ЛОКАЛЬНО-МАКСВЕЛЛОВСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

О. Г. Фридлендер (Москва)

Кинетическое уравнение Больцмана [1]

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\xi_i\frac{\partial f}{\partial x_i}+g_i\frac{\partial f}{\partial \xi_i}=J \tag{1}$$

является сложным интегро-дифференциальным уравнением. В настоящее время для этого уравнения решается лишь очень ограниченный класс задач. Поэтому представляют интерес даже весьма вырожденные решения этого сложного уравнения. Простейшими точными решениями являются решения, обращающие в нуль интеграл столкновений J. Это,— так называемые, локально-максвелловские решения

$$f=\rho\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mc^2}{2kT}\right)\qquad (\mathbf{c}=\boldsymbol{\xi}-\mathbf{u}) \tag{2}$$

Еще Максвелл [1-3] получил стационарные решения типа (2) уравнения (1), т. е. решения, удовлетворяющие условию $\partial f\,/\,\partial t=0$. Грэд [4] в 1949 г. нашел все локально-максвелловские решения уравнения Больцмана в случае отсутствия внешних сил, т. е. при условии $g_i=0$. Покажем, каким условиям должны удовлетворять внешние поля, для того чтобы существовали решения вида (2) уравнения (1), и какие решения возможны в этих полях.

Локально-максвелловские функции можно представить в виде, несколько отличном от (2),

$$\ln f=\gamma_0+\gamma_i\xi_i+\gamma_4\xi^2 \tag{3}$$

Связь между параметрами, входящими в выражения (2) и (3), такова:

$$2\frac{kT}{m}=-\frac{1}{\gamma_4},\qquad u_i=-\frac{\gamma_i}{2\gamma_4},\qquad \ln\rho\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}=\gamma_0-\frac{\gamma^2}{4\gamma_4} \tag{4}$$

Подставив (3) в (1), поделенное предварительно на f, и приравняв нулю коэффициенты при различных степенях ξ_i, получим систему уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial\gamma_0}{\partial t}+g_i\gamma_i=0,\qquad \frac{\partial\gamma_i}{\partial t}+2\gamma_4 g_i+\frac{\partial\gamma_0}{\partial x_i}=0\\ \frac{\partial\gamma_4}{\partial t}\delta_{ij}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\gamma_j}{\partial x_i}\right)=0,\qquad \frac{\partial\gamma_4}{\partial x_i}=0\end{gathered} \tag{5}$$

Прежде всего заметим, что, подставив сюда выражения (4), нетрудно показать эквивалентность этой системы уравнений системе уравнений Эйлера и дополнительным условиям равенства нулю тензора напряжений и градиента температуры. Иными словами, решения уравнений Эйлера, являющиеся одновременно решениями уравнений Навье — Стокса, определяют такую локально-максвелловскую функцию распределения, которая удовлетворяет уравнению Больцмана.

Рассмотрим решения системы уравнений (5). Дифференцируя третье уравнение этой системы по x_k и прибавляя и вычитая из найденного выражения равенства, полученные из него циклической перестановкой индексов, найдем

$$\frac{\partial^2\gamma_i}{\partial x_j\partial x_k}=0$$

Следовательно

$$\gamma_i(\mathbf{x},t)=a_i(t)+b_{ij}(t)\,x_j \tag{6}$$

Подставляя (6) в то же уравнение, получим, что

$$b_{ij}(t)=\begin{cases}-b_{ji} & \text{при } i\neq j\\ -\partial\gamma_4/\partial t & \text{при } i=j\end{cases}$$

[1] Здесь и дальше подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Значит, соотношение (6) можно записать в форме [1]

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(t) - \gamma_4^{\boldsymbol{\cdot}}(t)\mathbf{x} + [\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{x}] \tag{7}$$

Равенство (7) означает, что движение газа есть суперпозиция трех движений: вращения как твердого тела, радиального расширения и поступательного движения.

Упростим теперь уравнения, определяющие γ_0 и $\mathbf{g}$. Запишем первые два уравнения системы (5) в векторном виде

$$\frac{\partial \gamma_0}{\partial t} + (\mathbf{g}, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial t} + 2\gamma_4 \mathbf{g} + \operatorname{grad} \gamma_0 = 0 \tag{8}$$

Применив к последнему уравнению оператор ротора, подставив туда выражение (7) и предполагая конечность температуры, получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\cdot}}(t)}{\gamma_4(t)} \quad \text{или} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{grad} \Psi(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2}\left[\frac{\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\cdot}}(t)}{\gamma_4(t)} \times \mathbf{x}\right] \tag{9}$$

Подставив (9) во второе уравнение системы (8), получим

$$\operatorname{grad}(2\gamma_4(t)\Psi(\mathbf{x}, t) + \gamma_0(\mathbf{x}, t)) = \gamma_4^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}(t)\,\mathbf{x} - \mathbf{a}^{\boldsymbol{\cdot}}(t)$$

интегрируя, найдем

$$\gamma_0(\mathbf{x}, t) = -2\gamma_4(t)\Psi(\mathbf{x}, t) + 0.5\gamma_4^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}(t)x^2 - (\mathbf{a}^{\boldsymbol{\cdot}}(t), \mathbf{x}) + b(t) \tag{10}$$

где $b(t)$ — произвольная функция. Подставляя (10) в первое уравнение (8), имеем

$$-2\gamma_4 \frac{\partial \Psi}{\partial t} + (\operatorname{grad} \Psi, \boldsymbol{\gamma}) = 2\gamma_4^{\boldsymbol{\cdot}}\Psi - 0.5\gamma_4^{\boldsymbol{\cdot\cdot\cdot}}x^2 + (\mathbf{a}^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}, \mathbf{x}) - b^{\boldsymbol{\cdot}}(t) + 0.5\left(\left[\frac{\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\cdot}}}{\gamma_4} \times \mathbf{x}\right], \boldsymbol{\gamma}\right) \tag{11}$$

Здесь $\boldsymbol{\gamma}$ определяется выражением (7).

Итак, плотность, скорость и температура определяются выражениями (4), (7), (10) и последним уравнением системы (5), а вид потенциала, совместного с локально-максвелловскими течениями, и связь между потенциалом и параметрами, определяющими ρ, $\mathbf{u}$, T, находятся из уравнения (11). Уравнение (11) — линейное с частными производными первого порядка. Общее решение его есть сумма частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$. Здесь Ψ_1 — частное решение неоднородного уравнения (11), имеющее вид

$$\Psi_1(\mathbf{x}, t) = p_{ij}(t)x_i x_j + g_i(t)x_i + r(t) \tag{12}$$

Связь между p_{ij}, g_i, r и параметрами движения $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{a}$, γ_4, b найдем, подставив (12) в (11) и приравняв нулю коэффициенты при различных степенях x_i. Заметим, что из десяти коэффициентов, определяющих Ψ_1, только восемь независимы; Ψ_2 — общее решение уравнения

$$-2\gamma_4 \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + (\operatorname{grad} \Psi_2, \boldsymbol{\gamma}) = 2\gamma_4^{\boldsymbol{\cdot}}\Psi_2 \tag{13}$$

Из теории уравнений первого порядка следует, что Ψ_2 определяется из уравнения $V(c_1, c_2, c_3, c_4) = 0$, где V — произвольная функция, а c_1, c_2, c_3, c_4 — первые интегралы характеристической системы уравнения (13)

$$\frac{dx_1}{\gamma_1} = \frac{dx_2}{\gamma_2} = \frac{dx_3}{\gamma_3} = \frac{dt}{-2\gamma_4} = \frac{d\Psi_2}{2\gamma_4^{\boldsymbol{\cdot}}\Psi_2} \tag{14}$$

Следовательно, Ψ_2 имеет вид $\Psi_2 = \gamma_4^{-1}\Psi_3(c_5, c_6, c_7)$, где Ψ_3 — произвольная функция первых интегралов системы (14) с отброшенным последним уравнением. Это значит, что Ψ_3 сохраняется на некоторых линиях в четырехмерном пространстве $(\mathbf{x}, t)$, которые являются траекториями точек, обладающих скоростями $(\boldsymbol{\gamma}, -2\gamma_4)$ в этом пространстве.

Итак, в случае внешних сил, зависящих от координат и времени, локально-максвелловское течение может осуществляться, только если силы состоят из двух членов: потенциального и вихревого; второй член имеет вид $[\boldsymbol{\sigma}(t) \times \mathbf{x}]$, где функция $\boldsymbol{\sigma}(t)$ харак-

[1] Точки над буквами означают, как обычно, дифференцирование по времени.

теризует связь между температурой и угловым ускорением. Потенциал же не есть произвольная функция координат и времени, а определяется произвольным образом только тремя независимыми параметрами. Сами эти параметры находятся из системы (14). Параметры движения, как указывалось, определяются из уравнения (11).

В качестве примера рассмотрим случай радиального расширения, т. е. случай, когда $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = 0$. Тогда $\gamma = -\gamma_4^{\cdot}\mathbf{x}$, и система (14) превращается в

$$\frac{dx_1}{-\gamma_4^{\cdot}x_1} = \frac{dx_2}{-\gamma_4^{\cdot}x_2} = \frac{dx_3}{-\gamma_4^{\cdot}x_3} = \frac{dt}{-2\gamma_4} = \frac{d\Psi_2}{2\gamma_4^{\cdot}\Psi_2}$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{\gamma_4(t)} \Psi_3 \left(\frac{x^2}{\gamma_4(t)}, \frac{x_1}{x_2}, \frac{x_1}{x_3}\right)$$

где Ψ_3 — произвольная функция. Функция Ψ_1 в этом примере равна

$$\Psi_1 = \frac{\gamma_4^{\cdots}}{8\gamma_4^{\cdot} + 4\gamma_4} x^2$$

Это значит, что с локально-максвелловским решением уравнения Больцмана совместен только потенциал, имеющий вид

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = f(t)x^2 + \frac{1}{\varphi(t)} \Phi \left(\frac{x^2}{\varphi(t)}, \frac{x_1}{x_2}, \frac{x_1}{x_3}\right)$$

где φ — отрицательная, а Φ — произвольная функция, а f определяется как

$$f(t) = \frac{\varphi^{\cdots}}{8\varphi^{\cdot} + 4\varphi}$$

Итак, видим, что потенциал в этом случае можно задавать произвольной функцией только трех параметров: двух угловых переменных и либо времени, либо радиуса. Если зададим Ψ как функцию времени, то тем самым определится зависимость от радиуса и, наоборот, задавая Ψ функцией координат, определяем изменение потенциала во времени. При заданном потенциале для температуры, скорости и плотности имеем

$$2\frac{kT}{m} = -\frac{1}{\varphi(t)}, \qquad \mathbf{u} = -\frac{\varphi^{\cdot}(t)}{2\varphi(t)}\mathbf{x}$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \left(-\frac{\pi}{\varphi(t)}\right)^{3/2} \exp\left[-2\varphi(t)\Psi(\mathbf{x}, t) + 0.5\varphi^{\cdot\cdot}(t)x^2 - \frac{\varphi^{\cdot 2}(t)x^2}{4\varphi(t)}\right]$$

До сих пор рассматривался случай, когда внешние силы задавались функциями координат и времени. Прежде чем рассмотреть более узкий класс решений при $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ заметим, что случай $\Psi = \Psi(t)$ полностью эквивалентен случаю $\Psi = 0$. Действительно, из уравнения (11) сразу видим, что $\boldsymbol{\omega}^{\cdot} = 0$, т. е. $\mathbf{g} = 0$, и, следовательно, параметры движения не зависят от потенциала.

Рассмотрим теперь более подробно случай $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ и покажем, что в этом случае задачу нахождения вида внешних сил и течений, определяемых этими силами, можно решить до конца. Так как $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, то (9) примет вид

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \operatorname{grad} \Psi(\mathbf{x}) - 0.5\,[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}] \qquad (\boldsymbol{\Omega} \text{ — постоянный вектор})$$

И, следовательно,

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \Gamma(t)\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_0 \qquad (\Gamma(t) \text{ — первообразная } \gamma_4(t))$$

Уравнение (11) примет вид

$$(\operatorname{grad} \Psi, \gamma) = 2\gamma_4^{\cdot}\,\Psi - 0.5\gamma_4^{\cdots}x^2 + (\mathbf{a}^{\cdot\cdot}, \mathbf{x}) - b^{\cdot} + 0.5\Gamma(t)\,|\,[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}]\,|^2 + \\ + 0.5\,([\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}], \mathbf{a} + [\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{x}]) \tag{15}$$

Случай $\Psi = \text{const}$, как было сказано, полностью эквивалентен случаю $\Psi = 0$. При этом

$$\mathbf{a}^{\cdot\cdot} = \boldsymbol{\Omega} = 0, \qquad \gamma_4^{\cdots} = 0$$

т. е. получаем решения Грэда [4]. Пусть $\Psi \not\equiv 0$ и $\boldsymbol{\omega}_0 \neq 0$, тогда (так как $\Gamma^{\cdot} = \gamma_4 \neq 0$)

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{a}^{\cdot} = 0, \qquad \gamma_4^{\cdot\cdot} = b^{\cdot\cdot} = 0$$

и имеем

$$(\text{grad}\,\Psi, \gamma) = 2\gamma_4^{\cdot}\Psi, \qquad \gamma = \mathbf{a} - \gamma_4\mathbf{x} + [\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{x}] = \mathbf{a} + A\mathbf{x} \tag{16}$$

Здесь A — постоянная матрица. Функцию Ψ определим из характеристической системы

$$\frac{dx_1}{\gamma_1} = \frac{dx_2}{\gamma_2} = \frac{dx_3}{\gamma_3} = \frac{d\Psi}{2\gamma_4^{\cdot}\Psi} \tag{17}$$

Перейдя к новой переменной $\mathbf{y} = \mathbf{x} + A^{-1}\mathbf{a}$, а затем к системе координат, в которой одна из осей направлена вдоль постоянного вектора $\boldsymbol{\omega}_0$, сведем систему (17) к

$$\frac{dz_i}{\gamma_i'} = \frac{dz_1}{-\gamma_4^{\cdot}z_1 - \omega_0 z_2} = \frac{dz_2}{-\gamma_4^{\cdot}z_2 + \omega_0 z_1} = \frac{dz_3}{-\gamma_4^{\cdot}z_3} = \frac{d\Psi}{2\gamma_4^{\cdot}\Psi} \tag{18}$$

Тогда

$$\Psi = z_3^{-2}\Psi_3 \tag{19}$$

где Ψ_3 удовлетворяет уравнению $(\text{grad}\,\Psi_3, \gamma') = 0$, т. е. Ψ_3 постоянно вдоль траектории точки, движущейся со скоростью γ'. Иначе говоря, Ψ_3 есть произвольная функция первых интегралов первых двух уравнений системы (18). Эти интегралы есть

$$\frac{z_3^2}{z_1^2 + z_2^2} = c_1, \qquad \frac{\gamma_4^{\cdot}}{\omega_0}\,\text{arctg}\,\frac{1}{2}\left(\frac{z_2}{z_1} - \frac{z_1}{z_2}\right) - \ln|z_1^2 + z_2^2| = c_2$$

Итак, в этом случае ($\Psi(\mathbf{x}) \not\equiv \text{const}$, $\boldsymbol{\omega}_0 \neq 0$) γ — постоянно, а γ_4 и γ_0 меняются линейно по времени. Зависимость от координат дается выражениями (16) и (10). Если положим $\gamma_4^{\cdot} = 0$, то получим решения Максвелла [1, 2].

Если $\boldsymbol{\omega}_0 = 0$, то все коэффициенты в уравнении (15), зависящие от времени, должны быть пропорциональны друг другу

$$\gamma_4^{\cdot\cdot\cdot}(t) = -\frac{\gamma_4^{\cdot}(t)}{\gamma} = \frac{b^{\cdot}(t)}{\beta} = \frac{a_i(t)}{\alpha_i}$$

(из условия конечности массы получаем $\gamma > 0$). Тогда потенциал определится как $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$, где

$$\Psi_1 = p_{ij}x_ix_j + q_ix_i + r$$

(теперь p_{ij}, q_i и r — уже константы), а Ψ_2 определяется из уравнения

$$(\text{grad}\,\Psi_2, \boldsymbol{\alpha} + \gamma\mathbf{x} + \gamma^2[\Omega \times \mathbf{x}]) = -2\gamma\Psi_2$$

Функцию Ψ_2 в этом случае находим так же, как находили Ψ_2 в случае $\boldsymbol{\omega}_0 \neq 0$.

Итак, при $\boldsymbol{\omega}_0 = 0$, т. е. при отсутствии постоянной составляющей вращения, возможны колебательные решения для γ_4, γ и γ_0. Плотность, скорость и температура попрежнему находятся из выражений (4).

Подведем итог: в случае внешних полей сил, не зависящих от времени, можно определить их вид и найти течения, существующие в этих полях. Решения разделяются на два класса: при наличии постоянного вращения газа параметры γ_4 и γ_0 линейны во времени; в отсутствие постоянной составляющей угловой скорости возможны колебательные решения для γ, γ_4, и γ_0.

Выкладки можно значительно упростить, если рассмотреть отдельно поступательное движение, радиальное расширение или вращение газа как твердого тела.

В заключение благодарю М. Н. Когана за постановку задачи и обсуждение.

Поступила 18 II 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Maxwell J. C. The kinetic theory of gases. Nature, 1877, vol. 16, p. 242.
2. Maxwell J. C. On the final state of a system of molecules in motion subject to forces of any kind. Nature, 1873, vol. 8, p. 537.
3. Чепмен С. и Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. Изд. иностр. лит., 1960, гл. 4, § 1.
4. Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases. Comm. Pure. Appl. Math., 1949, vol. 2, No. 4 (русск. перев.: Грэд Г. О кинетической теории разреженных газов. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1952, вып. 4, 5).