

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ, ПОДВЕРЖЕННОЙ ДЕЙСТВИЮ СИЛ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

Н. Н. Моисеев

(Москва)

Рассматриваются некоторые особенности течения идеальной жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения: возможность вырождения волн в уединенные, существование уединенных волн типа впадин, существование осесимметричных струй волнообразной формы и возможность потери устойчивости струи, вызванной действием сил поверхностного натяжения. Исследование проводится в рамках асимптотики узких полос (см. [1, 2]).

§ 1. Длинные волны в жидкости, подверженной действию сил поверхностного натяжения. 1°. Задача определения установившихся волн на поверхности тяжелой жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения, сводится к определению функции ψ , гармонической в полосе $0 < y < f(x)$ (фиг. 1) и функции $f(x)$ по условиям

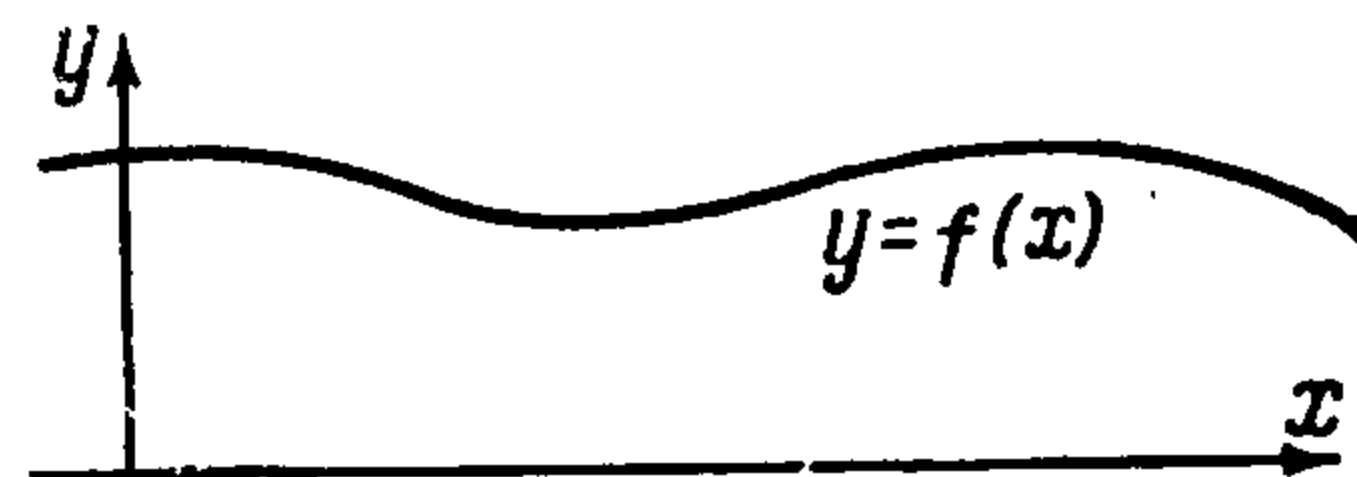
$$\psi = 1 \quad \text{при } y = f(x), \quad \psi = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (1.1)$$

$$\psi_x^2 + \psi_y^2 + 2vf - \gamma K = C \quad \text{при } y = f(x) \quad (1.2)$$

Задача (1.1), (1.2) сформулирована в безразмерном виде. В качестве характерных параметров приняты глубина жидкости h в некоторой точке, положение которой будет указано ниже, и расход жидкости Q . В соотношении (1.2) безразмерный параметр v , значение средней кривизны K , безразмерный параметр γ , характеризующий действие капиллярных сил, определяются следующими формулами:

$$v = \frac{gh^3}{Q^2} = \frac{gh}{V}, \quad K = \frac{f''}{2(1+f'^2)^{3/2}} \quad (1.3)$$

$$\gamma = \frac{4\alpha h}{Q^2} = \frac{4\alpha}{V^2 h} \quad \left(V = \frac{Q}{h} \right)$$



Фиг. 1

Здесь V — характерная скорость, α — коэффициент поверхностного натяжения.

2°. Функция ψ , гармоническая внутри полосы $0 < y < f(x)$, и ее производные имеют представления (см. [1], стр. 184)

$$\psi(x, y) \sim \frac{y}{f} + \frac{2f'^2 - f''f}{6f} y \left[1 - \frac{y^2}{f^2} \right] + \dots \quad (1.4)$$

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \sim \frac{1}{f} - \frac{2f'^2 - f''f}{6f} \left[3 \frac{y^2}{f^2} - 1 \right] + \dots, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \sim \frac{yf'}{f^2} + \dots$$

Так как граница $y = f(x)$ заранее неизвестна, то необходимо задаться некоторыми априорными оценками о производных функции $y = f(x)$ (имеется в виду изучение длинных волн и условий их вырождения в уеди-

ненную). Поэтому естественно принять ограничения М. А. Лаврентьева [1]

$$f' = O(\varepsilon^{3/2}), \quad f'' = O(\varepsilon^2), \quad f''' = O(\varepsilon^{5/2}) \quad \text{и т. д.} \quad (1.5)$$

имеющие место для уединенных волн в идеальной жидкости.

При условиях (1.5) из (1.4) имеем асимптотическое представление для модуля скорости на кривой $y = f(x)$

$$(v_x^2 + v_y^2)_{y=f(x)} = \frac{1}{f^2} \left[1 + \frac{2}{3} f f'' \right] + O(\varepsilon^{5/2}) \quad (1.6)$$

Отбрасывая величины порядка $O(\varepsilon^{5/2})$, уравнение (1.2) запишем в виде

$$f'' \left[1 - \frac{3}{2} \gamma f \right] + 3\gamma f^2 + \frac{3}{2f} - \frac{3}{2} c f = 0$$

Уравнение (1.7) имеет первый интеграл, и его фазовая плоскость может быть легко изучена. Однако для дальнейшего имеет значение та ее часть, для которой выполнены условия (1.5). Эти условия заведомо выполнены при $f = 1$. Поэтому можно получить те же качественные результаты, без громоздких вычислений, если положим $f = 1 + \eta$ и удержим в (1.7) несколько первых членов разложений. Ограничиваясь членами порядка $O(\eta^2)$, приведем (1.7) к виду

$$(1 - \frac{3}{2}\gamma) \eta'' + A\eta + B\eta^2 = D \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} A &= 3\nu(2 + \beta) + \frac{3}{2}(\beta - 1) - \frac{3}{2}C(1 + \beta) \\ B &= 3\nu(1 + 2\beta + \beta^2) + \frac{3}{2}(1 - \beta + \beta^2) - \frac{3}{2}C(\beta + \beta^2) \\ D &= \frac{3}{2}C - 3\nu - \frac{3}{2} \quad (\beta = \frac{3}{2}\gamma / (1 - \frac{3}{2}\gamma)) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Для некоторого упрощения записи введем вместо C новую постоянную δ : $C = 2\gamma + 1 + \delta$. Тогда формулы (1.9) примут вид

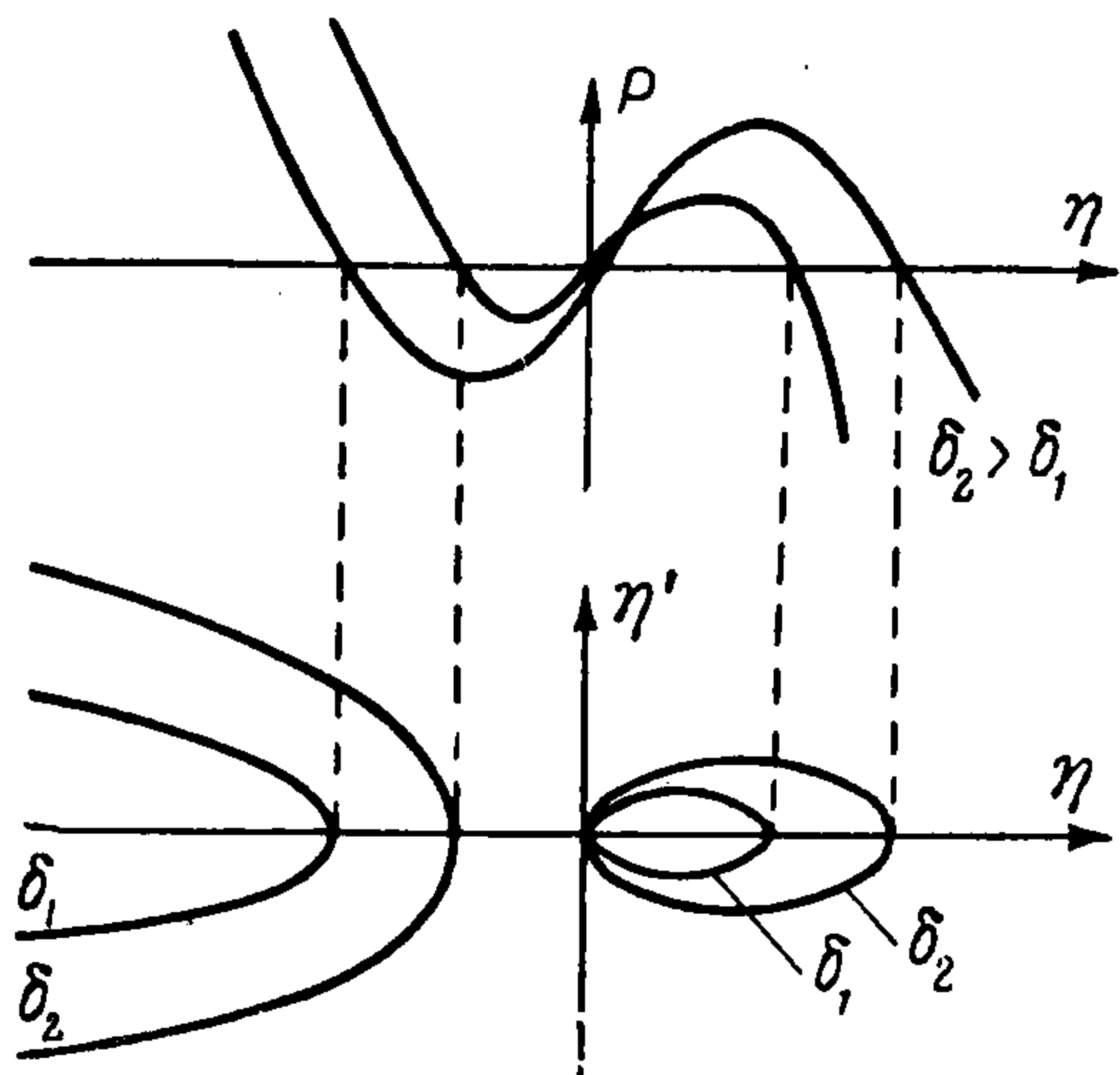
$$\begin{aligned} A &= 3(\nu - 1) - \frac{3}{2}\delta(1 + \beta) \\ B &= 3\nu + \frac{3}{2} + 3(\nu - 1)\beta - \frac{3}{2}\delta\beta(1 - \beta), \quad D = \frac{3}{2}\delta \end{aligned} \quad (1.10)$$

Уравнение (1.8) допускает первый интеграл

$$\frac{1}{2}(1 - \frac{3}{2}\gamma) \eta'^2 = F + D\eta - \frac{1}{2}A\eta^2 - \frac{1}{3}B\eta^3 \equiv P(\eta) \quad (1.11)$$

Здесь F — новая постоянная; можем ее принять равной нулю. Это эквивалентно тому, что в качестве линейного размера выбирается глубина жидкости в вершине бугра или во впадине волны. Тогда значение $\eta = 0$ отвечает $\eta' = 0$. Таким образом, поведение фазовых кривых определяется тремя параметрами: ν , δ и γ .

3°. Рассмотрим сначала тот случай, когда $\delta \geq 0$, $\gamma < \frac{2}{3}$ и $B \geq 0$. Последнее условие выполняется, например, если ν близко к 1, а δ мало. На фиг. 2 изображены для этого случая кривые $P(\eta)$ и фазовая плоскость уравнения (1.8). Ветви кривых, лежащие в левой полуплоскости, физического смысла не имеют, поскольку они описывают неограниченные решения уравнения (1.8). Ветви, лежащие в правой полуплоскости, описывают периодические решения, амплитуда которых тем меньше, чем меньше

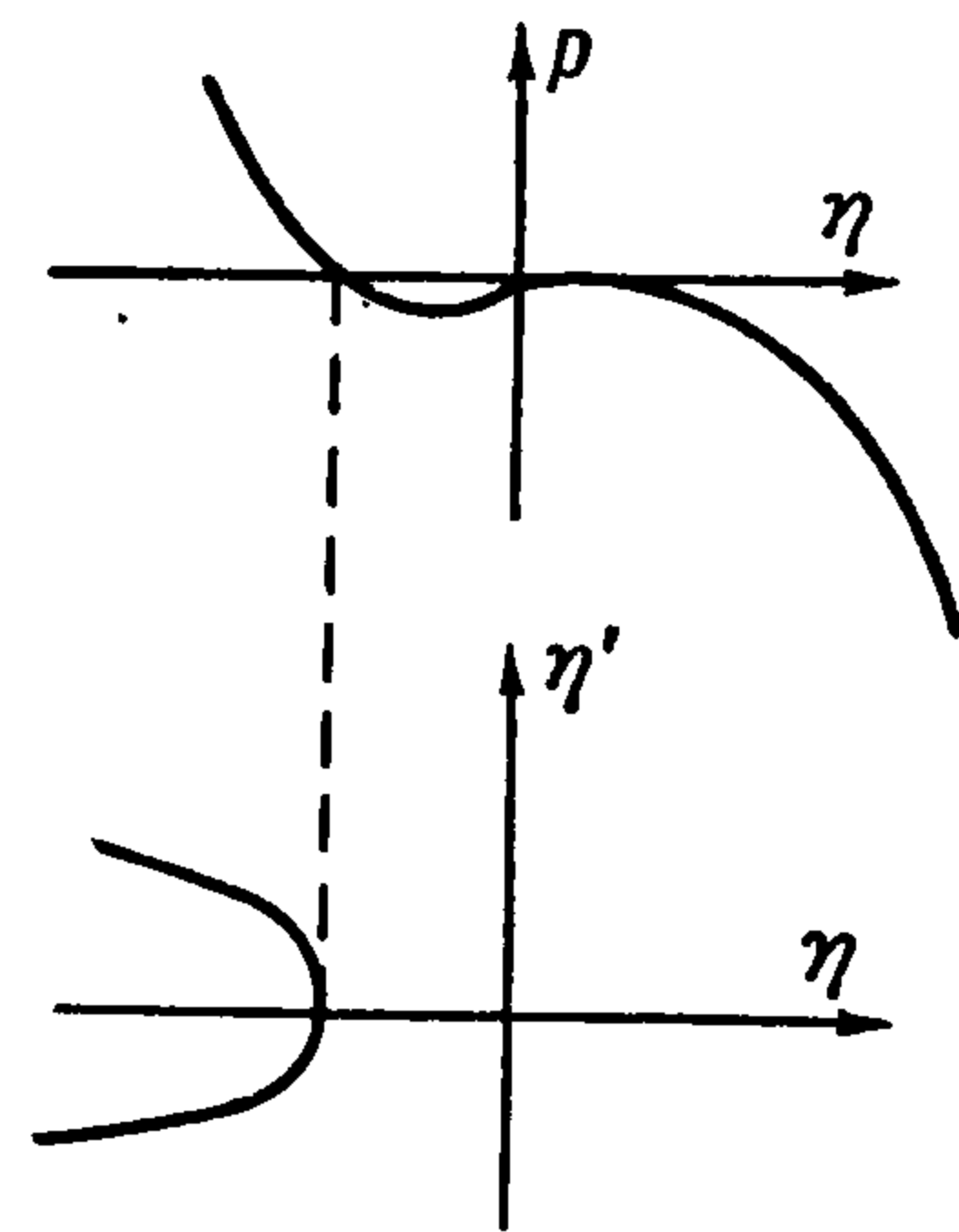


Фиг. 2

значение δ . Таким образом, при $\delta > 0$ по свободной поверхности распространяются волны, длина которых λ определяется квадратурой:

$$\lambda = V\sqrt{2} \frac{d\eta}{\sqrt{(D\eta - 1/2 A\eta^2 - 1/8 B\eta^3)(1 - 3/2 \gamma)}} \quad (1.12)$$

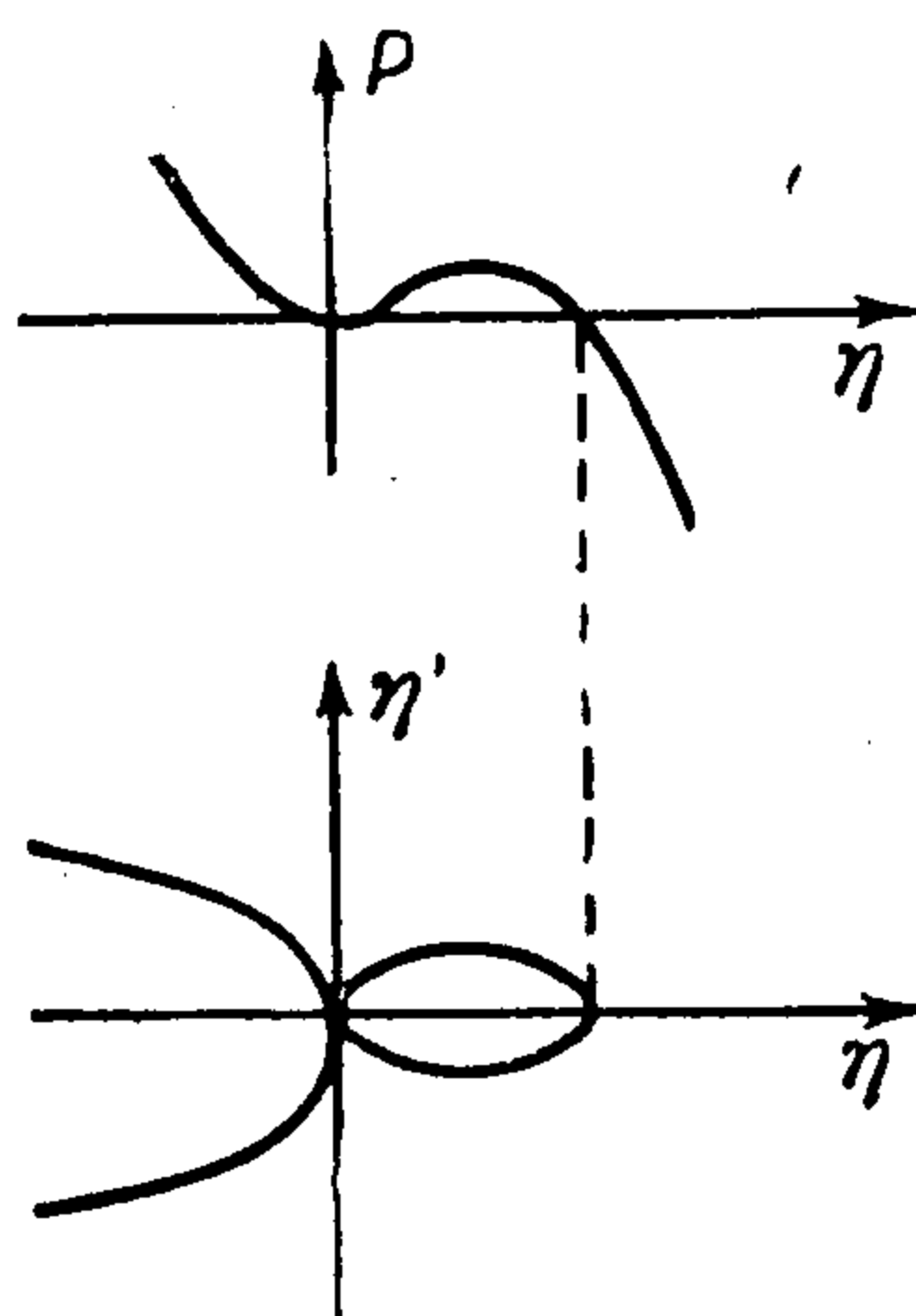
в которой интеграл распространен по всей фазовой траектории. Из (1.12) видим, что $\lim \lambda = \infty$ при $\delta \rightarrow 0$. Поэтому естественно поставить вопрос о характере предельного движения при $\lambda \rightarrow \infty$. Если $\nu > 1$ (т. е. если скорость распространения волны относительно покоящейся жидкости $V < \sqrt{gh}$), то при $\delta = 0$ фазовый портрет течения будет таким, каким он изображен на фиг. 3.



Фиг. 3

Таким образом, периодическое решение в этом случае выродилось в точку $\eta = \eta' = 0$, т. е. течение вырождается в плоскопараллельный поток. Совсем иная ситуация будет при $\nu < 1$. Для этого случая фазовый портрет течения изображен на фиг. 4. Видим, что при $\lambda \rightarrow \infty$ максимальное возвышение («амплитуда») η^+ не стремится к нулю. Свободная поверхность в этом случае представляет уединенную волну.

Итак, если $\nu > 1$, то при $\lambda \rightarrow \infty$ волны, которые распространяются с данной скоростью (ν — фиксировано), вырождаются в равномерный поток, амплитуда этих волн $\eta^* \rightarrow 0$. Эти волны при $\gamma = 0$ были изучены Литменом [3]. Если $\nu < 1$, то $\lim \eta^* > 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$, предельное решение представляет уединенную волну, которая среди волн, распространяющихся с данной скоростью, имеет наименьшую амплитуду $\eta^*(\nu)$, причем амплитуда уединенной волны стремится к нулю при $\nu \rightarrow 1$. Эти волны были изучены Кортвегом и Деврисом [4], соответствующая теорема существования доказана Я. И. Секерж-Зеньковичем [5]. Значение $\nu = 1$ является бифуркационным. При $\nu > 1$ существует единственная форма движения бесконечной длины



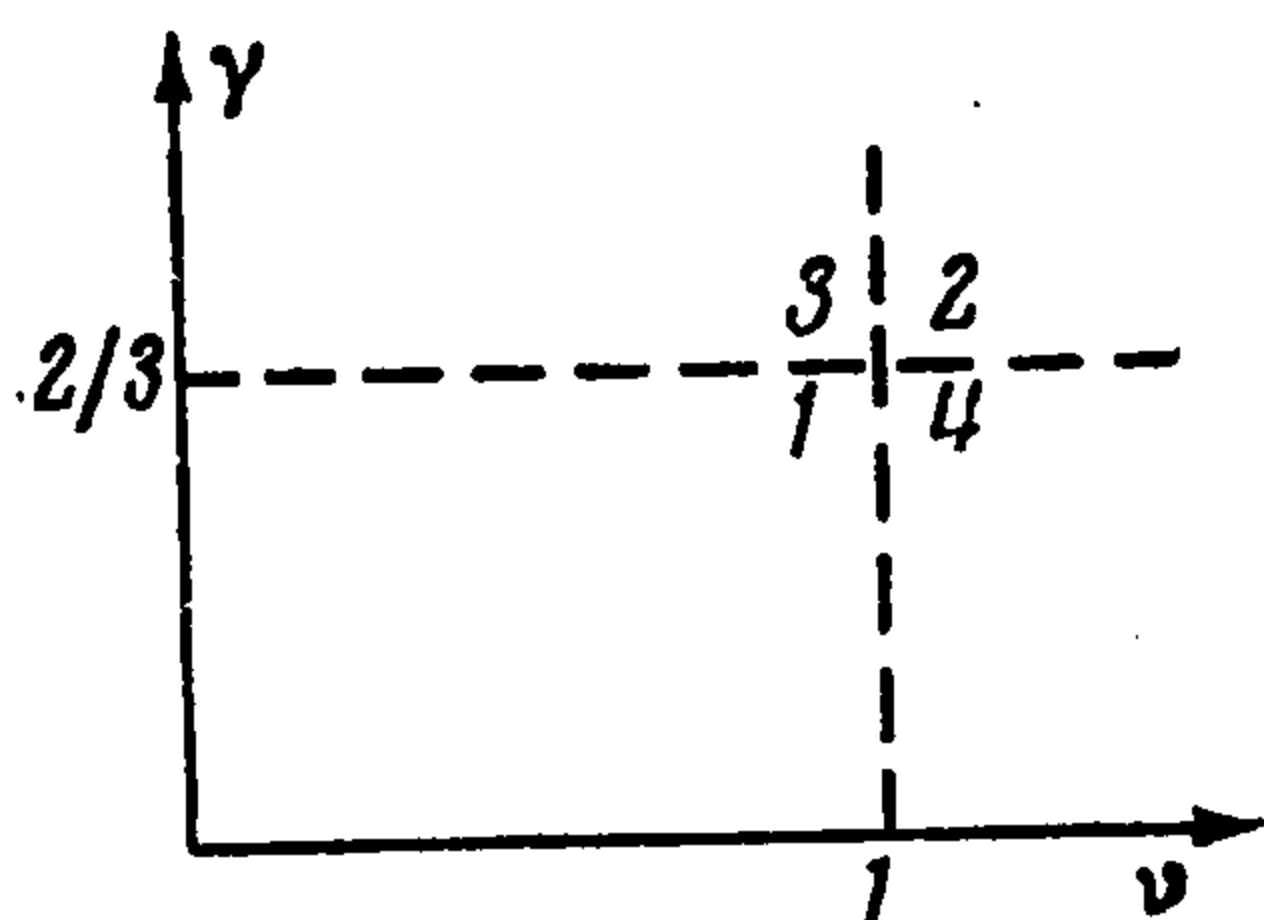
Фиг. 4

волны — равномерный поток. При $\nu < 1$ и осуществляются две предельные формы: равномерный поток и уединенная волна. Исследуемые здесь волны аналогичны обычным гравитационным (коноидальным) волнам, в которые они и переходят при $\gamma \rightarrow 0$. Случаи [таких волн могут быть легко изучены аналитическими методами. При $\nu > 1$ волновые движения могут быть исследованы квазилинейными методами (методом Ляпунова — Пуанкаре или методом Крылова — Боголюбова), поскольку уже в первом приближении уравнение (1.8) допускает периодическое решение

$$\eta = \eta^* \cos \left[\left(\frac{3(\nu - 1)}{1 - 3/2 \gamma} x \right)^{1/2} + \theta \right] \quad (\theta = \text{const}) \quad (1.13)$$

Если $\nu < 1$, то уравнение первого приближения не содержит периодических решений, и, следовательно, такие волны нельзя изучать в линей-

ном приближении¹. В этом случае решение может быть получено в эллиптических функциях. Решение становится особенно простым $\delta = 0$. Легко проверить, что в этом случае уравнение (1.8) имеет решение



Фиг. 5

$$\eta = \frac{3|A|}{2B \operatorname{ch}^{2 1/2} \sqrt{|A|x}} = \frac{\eta^*}{\operatorname{ch}^{2 1/2} \sqrt{Ax}} \quad (1.14)$$

которое стремится к нулю при $|x| \rightarrow \infty$.

Отсюда видно, что с увеличением поверхностного натяжения амплитуда уединенной волны

$$\eta^* = \frac{3(1-\nu)}{2\nu + 1 - 3(1-\nu)\beta}$$

растет.

4°. Случай $\delta < 0$, как легко проверить, физического смысла не имеет. Действительно, рассматривается асимптотическая теория, причем заранее предполагается, что решение удовлетворяет условиям (1.5). Из (1.13) и (1.14) следует, что сделанные априорные оценки имеют место, если ν близко к 1. Таким образом, в качестве ε надо принять величину $\sqrt{|1-\nu|}$, и приведенное рассмотрение имеет смысл только в окрестности точки $\nu = 1$.

5°. Выше рассмотрен случай только малых значений γ . Силы поверхностного натяжения только изменяют параметры волн, но не приводят к появлению новых форм движения. Предположим теперь, что $\gamma > 2/3$. При переходе параметра γ через свое бифуркационное значение $\gamma = 2/3$ изменяются знаки у коэффициентов A , B и D в уравнении (1.8). Проводя исследование фазовой плоскости аналогично тому, как было сделано выше, придем к следующим результатам.

а) Если $\gamma > 2/3$ и $\nu < 1$, то при $\lambda \rightarrow \infty$ волны вырождаются в равномерный поток, т. е. при $\lambda \rightarrow \infty$ амплитуда волн обращается в нуль.

б) Если $\gamma > 2/3$ и $\nu > 1$, то при $\lambda \rightarrow \infty$ амплитуда имеет конечный предел, это предельное течение представляет собой уединенную волну. Однако эти волны имеют форму не горба, а впадины.

Итак, если параметры γ и ν принадлежат областям 3 и 4 (фиг. 5), то при $\lambda \rightarrow \infty$ существует единственная предельная форма движения — равномерный поток; если параметры γ и ν принадлежат областям 1 и 2, то при $\lambda \rightarrow \infty$ существуют две предельные формы движения, кроме равномерного потока существует еще движение, при котором свободная поверхность имеет форму волны, но для значений параметров, принадлежащих области 1, уединенная волна имеет форму горба, а для области 2 — впадины.

Примечание. Приведенный асимптотический анализ имеет смысл лишь в случае, когда $|A| \cdot |1 - 3/2\gamma|^{-1}$ — малая величина. Рассматривался тот случай, когда малость этой величины обеспечивалась близостью ν к 1 и δ к нулю. Однако эта величина может быть малой и в том случае, если велик знаменатель. Это дает новый тип движения жидкости, который

¹ В строгой (не асимптотической постановке) задача о волнах может быть сведена к операторному уравнению с оператором, у которого производная Фреше обращается в нуль при $\nu = 1$ и $\delta = 0$.

может быть изучен асимптотическими методами для любого значения ν . Пусть, например, $\nu = 0$, т. е. рассматриваются чисто капиллярные волны.

Тогда

$$\frac{A}{1 - \frac{2}{3}\gamma} = - \frac{2\delta}{3(1 - \frac{2}{3}\gamma)^2}$$

Уравнение (1.8) допускает решение типа уединенной волны, если $D = 0$, т. е. если $\delta = 0$. Но в этом случае и $A = 0$, однако уравнение (1.9) здесь (при $\gamma > \frac{2}{3}$) просто не имеет ограниченных решений, кроме тривиального, т. е. чисто капиллярные течения не содержат уединенной волны.

§ 2. Осесимметричные струи. 1°. Будем рассматривать осесимметричную струю, подверженную действию сил поверхностного натяжения; течение будем считать установившимся. Цель рассмотрения — изучить возможные формы струи. Уравнение границы струи будем задавать в виде $r = f(z)$. Течение струи предполагается потенциальным. Поскольку струя предполагается осесимметричной, то задача сводится к отысканию функции тока $\psi(r, z)$, удовлетворяющей уравнению

$$\psi_{rr} + \psi_{zz} - r^{-1}\psi_r = 0 \quad (2.1)$$

и функции $f(z)$ по следующим условиям:

$$\psi = 1 \quad \text{при } r = f(z), \quad \psi = 0 \quad \text{при } r = 0 \quad (2.2)$$

$$f^{-2}[\psi_r^2 + \psi_z^2] - 2\gamma K = C \quad \text{при } r = f(z) \quad (2.3)$$

Условие (2.2) — это кинематическое условие (в данном случае — условие постоянства расхода), (2.3) — динамическое. Задача записана в безразмерных переменных. В качестве характерных параметров принят радиус струи R в некотором сечении, положение которого будет установлено ниже, и значение функции тока на поверхности струи Q , C — постоянная энергия, которая является функционалом, K — средняя кривизна поверхности струи

$$K = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f \cos \theta} + \frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{(1 + f'^2)^{1/2}}{f} + \frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}} \right] \quad (2.4)$$

Здесь γ — безразмерный параметр, характеризующий действие сил поверхностного натяжения

$$\gamma = \frac{\alpha}{RV^2}, \quad \text{или} \quad \gamma = \frac{\alpha R^3}{Q^2} \quad \left(V = \frac{Q}{R^2} \right) \quad (2.5)$$

Отсюда видно, что роль поверхностного натяжения будет тем больше, чем больше коэффициент поверхностного натяжения α и чем меньше толщина струи и характерная скорость частиц жидкости.

2°. Функция ψ , удовлетворяющая (2.1) внутри полосы $0 < r < f(z)$ и обращающаяся в единицу на границе $r = f(z)$ и в нуль на прямой $r = 0$, имеет следующее асимптотическое представление (см. [1], стр. 185):

$$\psi \sim \frac{r^2}{f^2} + \frac{3f'^2 - f''f}{4f^2} r^2 \left(1 - \frac{r^2}{f^2} \right) + \dots \quad (2.6)$$

и аналогично

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \sim \frac{2rf'}{f^3} + \dots, \quad v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \sim - \left[\frac{2}{f^2} + \frac{3f'^2 - f''f}{2f^2} \left(1 - \frac{2r^2}{f^2} \right) + \dots \right] \quad (2.7)$$

и далее

$$v_r^2 + v_z^2 = \frac{1}{f^2} (\psi_r^2 + \psi_z^2) \sim \frac{4r^2 f'^2}{f^6} + \frac{4}{f^4} + \frac{6f'^2 - 2ff''}{f^4} \left(1 - \frac{2r^2}{f^2}\right) + \dots \quad (2.8)$$

Так как граница неизвестна, то следует задаться некоторыми ее априорными оценками. Имея в виду те же цели, что и в предыдущем параграфе, примем снова оценки М. А. Лаврентьева

$$f' = O(\varepsilon^{3/2}), \quad f'' = O(\varepsilon^2) \quad \text{и [т. д.]} \quad (2.9)$$

Справедливость этих оценок, а также смысл параметра ε установим ниже. Используя оценки (2.9), [перепишем формулы (2.7) и (2.8) в виде

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{r^2}{f^2} - \frac{f''}{4f^2} r^2 \left(1 - \frac{r^2}{f^2}\right) + O(\varepsilon^{5/2}) \\ (v_r^2 + v_z^2)_{r=f} &= \frac{4}{f^4} \left[1 + \frac{1}{2} ff''\right] + O(\varepsilon^{5/2}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

В соответствии с оценками (2.9), преобразуем (2.4)

$$K = 1/2 (f^{-1} + f'') + O(\varepsilon^3) \quad (2.11)$$

Подставляя (2.10) и (2.11) в динамическое условие (2.3), получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно свободной границы — функции f

$$(2 - \gamma f^3) f'' + 4f^{-1} - \gamma f^2 - C f^3 = 0 \quad (2.12)$$

Заметим, что уравнение (2.12) допускает первый интеграл, и его свойства легко изучить методами фазовой плоскости.

Для наших целей достаточно рассмотреть квадратичное приближение. Для этого положим $f = 1 + \eta$ и удержим в (2.12) члены порядка $O(\eta^2)$.

Уравнение (2.12) примет следующий вид:

$$(2 - \gamma) \eta'' + A\eta + B\eta + B\eta^2 = D \quad (2.13)$$

где постоянные A , B и D выражаются формулами

$$\begin{aligned} A &= -\beta D - 4 - 2\gamma - 3C, \quad D = \gamma + C - 4 \\ B &= -D - 2C - \beta(3\gamma - 4C) - \beta^2 D \quad (\beta = 3\gamma / (2 - \gamma)) \end{aligned} \quad (2.14)$$

3°. В случае равномерного потока и уединенной волны имеем $\eta'' = 0$ и $\eta = 0$ при $|z| \rightarrow \infty$. Следовательно, в этом случае $D = 0$ и $C = 4 - \gamma$. Рассмотрим течения, близкие к этим. Положим $C = 4 - \gamma + \delta$, а $D = \delta$ будем считать малой величиной. В этом случае

$$A = \gamma - 16 - \delta(3 + \beta)$$

Так как излагаемая теория имеет смысл при малых A , то положим $\gamma = 16 + \Delta$, тогда $\beta = -24/7 + 3/98 + O(\Delta^2)$ и далее

$$A = 3/7 \delta + \Delta + O(\max(\delta^2, \Delta^2)), \quad B = 13^2/7 + O(\max(|\Delta|, |\delta|))$$

Таким образом, для малых Δ и δ имеем $b > 0$, а знак A определяется соотношением Δ и δ . Замечая также, что $2 - \gamma < 0$ для малых Δ , и повторяя рассуждения предыдущего параграфа, можем легко получить следующие результаты.

а. Если $\delta < 0$, т. е. если постоянная энергия $C < -12 + \Delta$, то уравнение (2.13) не имеет ограниченных решений. Это значит, что струя, простирающаяся в бесконечность в обе стороны неограниченно расширяется хотя бы в одном из направлений.

б. Если $\delta \geq 0$, то уравнение (2.13) допускает решения, ограниченные на всей прямой $-\infty < z < +\infty$. Если $\delta \neq 0$, то эти решения представляют собой нелинейные волны, амплитуды которых уменьшаются вместе с δ .

в. Характер предельных решений при $\lambda \rightarrow \infty$ (т. е. при $\delta \rightarrow 0$) будет существенно зависеть от Δ . Если $\Delta > 0$ (т. е. $\gamma > 16$), то

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{A}{2-\gamma} < 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0$$

и амплитуда предельного решения не равна нулю. Предельное решение представляет собой уединенную волну типа впадины. Если $\Delta < 0$, то предельное решение представляет собой равномерный поток.

§ 3. Нестационарные задачи теории струй. 1°. Составим уравнения длинных осесимметричных волн, распространяющихся вдоль цилиндрической струи идеальной невесомой жидкости, подверженной действию сил капиллярности. Потенциал скоростей φ и форма свободной поверхности $r = f(z, t)$ определяется как решение следующей задачи (фиг. 6):

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0, \quad V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \text{при } r = f \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 - 2\gamma K = C \quad \text{при } r = f \quad (3.3)$$

Безразмерные переменные здесь введены так же, как и в предыдущем параграфе.

2°. Рассмотрим сначала вспомогательную задачу определения потенциала скоростей, удовлетворяющего уравнению (3.1), условию (3.2) и условию

$$\varphi(f, z, t) = a(z, t) \quad (3.4)$$

Обозначая через ε малый параметр, сделаем в (3.1) замену переменного $z = \xi / \varepsilon$. Тогда уравнение (3.1) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) = 0 \quad (3.5)$$

Решение (3.5) будем искать в виде ряда

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon^2 \varphi_1 + \dots \quad (3.6)$$

где φ_i удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right) = -r \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \xi^2}, \dots \quad (3.7)$$

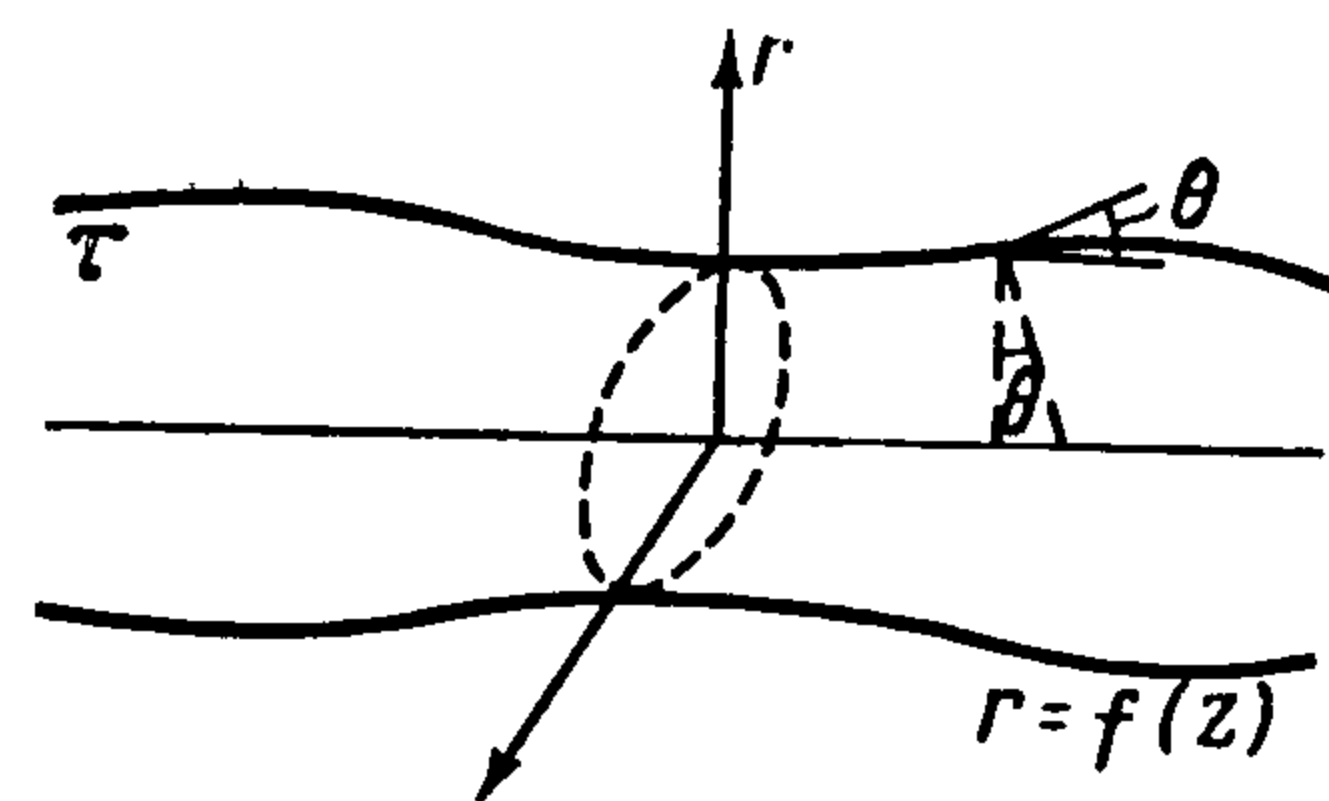
Функции φ_i удовлетворяют следующим краевым условиям

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 0, \quad \varphi_0 = a \quad \text{при } r = f, \quad \varphi_i = 0 \quad (i > 0) \quad \text{при } r = f$$

Решая эту последовательность краевых задач и возвращаясь снова к переменной z , получим следующее представление для s через его граничные значения

$$\varphi \sim a(z, t) + \frac{1}{4} a_{zz} (f^2 - r^2) + \dots \quad (3.8)$$

Для того чтобы (3.9) имело смысл, необходимо и достаточно, чтобы производные потенциала a и функции f достаточно быстро убывали вместе с их номером. Это условие имеет место, если волны достаточно длинные. Используя представление потенциала



Фиг. 6

(3.8), можем преобразовать кинематическое и динамическое соотношения (3.2) и (3.3)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{4} a_{zz} f - f_z a_z + \dots, \quad \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{1}{2} a_z^2 - \gamma \left(\frac{1}{f} + f_{zz} \right) + \dots = C \quad (3.9)$$

Если в равенствах (3.9) ограничиться определенным числом членов, то получим уравнения, которые дают приближенное описание распространению осесимметричных нелинейных волн вдоль струи.

3°. Уравнения (3.9) могут быть использованы для изучения разнообразных явлений, возникающих в теории струй. В частности, легко может быть изучена устойчивость струи относительно длинных возмущений. Плато, [6], по-видимому, был первым, который обратил внимание на то, что силы поверхностного натяжения могут служить причиной неустойчивости струи. Подобное исследование этого обстоятельства было проведено Релеем [7], который показал, что цилиндрическая форма струи неустойчива относительно достаточно длинных возмущений. Этот факт следует из системы (3.9).

Положим $a = V_z + b$, $f = 1 + \eta$ и линеаризуем систему (3.9), в которой удержим производные, порядок которых не выше второго

$$\eta_t = \frac{1}{4} b_{zz} - V \eta_z, \quad b_t + 2b_z V - \gamma (-\eta + \eta_{zz}) = 0 \quad (3.10)$$

Будем разыскивать решение типа бегущих волн. Для этого положим

$$\eta = A e^{i\omega z + \mu t}, \quad b = B e^{i\omega z + \mu t} \quad (3.11)$$

Для определения A и B имеем уравнения

$$A (\mu + iV\omega) + \frac{1}{4} \omega^2 B = 0, \quad A \gamma (1 + \omega^2) + B (\mu + 2i\omega V) = 0 \quad (3.12)$$

Заметим, что если $\gamma = 0$, т. е. поверхностное натяжение отсутствует, то второе уравнение (3.12) немедленно дает $\mu = -2i\omega V$, т. е. при отсутствии сил поверхностного натяжения струя находится в безразличном равновесии. Если добавить силы поверхностного натяжения, то струя потеряет устойчивость. В самом деле, характеристическое уравнение системы (3.12) имеет вид

$$\mu^2 + 3i\omega V \mu + \Delta \quad (\Delta = -\frac{1}{4} \omega^2 \gamma (1 + \omega^2) < 0) \quad (3.13)$$

Отсюда сразу следует, что один из корней (3.14) имеет положительную действительную часть. Таким образом, силы поверхностного натяжения разрывают тонкую струю. Интегрируя систему (3.9), можно проследить процесс разрыва струи на капли. Изложенная теория имеет смысл только для длинных возмущений. Итак, тривиальная форма струи невесомой жидкости, подверженная действию сил поверхностного натяжения, неустойчива. Однако, как видно из предыдущего параграфа, возможны и другие формы осесимметричной струи. В частности, могут существовать волнообразные формы. Поэтому естественным образом возникает вопрос: не будут ли существовать среди этих возможных форм струйных течений устойчивые течения.

При подготовке рукописи автор воспользовался рядом замечаний Л. Н. Сретенского и Ф. Л. Черноусько, которых он искренне благодарит.

Поступила 28 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. М о и с е е в Н. Н. Асимптотические методы типа узких полос. Кн. «Некоторые проблемы математики и механики», Новосибирск, 1961.
2. М о и с е е в Н. Н. и Т е р - К р и к о р о в А. М. Исследование движения тяжелой жидкости при скоростях, близких к критической. Тр. Моск. физико-техн. ин-та, 1959, № 3.
3. L i t m a n W. On the existence of periodic waves near critical speed. *Communs Pure and Appl. Math.*, 1957, vol. 10, p. 241.
4. K o r t w e g G. De Vries, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal on a new type of long solitary waves. *Philos. Mag.*, Ser. 5, 1895, 39, p. 422.
5. С е к е р ж - З е н ь к о в и ч Я. М. К теории капиллярно-гравитационной уединенной волны. Сб. аннотаций II Всесоюзн. съезда по теор. и прикл. мех., 1964.
6. P l a t e a u. *Statique experimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires.* Paris, 1873.
7. R e l e y. On the instability of jets. *Proc. Math. Soc.* 1878. vol. 10, p. 7.