}^{(1),(2)}(y)$ более сложную асимптотику Ханкеля — Фока.

При этом удобно контур интегрирования EF преобразовать в контур Γ (фиг. 6) плоскости

$$t = (\nu - x) (1/2x)^{1/3}$$

для областей ω_1 и ω_2 и аналогичный контур Γ' плоскости

$$\tau = (\nu - y) (1/2y)^{1/3}$$

для области ω_2 . В результате получим

$$w_g^p = -\frac{a}{r} \frac{\varepsilon^2 \cos \varphi}{\sqrt{\pi \sin \vartheta}} \int_{\Gamma} \frac{K(t) p_1^{3/2}(t) [r_0 V^2(t, r, 1) + \vartheta_0(a/r) p_1(t)]}{V(t, r, 1) V(t, a, \varepsilon) [w'(t) - q_1(t) w(t)]} e^{i\psi_1(t)} dt \quad (5.1)$$

$$\psi_1(t) = x p_1(t) [\vartheta - 1/2\pi - \arccos(a/r) p_1(t) + \arccos \varepsilon p_1(t)] + \\ + k_1 r V^2(t, r, 1) - k_2 a V^2(t, a, \varepsilon)$$

$$V(t, r, \varepsilon) = \left(1 - \frac{\varepsilon^2 a^2 p_1^2(t)}{r^2}\right)^{1/4}, \quad K^r(t) = 1, \quad K^e(t) = 1 - \frac{1}{2\varepsilon^2 p_1^2(t)}$$

$$q_1^r(t) = \frac{i p_1^2(t) \varepsilon}{V^2(t, a, \varepsilon)} \left(\frac{k_1 a}{2}\right)^{1/3}, \quad q_1^e(t) = i \frac{[2p_1^2(t) \varepsilon^2 - 1]^2}{4\varepsilon^3 p_1^2(t) V^2(t, a, \varepsilon)} \left(\frac{k_1 a}{2}\right)^{1/3}$$

Далее интеграл (5.1) следует разбить на два интеграла от 0 до ∞ по вещественной оси и от $\infty \exp(2/3\pi i)$ до 0 по $\arg t = 2/3\pi$. Используя формулы для функций Эйри на луче $\arg t = 2/3\pi$, последний интеграл также приведем к интегралу с вещественными пределами

$$w_g^p = -\frac{a}{r} \frac{\varepsilon^2 \cos \varphi}{\sqrt{\pi \sin \vartheta}} \left(\int_0^{\infty} \frac{K(t) p_1^{3/2}(t) [r_0 V^2(t, r, 1) + \vartheta_0(a/r) p_1(t)]}{V(t, r, 1) V(t, a, \varepsilon) [w'(t) - q_1(t) w(t)]} e^{i\psi_1(t)} dt + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \frac{K(te^{2/3\pi i}) \{r_0 V^2(te^{2/3\pi i}, r, 1) + \vartheta_0(a/r) p_1(te^{2/3\pi i})\} p_1^{3/2}(te^{2/3\pi i}) \exp[i\psi_1(te^{2/3\pi i})]}{V(te^{2/3\pi i}, r, 1) V(te^{2/3\pi i}, a, \varepsilon) [w'(t) - e^{2/3\pi i} q_1(te^{2/3\pi i}) w(t)]} dt \right) \quad (5.2)$$

$$\left(p_1(t) = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^{-2/3} \frac{t}{2} \right)$$

Интегралы (5.2) вычисляются методом квадратур при помощи таблиц функций $u(t)$ и $v(t)$ для вещественных положительных t , данных в работе [19].

Для больших отрицательных значений t , т. е. в области света, интеграл (5.1) вычисляется методом седловой точки, при помощи асимптотических формул [19]

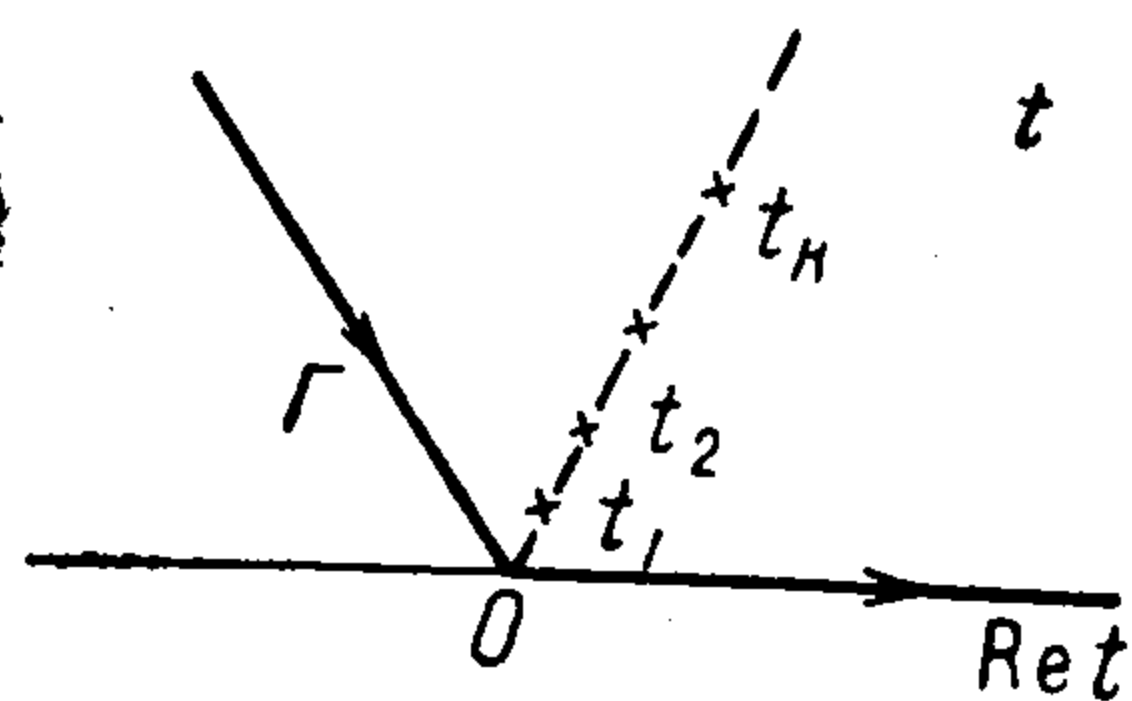
$$w(t) = (-t)^{-1/4} \exp[2/3i(-t)^{3/2} + 1/4\pi i]$$

$$w'(t) = (-t)^{1/4} \exp[2/3i(-t)^{3/2} - 1/4\pi i] \quad (t \ll 0)$$

Полученный результат на некотором интервале значений t будет совпадать с выражением (4.6).

Для $t \gg 0$, т. е. в области тени для продольных смещений, интеграл (5.1) вычисляется через вычеты подынтегрального выражения в нулях знаменателя. При этом получим ряд, который в сумме с рядом (4.2) совпадет с рядом (3.2), представляющим решение задачи в области тени.

Таким образом, выражение (5.1) будет сшивать полученные ранее решения в областях тени и света для продольных смещений.



Фиг. 6

Аналогично, получим для области ω_2

$$\begin{aligned} w_g^{sv} = & \frac{e^{-1/4\pi i} \cos \varphi}{2 \sqrt{\pi \sin \vartheta}} \left(\frac{k_2 a}{2} \right)^{-1/6} \frac{a}{r} \left\{ \int_0^\infty \frac{p_2^{1/2}(\tau) [\bar{w}'(\tau) - q_2(\tau) \bar{w}(\tau)]}{V(\tau, r, 1) [w'(\tau) - q_2(\tau) w(\tau)]} e^{i\psi_2(\tau)} \times \right. \\ & \times \left[r_0 \frac{a}{r} p_2(\tau) - \vartheta_0 V^2(\tau, r, 1) \right] d\tau - 2e^{1/6\pi i} \int_0^\infty \frac{p_2^{1/2}(\tau e^{2/3\pi i}) [v'(\tau) - q_2(\tau e^{2/3\pi i}) e^{2/3\pi i} v(\tau)]}{V(\tau e^{2/3\pi i}, r, 1) [\bar{w}'(\tau) - q_2(\tau e^{2/3\pi i}) e^{2/3\pi i} \bar{w}(\tau)]} \times \\ & \times \exp [i\psi_2(\tau e^{2/3\pi i})] \left[r_0 \frac{a}{r} p_2(\tau e^{2/3\pi i}) - \vartheta_0 V^2(\tau e^{2/3\pi i}, r, 1) \right] d\tau \left. \right\} \quad (5.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_g^{sh} = & \frac{e^{-3/4\pi i} \varphi_0 \sin \varphi}{2 \sqrt{\pi \sin \vartheta}} \left(\frac{k_2 a}{2} \right)^{-1/6} \frac{a}{r} \left\{ \int_0^\infty \frac{p_2^{1/2}(\tau) L(\tau)}{V(\tau, r, 1)} e^{i\psi_2(\tau)} d\tau - 2e^{1/6\pi i} \times \right. \\ & \times \left. \int_0^\infty \frac{p_2^{1/2}(\tau e^{2/3\pi i}) M(\tau)}{V(\tau e^{2/3\pi i}, r, 1)} \exp [i\psi_2(\tau e^{2/3\pi i})] d\tau \right\} \quad (5.4) \end{aligned}$$

$$p_2(\tau) = 1 + \left(\frac{y}{2} \right)^{-2/3} \frac{\tau}{2}, \quad L^e(\tau) = \frac{\bar{w}'(\tau)}{w'(\tau)}, \quad L^r(\tau) = \frac{\bar{w}(\tau)}{w(\tau)}, \quad M^e(\tau) = \frac{v'(\tau)}{\bar{w}'(\tau)}$$

$$M^r(\tau) = \frac{v(\tau)}{w(\tau)}, \quad q_2^e(\tau) = \frac{[2p_2^2(\tau) - 1]^2}{4p_2^2(\tau) \sqrt{p_2^2(\tau) - \varepsilon^2}} \left(\frac{k_2 a}{2} \right)^{1/3}, \quad q_2^r(\tau) = \frac{p_2^2(\tau)}{\sqrt{p_2^2(\tau) - \varepsilon^2}} \left(\frac{k_2 a}{2} \right)^{1/3}$$

$$\psi_2(\tau) = k_2 a p_2(\tau) [\vartheta - 1/2\pi - \arccos \cos a p_2(\tau) / r] + k_2 r V^2(\tau, r, 1)$$

Легко показать, что формулы (5.3) и (5.4) связывают решения в области геометрической тени с решениями в области света.

В области ω_3 вместо (4.7) получим

$$\begin{aligned} w_g^{sv} = & \frac{e^{1/4\pi i} \cos \varphi}{2 \sqrt{\pi \sin \vartheta}} \frac{a}{r} \left(\frac{k_1 a}{2} \right)^{-1/6} \left\{ \int_0^\infty \frac{w'(t) + q_1(t) w(t)}{w'(t) - q_1(t) w(t)} \frac{p_1^{1/2}(t) \exp [i\psi_3(t)]}{V(t, r, \varepsilon)} \times \right. \\ & \times \left[r_0 \varepsilon \frac{a}{r} p_1(t) - \vartheta_0 V^2(t, r, \varepsilon) \right] dt - e^{2/3\pi i} \int_0^\infty \frac{\bar{w}'(t) + e^{2/3\pi i} q_1(t e^{2/3\pi i}) \bar{w}(t)}{\bar{w}'(t) - e^{2/3\pi i} q_1(t e^{2/3\pi i}) \bar{w}(t)} \times \\ & \times \left. \frac{p_1^{1/2}(t e^{2/3\pi i})}{V(t e^{2/3\pi i}, r, \varepsilon)} \exp [i\psi_3(t e^{2/3\pi i})] \left[r_0 \varepsilon \frac{a}{r} p_1(t e^{2/3\pi i}) - \vartheta_0 V^2(t e^{2/3\pi i}, r, \varepsilon) \right] dt \right\} \quad (5.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_3(t) = & k_1 a p_1(t) [\vartheta - 1/2\pi + 2 \arccos \varepsilon p_1(t) - \arccos \varepsilon a p_1(t) / r] - \\ & - 2k_2 a V^2(t, a, \varepsilon) + k_2 r V^2(t, r, \varepsilon) \end{aligned}$$

Эти интегралы также следует вычислять методом квадратур, используя таблицы [19]. Интегралы (5.5) дают непрерывный переход от решения, представляющего смещения в SV-волнах в области (3), к решению в области (4) (фиг. 3).

Таким образом, асимптотические формулы для смещений ($k_1 a, k_2 a \gg 1$) в каждой из областей (фиг. 3) представляются в виде

$$(1) \quad w = w_1^p + w_{11}^{sv} + w_{12}^{sv} + w_1^{sh}$$

$$(2) \quad w = w_1^p + w_{11}^{sv} + w_{22}^{sv} + w_2^{sh} + w_g^{sv} + w_g^{sh}$$

$$(3) \quad w = w_2^p + w_g^p + w_{11}^{sv} + w_{22}^{sv} + w_2^{sh} + w_g^{sv} + w_g^{sh}$$

$$(4) \quad w = w_2^p + w_g^p + w_{21}^{sv} + w_{22}^{sv} + w_2^{sh} + w_g^{sv} + w_g^{sh}$$

Метод геометрической теории дифракции Келлера [25] можно подобно тому, как это сделано в [17], развить на случай дифракции упругих волн на произвольных гладких выпуклых телах. Коэффициенты дифракции и экспоненты затухания (через которые выражаются упругие смещения в методе Келлера) для P и SV -волн можно взять из [17], а для SH -волн получить из сравнения с асимптотическим решением, полученным в данной работе.

Автор приносит благодарность Г. А. Скуридину за внимание к работе.

Поступила 22 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. К у п р а д з е В. Д. Основные задачи математической теории дифракции. ОНТИ, 1935.
2. Уч. зап. ЛГУ, 1953, № 170, вып. 27.
3. С к у р и д и н Г. А. К теории рассеяния упругих волн на криволинейной границе. Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1957, № 2.
4. С к у р и д и н Г. А. Приближенная теория головной волны, возникающей на цилиндрическом включении в однородной упругой среде. ПММ, 1961, т. 25, вып. 3.
5. W h i t e R. M. Elastic wave scattering at a cylindrical discontinuity in a solid. J. Acoust. Soc. America, 1958, vol. 30, No. 8.
6. Y i h H s i n g P a o. Dynamical stress concentration in an elastic plate. J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, No. 2.
7. M o w C. C., M e n t e L. J. Dynamic stresses and displacements around cylindrical discontinuities due to plane harmonic shear waves. J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, No. 4.
8. Y i n g C. F., T r u e l l R. Scattering of a plane longitudinal wave by a spherical obstacle in an isotropically elastic solid. J. Appl. Phys., 1956, vol 27, No. 9.
9. К н о р о ф ф L. Scattering of compression waves by spherical obstacles. Geophysics, 1959, vol. 24, No. 1.
10. К н о р о ф ф L. Scattering of shear waves by spherical obstacles. Geophysics, 1959, vol 24, No. 2.
11. G i l b e r t J. F. Elastic wave interaction with a cylindrical cavity. Air Force Ballistic Miss. System Div., 1959.
12. В а р о н М. Л., М а т т е w s А. Т. Diffraction of a pressure wave by a cylindrical cavity in an elastic medium. J. Appl. Mech., 1961, vol. 28, No. 3.
13. В а р о н М. Л., М а т т е w s А. Т. Diffraction of a shear wave by a cylindrical cavity in an elastic medium. J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, No. 1.
14. G i l b e r t F., К н о р о ф ф L. First motion methods in theoretical seismology. J. Acoust. Soc. America, 1959, vol. 31, No. 9.
15. G i l b e r t F., К н о р о ф ф L. Scattering of impulsive elastic waves by a rigid cylinder. J. Acoust. Soc. America, 1959, vol. 31, No. 9.
16. Я в о р с к а я И. М. Дифракция плоской продольной волны на круговом цилиндре. Докл. АН СССР, 1964, т. 158, № 6.
17. Я в о р с к а я И. М. Дифракция плоских стационарных упругих волн на гладких выпуклых цилиндрах. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
18. W a t s o n G. N., Diffraction of electric waves by the earth. Proc. Roy. Soc. A, 1918, vol. 95, No. 666.
19. Ф о к В. А. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. Изд-во АН СССР, 1946.
20. В р е м м е r Н. Terrestrial radio waves, Elsevier Publ. Company, New York, Amsterdam, London, Brussels, 1949.
21. F r a n z W. Über die greenschen funktionen des zylinders und der kugel. Z. Naturforsch., 1954, B. 9, No. 9a.
22. I m a i I. Die Beugung electromagnetischer wellen an einem kreiszylinder. Z. Phys., 1954, B. 137, No. 1.
23. С т р е т т о n Дж. А. Теория электромагнетизма. Гостехиздат, 1948.
24. Х е н л Х., М а у э Л., В е с т п ф а л ь К. Теория дифракции. Изд-во «Мир», 1964.
25. L e v y В. R., K e l l e r J. B. Diffraction by a smooth objects. Communs Pure and Appl. Math., 1959. vol. 12, No. 1.