

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ КАРТИНА ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ ЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОГО И ТЕПЛОПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА

О. С. Рыжов

(Москва)

Первая попытка упрощения уравнений Навье — Стокса для описания двумерных стационарных трансзвуковых течений совершенного¹ газа принадлежит, по-видимому, Липманну, Ашкеназу и Коулу (см., например, [1]). Полученные ими асимптотические уравнения были выведены затем другими методами в работах Стернберга [2], Зичела [3, 4] и Шанявского [5, 6]. Кроме того, в этих работах приведено несколько примеров течений со скоростями, близкими к скорости звука, на структуру которых вязкость и теплопроводность могут оказывать существенное влияние. Опираясь на уравнение Липманна — Ашкеназа — Коула, автор совместно с Г. М. Шефтером показал [7], что асимптотическая картина обтекания тел вращения звуковым на бесконечности потоком вязкого теплопроводящего газа должна качественно отличаться от той, которая дается решением уравнений идеального газа [8-10]. Этот вывод получился неожиданным, так как для несжимаемой жидкости поведение решений уравнений Эйлера и Навье — Стокса будет в первом приближении одинаковым, если их рассматривать в точках, расположенных вне вихревого следа и достаточно удаленных от обтекаемого тела.

В настоящей работе проводится подробный анализ уравнений Навье — Стокса в предположении, что скорость частиц газа во всей области течения близка к скорости звука. Помимо нелинейного уравнения Липманна — Ашкеназа — Коула, выведено значительно более простое линейное уравнение, которое справедливо, если поле потока определяется в основном вязкостью и теплопроводностью. Это уравнение применяется затем для изучения асимптотических законов затухания возмущений вдали от тела вращения, помещенного в звуковой на бесконечности поток. Устанавливается, что ширина l зоны, в которой значения параметров газа заметно отклоняются от соответствующих значений в набегающем потоке, пропорциональна $r^{2/3}$, где r — расстояние от оси симметрии. Разность между местным числом Маха M и единицей обратно пропорциональна $r^{1/3}$, а угол ϑ наклона вектора скорости к направлению движения невозмущенного потока обратно пропорционален $r^{2/3}$. Как показали Гудерлей, Йошихара и Бариш [8, 9], С. В. Фалькович и И. А. Чернов [10], в аналогичной задаче при обращении в нуль коэффициентов вязкости и теплопроводности $l \sim r^{2/3}$, $M - 1 \sim r^{-1/3}$ и $\vartheta \sim r^{-2/3}$. Наличие диссипативных факторов приводит к исчезновению скачка уплотнения и непрерывному характеру течения.

§ 1. Вывод приближенных уравнений. Пусть x и r обозначают цилиндрические координаты пространства, v_x и v_r — составляющие вектора скорости вдоль осей x и r , ρ — плотность, p — давление, s — удельную энтропию, T — температуру, λ_1 — коэффициент вязкости, λ_2 — коэффициент второй вязкости, k — коэффициент теплопроводности. Предполагая поле течения симметричным относительно оси x , возьмем уравнения не-

¹ Термином «совершенный» обозначается газ, подчиняющийся уравнению состояния Клапейрона; название «идеальный» будет относиться к газу, лишенному вязкости и теплопроводности.

разрывности Навье — Стокса и переноса тепла в виде [11]

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_r}{\partial r} + \frac{\rho v_r}{r} = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\lambda_1 \frac{\partial v_x}{\partial x} + \left(\lambda_2 - \frac{2}{3} \lambda_1 \right) \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda_1 \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) \right] + \frac{\lambda_1}{r} \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) \quad (1.2)$$

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_1 \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[2\lambda_1 \frac{\partial v_r}{\partial r} + \left(\lambda_2 - \frac{2}{3} \lambda_1 \right) \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right) \right] + \frac{2\lambda_1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r} \right) \quad (1.3)$$

$$\rho T \left(v_x \frac{\partial s}{\partial x} + v_r \frac{\partial s}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + 2\lambda_1 \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 \right] + \left(\lambda_2 - \frac{2}{3} \lambda_1 \right) \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right)^2 \quad (1.4)$$

Чтобы замкнуть систему, к ней нужно присоединить еще два уравнения, которые связывают между собой термодинамические величины ρ , p , s и T . В дальнейшем в качестве независимых параметров удобно принять плотность и давление, а удельную энтропию и температуру выразить через них. Приращение энтропии

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_\rho dp + \left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_p d\rho = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_\rho (dp - a^2 d\rho) \quad \left(a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \right)$$

Здесь a — адиабатическая скорость звука. Введем еще удельные теплоемкости при постоянном давлении c_p и постоянном объеме c_v и коэффициент теплового расширения α . Используя соотношения взаимности, имеем [12]

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_\rho = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_s = \frac{c_v}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_\rho \quad (1.5)$$

Дифференциал температуры

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_\rho dp + \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_p d\rho = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_\rho \left[dp - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T d\rho \right]$$

Между изотермической и адиабатической скоростями звука существует простая связь [12]

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{a^2}{\kappa} \quad \left(\kappa = \frac{c_p}{c_v} \right) \quad (1.6)$$

Остается еще вычислить частную производную $(\partial T / \partial p)_\rho$. Для этой цели используем известную из анализа формулу

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_\rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = -1$$

Отсюда без труда находим, что

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_\rho = \frac{\kappa}{\alpha \rho a^2} \quad \left(\alpha = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \right) \quad (1.7)$$

Используя равенства (1.5) — (1.7), для приращений удельной энтропии и температуры выводим соотношения

$$ds = \frac{c_p}{\alpha T \rho a^2} (dp - a^2 d\rho), \quad dT = \frac{1}{\alpha \rho a^2} (\kappa dp - a^2 d\rho) \quad (1.8)$$

Уравнения (1.1) — (1.4) вместе с соотношениями (1.8) образуют замкнутую систему. При ее анализе сделаем предположение, что значения всех параметров газа в рассматриваемой области пространства мало отклоняются от соответствующих значений в набегающем потоке. Будем считать невозмущенное течение равномерным установившимся, скорость частиц по величине совпадающей со скоростью звука и направленной вдоль оси x . Значения параметров газа в невозмущенном состоянии отметим звездочкой, а характерную длину в направлении оси x обозначим через L . Относительно возмущений плотности, давления, температуры и скорости звука предположим, что они имеют такой же порядок малости, как и продольная составляющая вектора скорости. Переходя к безразмерным переменным, пишем

$$\begin{aligned} x &= Lx', & r &= \frac{L}{\Delta} r', & v_x &= a_* (1 + \varepsilon v_x'), & v_r &= \varepsilon \Delta a_* v_r' \\ \rho &= \rho_* (1 + \varepsilon \rho'), & p &= p_* (1 + \varepsilon p'), & a &= a_* (1 + \varepsilon a') \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь ε и Δ — числовые параметры, которые по величине значительно меньше единицы. В результате подстановки соотношений (1.9) в систему уравнений (1.1) — (1.4) и (1.8) получаются три безразмерных коэффициента

$$N_{Re1} = \frac{\rho_* a_* L}{\lambda_1}, \quad N_{Re2} = \frac{\rho_* a_* L}{\lambda_2}, \quad N_{Pe} = \frac{\rho_* a_* L c_p}{k}$$

С самого начала будем считать, что обратные величины этих чисел имеют одинаковый порядок и значительно меньше единицы. При выводе приближенных уравнений во всех соотношениях будем удерживать только главные члены, пренебрегая членами, имеющими более высокий порядок малости. Поэтому в уравнениях (1.2) — (1.4) коэффициенты вязкости λ_1 , λ_2 и теплопроводности k можно положить постоянными и равными их значениям в набегающем потоке. Что касается выбора порядка поперечной составляющей вектора скорости в формулах (1.9), то он оправдывается в результате дальнейшего анализа.

После линеаризации уравнения неразрывности получим¹

$$\partial v_x / \partial x + \partial \rho / \partial x = 0$$

Из проекции уравнения Навье — Стокса на ось x следует

$$\partial v_x / \partial x + p_* \rho_*^{-1} a_*^{-2} \partial p / \partial x = 0$$

Интегрирование двух последних уравнений дает формулы

$$p_* \rho_*^{-1} a_*^{-2} p = \rho = -v_x \quad (1.10)$$

которые выражают тот факт, что в рассматриваемом приближении сжатие газа совершается адиабатически и интеграл Бернулли имеет место для всего течения. Полученный вывод является прямым следствием предположения о малости отклонений параметров среды в поле возмущений от соответствующих величин в состоянии равновесия, а также предположения о больших, по сравнению с единицей, значениях чисел Рейнольдса.

¹ Штрихи над безразмерными переменными здесь и в дальнейшем опускаем.

Указанные предположения приводят далее к равенству

$$\frac{\partial v_x}{\partial r} = \frac{\partial v_r}{\partial x} \quad (1.11)$$

следующему из проекции уравнения Навье — Стокса на ось r и формул (1.10) и означающему отсутствие вихрей в потоке. Таким образом, при упрощении трех первых уравнений из системы (1.1) — (1.4) получились выражения, характеризующие движение идеальных сред. Влияние диссипативных факторов необходимо учесть при рассмотрении уравнения переноса тепла. Оно нуждается в предварительном преобразовании с тем, чтобы исключить величины первого порядка малости, связанные с переносом массы и импульса вещества. Переходя в уравнении (1.4) от энтропии и температуры к давлению и плотности при помощи формул (1.8) и комбинируя полученное выражение с уравнениями (1.1) и (1.2), приходим к требуемому соотношению

$$\begin{aligned} v_x \left[(v_x^2 - a^2) \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right] + v_r \left(\frac{\partial p}{\partial r} - a^2 \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) + v_x^2 \left(v_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\rho v_r}{r} \right) = \\ = \frac{\alpha a^2}{c_p} L_1(k, \lambda_1, \lambda_2) - v_x L_2(\lambda_1, \lambda_2) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь через $L_1(k, \lambda_1, \lambda_2)$ обозначена правая часть уравнения (1.4), а через $L_2(\lambda_1, \lambda_2)$ — правая часть уравнения (1.2) без первого члена. Как показывают формулы (1.9), разность $v_x^2 - a^2$ будет пропорциональна параметру ε . В рассматриваемом приближении

$$da = \left(\frac{\partial a}{\partial \rho_*} \right)_s d\rho = \frac{(m_* - 1) a_*}{\rho_*} d\rho \quad \left(m_* = \frac{1}{2\rho_*^3 a_*^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V_*^2} \right)_s, \quad V = \frac{1}{\rho} \right)$$

Воспользовавшись последними соотношениями и подставляя формулы (1.9) в уравнение (1.12), получим

$$2m_* \varepsilon v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - \Delta^2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right) = \frac{1}{N_{Re}} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{N_{Pr}} \right) \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \quad (1.13)$$

Уравнения (1.11) и (1.13) образуют замкнутую систему, причем анализ последнего позволяет выделить различные случаи, которые могут встретиться при изучении трансзвуковых течений вязкого теплопроводящего газа. Фигурирующее в уравнение (1.13) суммарное число Рейнольдса N_{Re} связано с так называемой «продольной вязкостью»

$$\frac{1}{N_{Re}} = \frac{4}{3} \frac{1}{N_{Re1}} + \frac{1}{N_{Re2}}$$

а число Прандтля N_{Pr} есть просто отношение числа Пекле N_{Pe} к числу Рейнольдса N_{Re} . Порядок чисел Пекле и Рейнольдса по предположению одинаков, поэтому число Прандтля будет порядка единицы. Отметим, что члены в уравнении (1.4), связанные с диссипацией энергии за счет вязких напряжений, не влияют на выражение в правой части уравнения (1.13).

Перейдем к полной классификации течений.

1) Пусть все члены в уравнении (1.13) имеют одинаковый порядок величины. Этот случай, по-видимому, впервые рассматривался Липманном, Ашкенасом и Коулом [1], которые при упрощении исходных

уравнений Навье — Стокса стремились сохранить как основные члены, связанные с наличием диссипативных факторов, так и главный нелинейный член, который получается в теории течений идеального газа.

2) Если $\Delta^2 \ll \varepsilon \sim N_{\text{Re}}^{-1}$, то мы имеем

$$2m_* \varepsilon v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{N_{\text{Re}}} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{N_{\text{Pr}}} \right) \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$$

Это уравнение описывает, в частности, структуру ударных волн.

3) Если $\Delta^2 \sim \varepsilon$, а $N_{\text{Re}}^{-1} \ll \varepsilon$, то действием вязкости и теплопроводности можно пренебречь. Полагая для простоты $2m_* \varepsilon = \Delta^2$, приходим к уравнению Кармана [13]

$$-v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad (1.14)$$

4) Пусть, наконец, $\Delta^2 \sim N_{\text{Re}}^{-1}$, а $\varepsilon \ll N_{\text{Re}}^{-1}$. В этом случае нелинейным членом в уравнении (1.13) можно пренебречь по сравнению с остальными. Принимая, что

$$\Delta^2 = \frac{1}{N_{\text{Re}}} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{N_{\text{Pr}}} \right)$$

имеем

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad (1.15)$$

Поскольку соотношение (1.11) является условием существования потенциала скорости, т. е. такой функции $\varphi(x, r)$, дифференциал которой $d\varphi = v_x dx + v_r dr$, уравнению (1.15) можно придать вид

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad (1.16)$$

Уравнение (1.16) имеет параболический тип; до сих пор оно не встречалось ни в физических, ни в технических задачах. Некоторые свойства плоского аналога этого уравнения, в котором отсутствует член $r^{-1} \partial \varphi / \partial r$, были изучены недавно А. А. Дезиным [14, 15]. Основное преимущество уравнения (1.16) по сравнению с уравнением Липмана — Ашкенаса — Коула заключается в его линейности; оно может служить математической моделью для изучения движений вязкого теплопроводящего газа с околосзвуковыми скоростями, если структура потока формируется в основном под влиянием диссипативных факторов.

§ 2. Обтекание конечного тела. Рассмотрим поле скоростей около тела с круглым поперечным сечением, помещенного в звуковой на бесконечности поток.

Асимптотические законы затухания возмущений на больших расстояниях от тела были изучены Гудерлеем, Йошихара и Барришем [8, 9], которые использовали для решения краевой задачи численные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Точное решение этой задачи было дано впоследствии С. В. Фальковичем и И. А. Черновым [10]. Основное предположение, на котором основывались результаты работ [8-10], заключается в том, что газ лишен вязкости и теплопроводности. Однако все реально существующие среды могут проводить тепло, и в них возникают вязкие напряжения. Как правило, влияние диссипативных факторов существенным образом сказывается только в пограничном слое и в вихревом следе за обтекаемым телом, оно же определяет структуру ударных волн. При расчете поля потока вдали от тела принято считать, что влиянием вязкости и теплопроводности можно пренебречь. Если жид-

кость несжимаема, то Финн строго доказал, что в точках, расположенных вне вихревого следа и достаточно удаленных от обтекаемого тела, асимптотика решения уравнений Эйлера служит одновременно и асимптотикой решения уравнений Навье — Стокса. Структура же следа в первом приближении правильно определяется линеаризованными уравнениями Прандтля для пограничного слоя¹.

В совместной работе автора и Г. М. Шефтера было показано, что при исследовании асимптотических законов затухания возмущений, вносимых конечным телом вращения в звуковой на бесконечности поток, влиянием вязкости и теплопроводности пренебречь нельзя [7]. При подстановке найденного в работах [8-10] решения в уравнение (1.13) член, стоящий в его правой части, оказывается по величине бóльшим членов в левой части, если значения координаты r устремить к бесконечности. Поэтому для правильного определения законов затухания возмущений в реальном газе надо пользоваться не системой уравнений Кармана (1.11), (1.14), а выведенной выше системой уравнений (1.11), (1.15) или уравнением третьего порядка (1.16).

В последующем исследовании система уравнений для составляющих скорости потока по координатам оказывается более удобной, чем уравнение для потенциала.

Нетрудно проверить, что система уравнений (1.11), (1.15) инвариантна по отношению к непрерывной двухпараметрической группе преобразований подобия

$$x \rightarrow \alpha x \quad r \rightarrow \alpha^{3/2} r, \quad v_x \rightarrow \alpha^{-3n/2} v_x, \quad v_r \rightarrow \alpha^{-(3n+1)/2} v_r$$

Отсюда следует существование у нее автомодельных решений вида

$$v_x = r^{-n} f(\xi), \quad v_r = r^{-(3n+1)/3} g(\xi), \quad \xi = xr^{-2/3} \quad (2.1)$$

Используя решения (2.1), найдем, как убывают с расстоянием компоненты вектора скорости частиц газа. Задача сводится, очевидно, к отысканию такого значения параметра n , при котором функция $v_r(x, r)$ обращается в нуль вдоль всей оси r , за исключением начала координат $x = r = 0$. В бесконечно удаленных точках потока должны исчезать обе составляющие вектора скорости, что приводит к требованию $n > 0$. Результаты работы [7] показывают, что на самом деле должно выполняться более сильное неравенство $n > 2/3$.

Подстановка формул (2.1) в исходную систему (1.11), (1.15) дает

$$\frac{2}{3} \xi \frac{df}{d\xi} + \frac{dg}{d\xi} = -nf, \quad \frac{d^2f}{d\xi^2} = \frac{2}{3} \xi \frac{dg}{d\xi} + \left(n - \frac{2}{3}\right) g \quad (2.2)$$

Исключив из уравнений (2.2) функцию $g(\xi)$, для $f(\xi)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\frac{d^3f}{d\xi^3} + \frac{4}{9} \xi^2 \frac{d^2f}{d\xi^2} + \frac{4}{3} \left(n + \frac{1}{3}\right) \xi \frac{df}{d\xi} + n^2 f = 0 \quad (2.3)$$

после решения которого величина $g(\xi)$ находится при помощи равенства

$$g = \frac{3}{3n-2} \left(\frac{d^2f}{d\xi^2} + \frac{4}{9} \xi^2 \frac{df}{d\xi} + \frac{2}{3} n \xi f \right) \quad (2.4)$$

При $r \rightarrow 0$ значения автомодельной координаты ξ неограниченно возрастают по абсолютной величине. Напишем асимптотические разложения для трех линейно независимых решений уравнения (2.3) при $|\xi| \rightarrow \infty$.

¹ С результатами Финна можно ознакомиться по его обзорной статье [16].

Первое из них будет

$$f = a_1 |\xi|^{-3n/2} [1 + 27/32 n(n + 2/3)(n + 4/3) \xi^{-3} + \dots] \quad (2.5)$$

Второе из искомым решений возьмем в виде

$$f = a_2 |\xi|^{-3n/2} \ln |\xi| + \dots \quad (2.6)$$

а третье линейно независимое решение уравнения (2.3) запишем как

$$f = a_3 |\xi|^{3(n-1)} \exp(-4/27 \xi^3) + \dots \quad (2.7)$$

Используя равенства (2.1) и (2.4), легко видеть, что соответствующие формуле (2.5) асимптотические разложения функций $v_x(x, r)$ и $v_r(x, r)$ при $r \rightarrow 0$ начинаются с членов

$$v_x = a_1 |x|^{-3n/2} + \dots, \quad v_r = -9/8 n(n + 2/3) a_1 |x|^{-(3n+4)/2} r + \dots$$

Продольная составляющая возмущенной скорости потока, вычисленная по решению (2.6), обращается в бесконечность как $\ln r$, а поперечная составляющая — как $1/r$. Что касается решения (2.7), то оно дает выражения для обеих составляющих скорости частиц газа, которые содержат общий множитель $\exp(-4x^3/27r^2)$. Поэтому использование решения (2.7) при отрицательных значениях x оказывается невозможным, наоборот, при положительных значениях x соответствующие ему возмущения чрезвычайно быстро затухают при приближении к оси симметрии.

Полученные результаты позволяют сформулировать задачу на собственные значения для обыкновенного линейного дифференциального уравнения (2.3): требуется найти значение параметра n , при котором интеграл этого уравнения определяется разложением (2.5), когда $\xi \rightarrow -\infty$, и удовлетворяет условию

$$\frac{3n-2}{3} |\xi|^{(3n-2)/2} g(\xi) \rightarrow 0 \quad (2.8)$$

если $\xi \rightarrow +\infty$. Условие (2.8) эквивалентно требованию обращения в нуль постоянной a_2 в разложении (2.6).

Первое собственное значение n равно $4/3$. Убедиться в сделанном утверждении можно простой проверкой. В этом случае второе из исходных уравнений (2.2) интегрируется

$$df/d\xi = 2/3 \xi g + b$$

Постоянную b необходимо положить равной нулю, чтобы удовлетворить условию (2.8). Для функции $f(\xi)$ получаем

$$\xi \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \left(\frac{4}{9} \xi^3 - 1 \right) \frac{df}{d\xi} + \frac{8}{9} \xi^2 f = 0 \quad (2.9)$$

Из этого дифференциального уравнения посредством дифференцирования получается (2.3). Асимптотическое разложение для первого линейно независимого решения написанного уравнения при $|\xi| \rightarrow \infty$ дается формулой (2.5), для второго — формулой (2.7). Поскольку логарифмическое разложение (2.6) обращается в бесконечность, а экспоненциальное разложение (2.7) затухает, то

рифмические члены в асимптотических разложениях обоих решений отсутствуют, то равенство $n = 4/3$ действительно позволяет получить решение сформулированной выше краевой задачи. Чтобы найти точное выражение первой собственной функции, в уравнении (2.9) совершим замену независимой переменной $\eta = -4/27\xi^3$, в результате чего имеем

$$\eta \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \left(\frac{1}{3} - \eta\right) \frac{df}{d\eta} - \frac{2}{3} f = 0 \quad (2.10)$$

Полученное уравнение представляет собой канонический вид так называемого конфлюэнтного гипергеометрического уравнения [17]. Используя стандартные обозначения для конфлюэнтных гипергеометрических функций, для его общего решения имеем

$$f = c_1 \Phi\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \eta\right) + c_2 \eta^{1/3} \Phi\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \eta\right) \quad (2.11)$$

Остается найти связь между постоянными c_1 и c_2 . Для этой цели воспользуемся асимптотическим представлением гипергеометрических функций при $\eta \rightarrow +\infty$. Имеем [17]

$$f = \eta^{1/3} e^\eta G\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}; \eta\right) \left[\frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(2/3)} c_1 + \frac{\Gamma(5/3)}{\Gamma(4/3)} c_2 \right] + \dots$$

где Γ означает гамма-функцию Эйлера, а $G(-1/3, 1/3; \eta)$ — ряд по обратным степеням η , причем $G(-1/3, 1/3; \eta) \rightarrow 1$ при $\eta \rightarrow +\infty$. Чтобы получить решение, стремящееся на бесконечности к нулю, необходимо положить

$$\frac{c_2}{c_1} = - \frac{\Gamma(1/3) \Gamma(4/3)}{\Gamma(2/3) \Gamma(5/3)} = - \frac{\Gamma^2(1/3)}{2\Gamma^2(2/3)}$$

Теперь формула (2.11) преобразуется к виду

$$f = c_1 \left[\Phi\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \eta\right) - \frac{\Gamma^2(1/3)}{2\Gamma^2(2/3)} \eta^{2/3} \Phi\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \eta\right) \right] \quad (2.12)$$

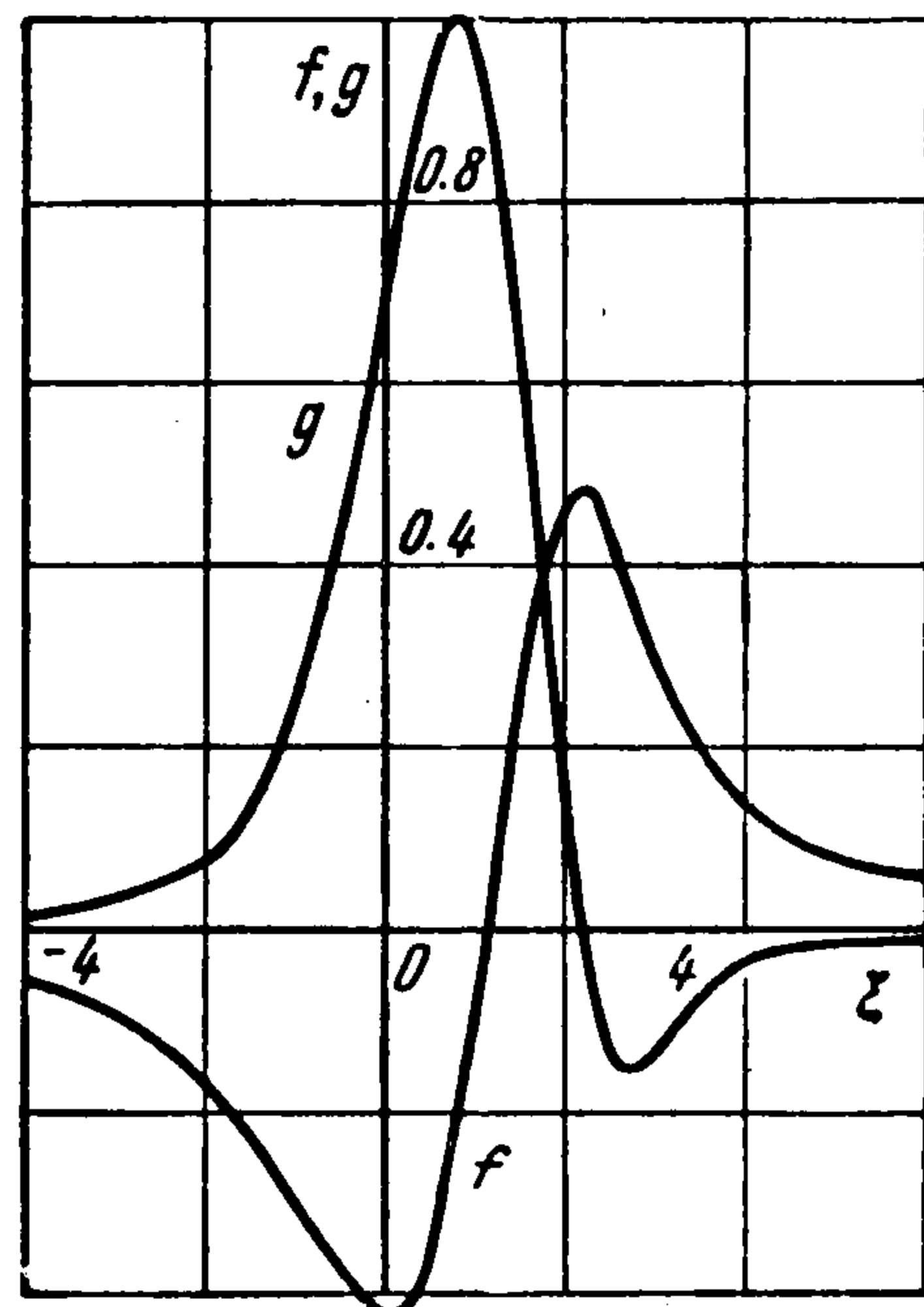
Заключенная в квадратные скобки линейная комбинация гипергеометрических функций пропорциональна так называемой Ψ -функции [17], отсюда при $\eta \rightarrow +\infty$ и $\xi \rightarrow -\infty$ выводим

$$f = 3 \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} c_1 \eta^{-2/3} + \dots = \frac{27\Gamma(2/3)}{2\sqrt[3]{2} \Gamma(1/3)} c_1 \xi^{-2} + \dots \quad (2.13)$$

Воспользовавшись асимптотическим разложением гипергеометрических функций для больших отрицательных значений аргумента [17], находим вид решения (2.12) при $\eta \rightarrow -\infty$ и $\xi \rightarrow +\infty$

$$f = -\frac{2}{3} \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(2/3)} c_1 \eta^{-2/3} + \dots = -\frac{3\Gamma(1/3)}{\sqrt[3]{2} \Gamma(2/3)} c_1 \xi^{-2} \quad (2.14)$$

График функции $f(\xi)$, характеризующий изменение скорости частиц газа вдоль линий тока, показан на фиг. 1. В вычислениях было принято $c_1 = -2\sqrt[3]{2} \Gamma(1/3) [27\Gamma(2/3)]^{-1}$.



Фиг. 1

В рассматриваемом приближении $v_x \sim M - 1$, где буква M означает местное число Маха, откуда $f(\xi) \sim r^{4/3}(M - 1)$. Введем еще угол ϑ наклона вектора скорости к оси x . Функция $g(\xi) \sim r^{5/3}\vartheta$, ее график также приведен на фиг. 1. В согласии с формулами (2.13) и (2.14) функция $f(\xi)$ проходит один раз через нуль и имеет разные знаки при $\xi \rightarrow -\infty$ и $\xi \rightarrow +\infty$. Что касается функции $g(\xi)$, то она также имеет разные знаки при больших отрицательных и положительных значениях аргумента, но в то время как ее максимальное значение равно 1,01, минимальное значение равно всего -0.16 . Точное выражение для $g(\xi)$ можно найти при помощи правила дифференцирования конфлюентных гипергеометрических функций [17]

$$g = 2 \sqrt{2} c_1 \left[\eta^{1/3} \Phi \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}; \eta \right) - \frac{\Gamma^2(1/3)}{6\Gamma^2(2/3)} \Phi \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}; \eta \right) \right] \quad (2.15)$$

Сравним построенное решение с решением аналогичной задачи для течения идеального газа, которое было изучено Гудерлеем, Йошихара и Баришем [8, 9], С. В. Фальковичем и И. А. Черновым [10]. Как видно из фиг. 1 и формул (2.1), ширина l зоны, где значения параметров газа заметно отклоняются от их значений в набегающем потоке, пропорциональна $r^{2/3}$. Разность между местным числом Маха M и единицей обратно пропорциональна $r^{4/3}$, а угол ϑ наклона вектора скорости к оси симметрии потока обратно пропорционален $r^{5/3}$. Если же коэффициенты вязкости и теплопроводности равны нулю, то из решения уравнений Кармана (1.11), (1.14) следует [8-10], что $l \sim r^{4/3}$, $M - 1 \sim r^{-9/7}$ и $\vartheta \sim r^{-9/7}$. Таким образом, влияние диссипативных факторов влечет за собой существенное размывание области, где сосредоточены возмущения, и более быстрое затухание всех параметров при удалении на большое расстояние от обтекаемого тела. Движение реального газа получается без скачка уплотнения, оно имеет непрерывный характер.

§ 3. Задача о полутелах. Построенное решение имеет наглядную интерпретацию, а именно, оно представляет возмущения, которые вносит в звуковой на бесконечности поток реального газа источник, помещенный в начало координат. Как известно, точно таким же образом может быть интерпретировано решение, описывающее обтекание конечного тела вращения потоком несжимаемой жидкости [11]. Чтобы убедиться в этом, напишем выражение для расхода Q газа, протекающего через контрольную цилиндрическую поверхность радиуса Lr/Δ

$$Q = 2\pi \varepsilon r_* a_* L^2 r \int_{-\infty}^{+\infty} v_r dx = 2\pi \varepsilon r_* a_* L^2 \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) d\xi = \text{const}$$

при любых значениях r . Из вида графика функции $g(\xi)$ сразу ясно, что $Q \neq 0$. Таким образом, в построенном выше решении автоматически учитывается образование вихревого следа позади обтекаемого тела.

Пусть теперь обтекается не конечное тело вращения, а простирающееся до бесконечности полутело, образующая которого в размерных переменных задана уравнением

$$R = \varepsilon^{1/2} LA \left(\frac{x}{L} \right)^k, \quad x \geq 0 \quad (3.1)$$

Стенками полутела могут, в частности, служить внешние границы пограничного слоя или вихревого следа. Воспользовавшись формулами (1.9) и опуская, как обычно, штрихи над безразмерными переменными, представим краевое условие на рассматриваемом полутеле в виде

$$\lim r v_r = k A^2 x^{2k-1} \quad \text{при } r \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

Нетрудно проверить, что поставленная задача автомодельна и ее решение дается формулами (2.1), но удовлетворить условию (3.2) можно, если только воспользоваться интегралом (2.6) уравнения (2.3), согласно которому вблизи оси симметрии

$$v_r = \frac{4a_2}{3(3n-2)} x^{-(3n-2)/2} r^{-1} + \dots \quad (3.3)$$

Сравнение формул (3.2) и (3.3) дает связь между показателями степеней n и k

$$n = -\frac{2}{3}(k - 1)$$

Отсюда следует, что при $k = 0$ показатель автомодельности $n = \frac{4}{3}$. Полученный результат представляется естественным, так как при $k = 0$ задача об обтекании полутела, определяемого уравнением (3.1), эквивалентна задаче о возмущении равномерного потока источником, имеющим конечную интенсивность.

Как показано в работе [7], влиянием вязкости и теплопроводности можно пренебречь, если в уравнении образующей полутела $\frac{1}{2} < k \leq 1$. Тогда расчет обтекания должен вестись на основании системы уравнений Кармана. При $k = \frac{1}{2}$ воздействие диссипативных факторов можно не принимать во внимание, если численное значение постоянной A в формуле (3.1) значительно больше единицы; наоборот, когда $A \ll 1$, влияние вязкости и теплопроводности получается существенным. Решение полной системы уравнений Липманна — Апкенаса — Коула определяет поле возмущений только при $k = \frac{1}{2}$ и значениях постоянной A , не слишком отличающихся от единицы. При $0 \leq k < \frac{1}{2}$ задача об обтекании простирающегося до бесконечности полутела должна решаться на основании выведенных нами уравнений (1.14), (1.15), так как в этом случае структура потока формируется в основном под воздействием вязкости и теплопроводности.

Отметим, что малый параметр ε в соотношениях (1.9) вводится при помощи уравнения (3.1), задающего форму обтекаемого полутела. При $k = 0$ и $n = \frac{4}{3}$ параметр ε может быть выражен через интенсивность Q источника, моделирующего конечное тело вращения вместе с образующимся за ним вихревым следом. В последнем случае значительно удобней связать величину ε с силой сопротивления, действующей на тело в звуковом потоке.

Силу сопротивления F_x можно получить, вычислив составляющую импульса вдоль оси x , уносимую возмущениями в единицу времени через контрольную цилиндрическую поверхность радиуса Lr/Δ . Плотность потока x — компонента импульса через рассматриваемую поверхность можно приближенно представить в виде

$$P_{xr} = \rho_* a_*^2 L^2 \varepsilon \Delta \left[v_r - \frac{1}{N_{Re1}} \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) \right] \quad (3.4)$$

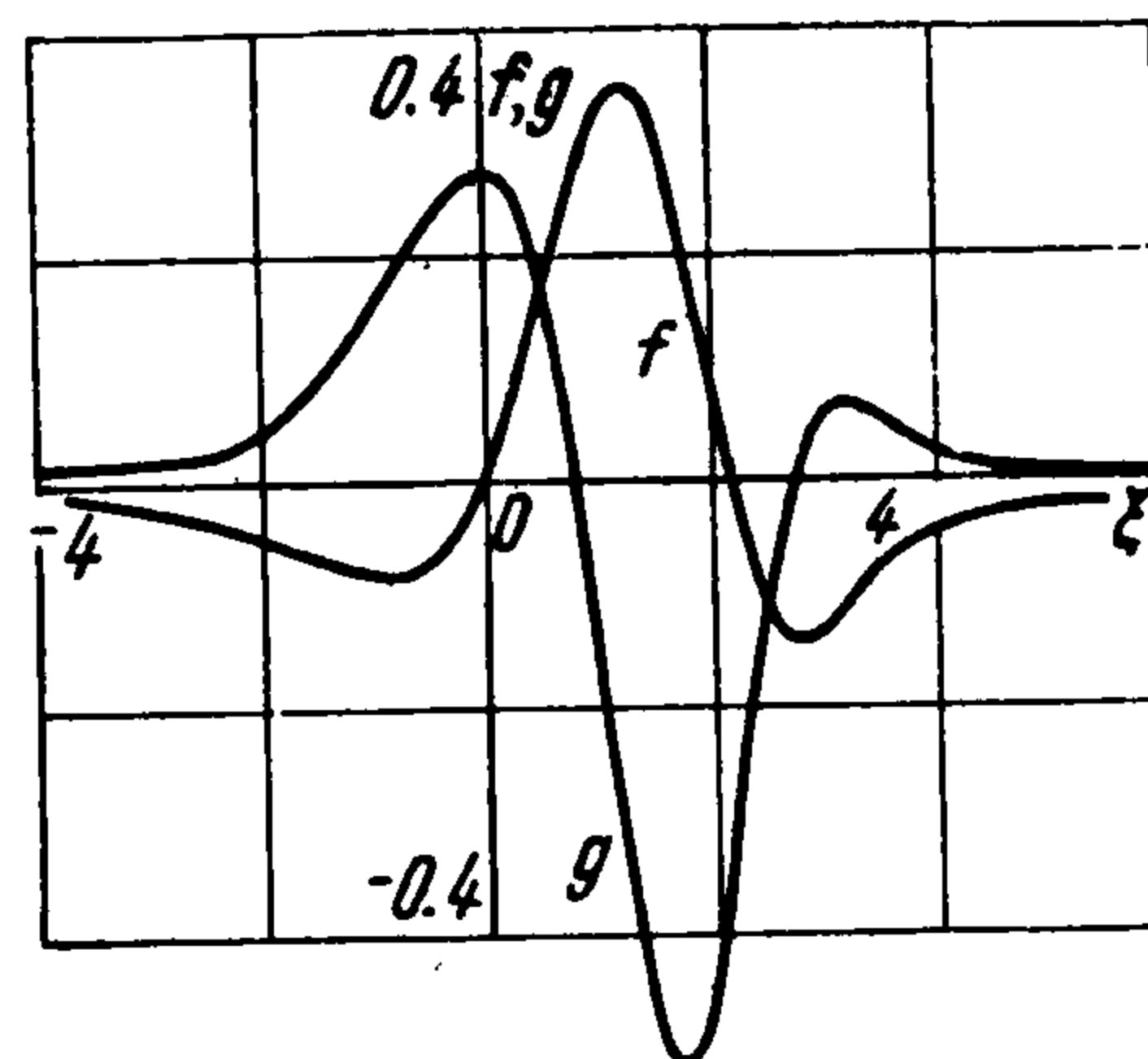
Как видно из формулы (3.4), необратимый перенос импульса из мест с большей в места с меньшей скоростью значительно уступает по величине обратному переносу импульса, который связан с механическим передвижением частиц газа. Пренебрегая в правой части формулы (3.4) членом, пропорциональным N_{Re1}^{-1} , получим

$$F_x = 2\pi \varepsilon \rho_* a_*^2 L^2 r \int_{-\infty}^{+\infty} v_r dx = a_* Q$$

Частные производные $\partial v_x / \partial x$ и $\partial v_r / \partial x$ удовлетворяют той же системе уравнений (1.11), (1.15), что и сами составляющие скорости частиц. Обозначим через $v_{x,n}(x, r)$ и $v_{r,n}(x, r)$ общие функции, которые имеют вид (2.1) с параметром n и зависят от трех произвольных постоянных. При дифференцировании выражений (2.1) по x получаются функции со степенью однородности на $\frac{2}{3}$ больше, чем у исходных, т. е.

$$v_{x, n+\frac{2}{3}} = \frac{\partial v_{x,n}}{\partial x}, \quad v_{r, n+\frac{2}{3}} = \frac{\partial v_{r,n}}{\partial x}$$

Этим замечанием можно воспользоваться, чтобы получить весь спектр собственных значений и соответствующих собственных функций в краевой задаче об отыскании такого решения уравнения (2.3), которое при $\xi \rightarrow -\infty$ дается разложением (2.5), а при $\xi \rightarrow +\infty$ удовлетворяет условию (2.8).



Фиг. 2

Очевидно, краевые условия задачи будут удовлетворены, если взять

$$n = \frac{2}{3}(2 + N), \quad f_n = \frac{d^N f_{4/3}^0}{d\xi^N}, \quad g_n = \frac{d^N g_{4/3}^0}{d\xi^N} \quad (N = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.5)$$

где под $f_{4/3}^0(\xi)$ следует понимать интеграл (2.12) уравнения (2.3), содержащий одну произвольную постоянную, а под $g_{4/3}^0(\xi)$ — соответствующую ему функцию (2.15).

Как показывает первое из равенств (3.5), следующее за $4/3$ собственное значение n равно 2. Соответствующие ему собственные функции $f(\xi)$ и $g(\xi)$ изображены на фиг. 2, причем было принято, что в разложении (2.5) постоянная $a_1 = -1$. Когда в формулах (2.1) величина $n = 2$, то поле скоростей получается таким же, как при обтекании диполя. Действительно, в этом случае момент

$$r \int_{-\infty}^{+\infty} x v_r dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi g(\xi) d\xi = \text{const}$$

для любого значения радиуса r . Последнее утверждение можно получить также непосредственно, рассматривая в качестве интеграла системы уравнений (1.11), (1.15) линейную комбинацию из решений, которые соответствуют источнику и стоку, имеющим равную интенсивность Q и помещенным на оси r на расстоянии x_0 друг от друга. Выполняя предельный переход при $x_0 \rightarrow 0$, $Q \rightarrow \infty$ и $x_0 Q = \text{const}$, приходим к решению (3.5) с $N = 1$.

Поступила 21 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилтон У. Ф. Аэродинамика больших скоростей. Изд. иностр. лит., М., 1955.
2. Sternberg J. Triple-Shock Wave Intersections. Phys. Fluids, 1959, vol. 2, No. 2.
3. Sichel M. Leading Edge of a Shock — Induced Boundary Layer. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 10.
4. Sichel M. Structure of Weak Non-Hugoniot Shocks. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 5.
5. Szaniawsky A. Equations of transonic flow of a heat conducting fluid. Arch. Mech. Stosowanej, 1962, vol. 14, No. 6.
6. Szaniawsky A. Transonic approximation to the equations of flow. Arch. Mech. Stosowanej, 1963, vol. 15, No. 6.
7. Рыжов О. С., Шефтер Г. М. О влиянии вязкости и теплопроводности на структуру сжимаемых течений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6.
8. Guderley K., Yoshihara H. An Axial-Symmetric Transonic Flow Patterns. Quart. Appl. Math., 1951, vol. 8, No. 4.
9. Varish D. T., Guderley K. G. Asymptotic Forms of Shock Waves in Flows over Symmetrical Bodies at Mach 1. J. Aeronaut. Sci., 1953, vol. 20, No. 7.
10. Фалькович С. В., Чернов И. А. Обтекание тела вращения звуковым потоком газа. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1954.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Изд. «Наука», М., 1964.
13. Kármán Th. The Similarity Law of Transonic Flow. J. Math. and Phys., 1947, vol. 26, No. 3.
14. Дезин А. А. Корректная граничная задача для некоторых неклассических операторов. Докл. АН СССР, 1958, т. 123, № 4.
15. Дезин А. А. Теоремы существования и единственности решений граничных задач для уравнений с частными производными в функциональных пространствах. Успехи матем. наук, 1959, т. 14, № 3(87).
16. Finn R. On the Stokes Paradox and related questions. Nonlinear Problems, edit. by R. E. Langer. The University of Wisconsin Press, Madison, 1963.
17. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. Higher Transcendental Functions, vol. 1. McGraw-Hill, N. Y.—Toronto—L., 1953.