УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В КОНИЧЕСКИХ ПОТОКАХ

Б. М. Булах (Ленинград)

В статьях [1–3] автор указал на невозможность непрерывного течения около «верха» треугольной пластинки, помещенной в однородный сверхзвуковой поток, и других конических тел. Основой для этих выводов были свойства простых конических волн и соображения, связанные с постановкой краевых задач для уравнений смешанного, эллиптико-гиперболического типа. Ниже дается другой подход к вопросу, основанный на асимптотических представлениях решения в «пограничных слоях» вблизи слабых ударных волн и конусов Маха для однородного потока [4]. На примере обтекания «верха» треугольной пластинки устанавливается, что появление (или отсутствие) ударных волн определяется поведением (вблизи соответствующей границы) обычного линейного решения. Находится асимптотическая формула, определяющая положение ударной волны для «верха» треугольной пластинки.

1. Рассмотрим треугольную пластинку под углом атаки δ без скольжения в потоке невязкого газа, имеющего скорость W_1 и число Маха M_1. Предполагаем, что кромки крыла сверхзвуковые, поэтому конические течения, возникающие при обтекании «верха» и «низа» крыла, не взаимодействуют и могут рассматриваться отдельно (фиг. 1).

В конических потоках компоненты скорости u, v, w по осям декартовых координат, энтропия S, давление p зависят только от угловых координат, за которые примем $\xi = x / z$, $\eta = y / z$, направив ось Oz по оси симметрии крыла (фиг. 1). Для безвихревых конических течений конический потенциал $F(\xi, \eta) = z^{-1}\varphi(x, y, z)$ (где φ — потенциал скорости) удовлетворяет уравнению

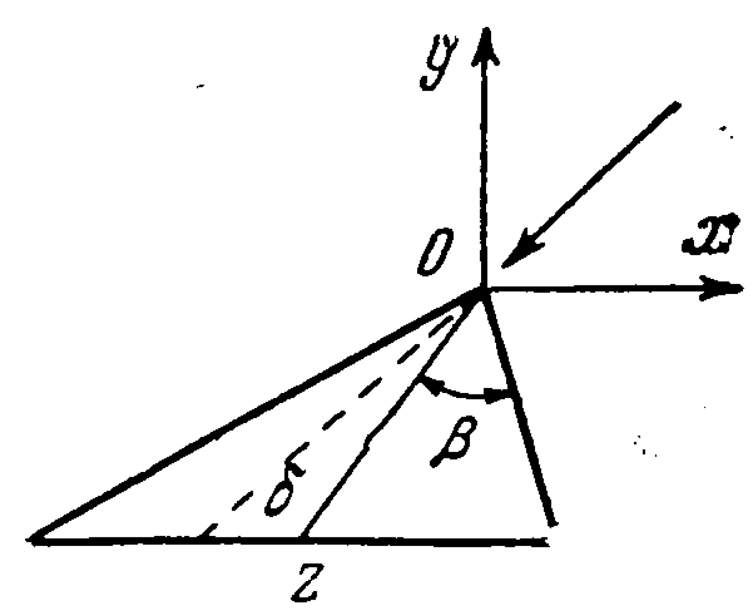
$$L[F] = AF_{\xi\xi} + 2BF_{\xi\eta} + CF_{\eta\eta} = 0 \qquad (1.1)$$

$$A = a^2(1 + \xi^2) - (u - \xi w)^2$$

$$B = a^2\xi\eta - (u - \xi w)(v - \eta w)$$

$$C = a^2(1 + \eta^2) - (v - \eta w)^2$$

$$a^2 = a_1^2 - {}^1/_2(\gamma - 1)(u^2 + v^2 + w^2 - W_1^2)$$



Фиг. 1

Здесь a_1 — скорость звука в невозмущенном потоке, a — местная скорость звука, γ — адиабатический индекс. Кроме того,

$$u = F_\xi, \qquad v = F_\eta, \qquad w = F - \xi F_\xi - \eta F_\eta \qquad (1.2)$$

В дальнейшем потребуются полярные координаты на плоскости $\xi\eta$; вводим их по формулам $\xi = r\cos\theta$, $\eta = r\sin\theta$, тогда

$$u = \cos\theta F_r - \frac{\sin\theta}{r} F_\theta, \qquad v = \sin\theta F_r + \frac{\cos\theta}{r} F_\theta, \qquad w = F - rF_r \qquad (1.3)$$

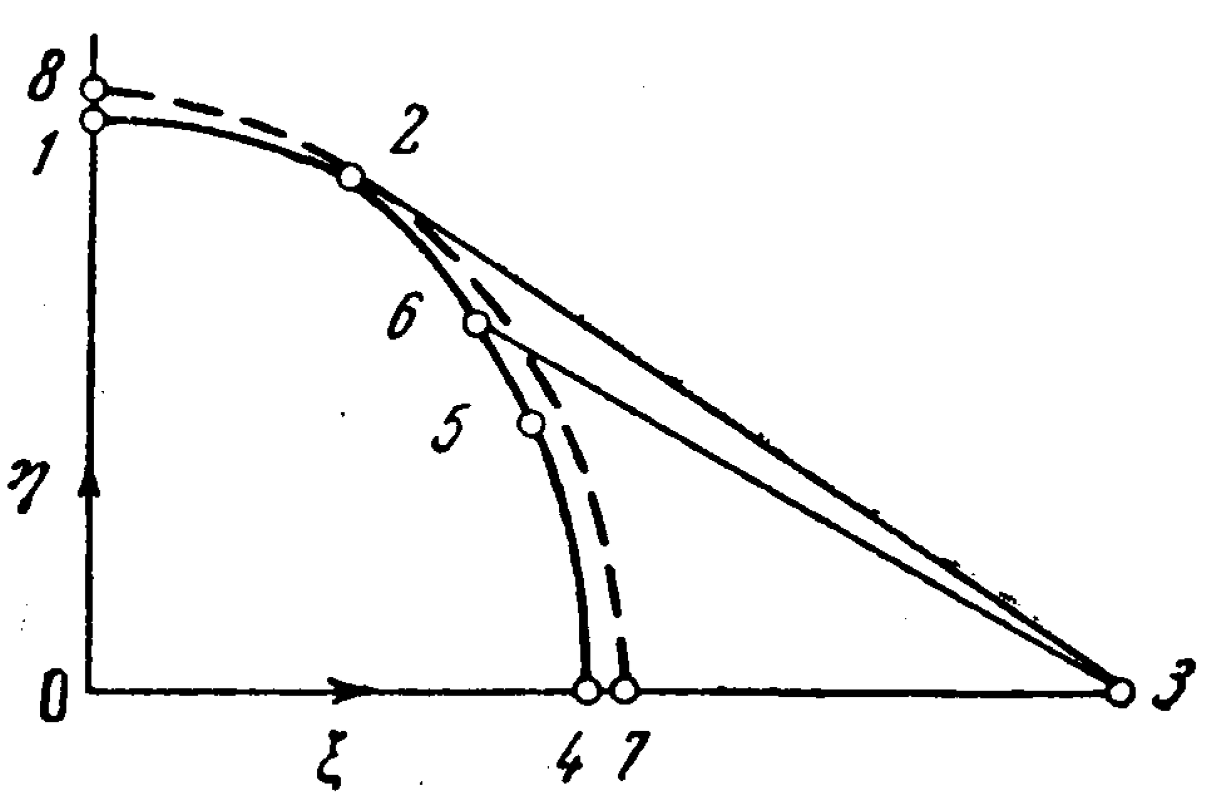
В силу симметрии изобразим картину обтекания «верха» пластинки при малых углах атаки δ на плоскости $\xi\eta$ только для $\xi > 0$ (фиг. 2).

Крыло изображается отрезком *0-3*. Огибающей конусов Маха невозмущенного потока с вершинами на боковой кромке являются дуга *1-2* конуса Маха с вершиной в точке O (фиг. 1) и отрезок прямой *2-3*. При обтекании боковой кромки пластинки образуется течение Прандтля — Майера, после которого следует однородный поток, примыкающий к поверхности крыла, область *3-4-5-6-3*. Течение Прандтля — Майера имеет пучок прямолинейных характеристик уравнения (1.1), проходящих через точку *3* (прямые *3-2*, *3-6*). Область общего конического потока над центральной частью крыла, если предположить течение непрерывным, ограничена дугой конуса Маха *1-2*, криволинейной характеристикой течения Прандтля — Майера *2-6*, прямолинейной характеристикой *5-6*, дугой конуса Маха *5-4* для однородного потока в области *3-4-5-6-3*. Не будем предрешать вопрос о существовании скачков *2-7*, *2-8* (из дальнейшего будет видно, что *2-8* вырождается в дугу конуса Маха *1-2*, а скачок *2-7* существует, и будет дана асимптотическая формула (при $\delta \to 0$) для определения его положения).

2. В работе [4] автор показал, что вблизи слабых ударных волн и конусов Маха для однородного потока имеются «пограничные слои», в которых решение (1.1) не может быть представлено в виде обычного степенного ряда по δ, и были построены соответствующие разложения. План наших действий таков. Внутри области *0-1-2-6-5-4-0* решение можно представить степенным рядом по δ.

Возьмем первый член этого разложения (линейная теория) и попытаемся «склеить» его с первым членом решения на выходе из «пограничных слоев» вблизи *1-2* (или *2-8*) и *2-7* (или *4-5*).

Таким способом будет установлено, что отдельные разложения можно «склеить» только в том случае, если предположить, что границей общего конического потока являются *1-2* и *2-7*, т. е. скачка *2-8* не будет, а скачок *2-7* существует. (Заметим, что при $\delta \to 0$ дуга *2-6-5* исчезает и все течение определяется дугами *1-2*, *5-4*.)



Фиг. 2

Система координат фиг. 1 является основной. Введем еще две вспомогательные системы координат. В первой системе ось z^* направим по скорости невозмущенного потока, и все величины, относящиеся к этой системе координат, будем отмечать звездочкой; во второй системе ось z° направляем по скорости однородного потока в области *3-4-5-6-3* и величины обозначаем индексом $^\circ$. Запишем разложение для конического потенциала F на выходе из «пограничного слоя» [4] около *1-2*, положив $\lambda^{1/2} = \delta$, $\psi(\theta^*, \lambda) = \psi_0(\theta^*) + \ldots$,

$$F^*(r^*, \theta^*) = W_1 + \delta\left[\frac{8\sqrt{3}}{9}\psi_0^{1/2}(\theta^*)\frac{W_1}{\gamma+1}\frac{m_1^4}{M_1^4}(r_1^* - r^*)^{3/2} + \ldots\right] + O(\delta^2)$$

$$(m_1 = (M_1^2 - 1)^{1/2}, \quad r_1^* = m_1^{-1}) \qquad (2.1)$$

Если предположить, что около *1-2* имеется скачок *2-8*, то в (2.1) вместо $\psi_0^{1/2}(\theta^*)$ нужно подставить $-\varphi_0^{1/2}(\theta^*)$ (Положение *2-8* определяется формулой $r^* = r_1^* + \delta^2\psi_0(\theta^*) + \ldots$) Перейдем в (2.1) к основной системе координат. Первая вспомогательная система координат получается из основной путем поворота около оси x на угол δ. Записывая формулы перехода от x^*, y^*, z^* к x, y, z, легко получить

$$r^* = r - \delta\sin\theta\,(1 + r^2) + O(\delta^2), \qquad \theta^* = \theta - \delta r^{-1}\cos\theta + O(\delta^2) \qquad (2.2)$$

Кроме того, конический потенциал F в основной системе координат получается из F^* по формуле

$$F(r, \theta) = F^*(r^*, \theta^*)\sqrt{(1 + r^2)/(1 + r^{*2})}$$

Подставляя сюда (2.1), (2.2) и разлагая результат по δ, получим

$$F = W_1 + \delta\Big[r_1W_1\sin\theta - W_1\sin\theta\,(r_1 - r) +$$

$$+ \frac{8\sqrt{3}}{9}\frac{W_1}{\gamma+1}\frac{m_1^4}{M_1^4}\psi_0^{1/2}(\theta)\,(r_1 - r)^{3/2} + \ldots\Big] + O(\delta^2) \qquad (2.3)$$

где $r_1 = r_1^*$. Согласно (1.3),

$$w = W_1\left\{1 + \delta\left[\frac{4\sqrt{3}}{3}\frac{m_1^3}{(\gamma+1)M_1^4}\psi_0^{1/2}(\theta)\,(r_1 - r)^{1/2} + \ldots\right] + O(\delta^2)\right\} \qquad (2.4)$$

Проделаем такие же операции для течения около скачка *2-7* (или дуги *5-4*). Записываем разложение для F на выходе из «пограничного слоя» около *2-7* [4], положив $\lambda^{1/2} = \delta$, $\varphi(\theta^\circ, \lambda) = \varphi_0(\theta^\circ) + \ldots$,

$$F^\circ(r^\circ, \theta^\circ) = W_1^\circ + \delta\left[-\frac{\varphi_0^{1/2}(\theta^\circ)}{\gamma+1}W_1^\circ\frac{m_1^{\circ 4}}{M_1^{\circ 4}}\frac{8\sqrt{3}}{9}(r_1^\circ - r^\circ)^{3/2} + \ldots\right] + O(\delta^2) \qquad (2.5)$$

$$(m_1^\circ = \sqrt{M_1^{\circ 2} - 1}, \quad r_1^\circ = 1/m_1^\circ)$$

Здесь W_1°, M_1° — скорость и число Маха в области *3-4-5-6-3* (фиг. 2).

Вторая вспомогательная система координат получается из основной поворотом около оси y на угол σ, который будет функцией δ, β, M_1, γ. Представим его в виде ряда по степеням δ

$$\sigma = \sigma_1\delta + \sigma_2\delta^2 + \ldots$$

Так же поступим и с другими величинами

$$W_1^\circ = W_1 + W_{11}\delta + \ldots, \quad M_1^{\circ 2} = M_1^2 + O(\delta), \quad m_1^{\circ 2} = m_1^2 + O(\delta), \quad r_1^\circ = r_1 + O(\delta)$$

и т. д. Кроме того

$$F(r, \theta) = F^\circ(r^\circ, \theta^\circ)\sqrt{\frac{1 + r^2}{1 + r^{\circ 2}}}$$

и связь между r°, θ° и r, θ дается формулами

$$r^\circ = r + \delta\sigma_1 \cos\theta\,(1 + r^2) + O(\delta^2), \qquad \theta^\circ = \theta - \delta\sigma_1 \frac{\sin\theta}{r} + O(\delta^2)$$

Подставляя (2.5), r°, θ° в $F(r, \theta)$, разлагая результат по δ, получим

$$F = W_1 + \delta\Big[W_{11} - W_1\sigma_1 r_1 \cos\theta + W_1\sigma_1\cos\theta\,(r_1 - r) -$$
$$- \frac{8\sqrt{3}}{9}\frac{W_1}{\gamma + 1}\frac{m_1^4}{M_1^4}\varphi_0^{1/2}(\theta)\,(r_1 - r)^{3/2} + \ldots\Big] + O(\delta^2)$$

Отсюда, при помощи (1.3) находим

$$w = W_1\left\{1 + \delta\left[\frac{W_{11}}{W_1} - \frac{4\sqrt{3}}{3}\frac{m_1^3}{(\gamma + 1) M_1^4}\varphi_0^{1/2}(\theta)\,(r_1 - r)^{1/2} + \ldots\right] + O(\delta^2)\right\} \qquad (2.6)$$

Если предположить, что скачок *2-7* отсутствует, то в формуле (2.6) величину $\varphi_0^{1/2}(\theta)$ нужно заменить на $-\psi_0^{1/2}(\theta)$.

Во внутренней части области *0-1-2-7-0* величина w представляется в виде

$$w = W_1\,[1 + \delta w_1(\alpha, \theta) + O(\delta^2)] \qquad (2.7)$$

где $w_1(\alpha, \theta)$ есть гармоническая функция полярных координат α, θ и $r / r_1 = 2\alpha / (1 + \alpha^2)$ ($r = r_1$ соответствует $\alpha = 1$). Преобразуя (2.4) и (2.6) к переменным α, θ, получим

$$w = W_1\left\{1 + \delta\left[\frac{2\sqrt{6}}{3}\frac{m_1^{5/2}}{(\gamma + 1) M_1^4}\psi_0^{1/2}(\theta)\,(1 - \alpha) + \ldots\right] + O(\delta^2)\right\} \qquad (2.8)$$

$$w = W_1\left\{1 + \delta\left[\frac{W_{11}}{W_1} - \frac{2\sqrt{6}}{3}\frac{m_1^{5/2}}{(\gamma + 1) M_1^4}\varphi_0^{1/2}(\theta)\,(1 - \alpha) + \ldots\right] + O(\delta^2)\right\} \qquad (2.9)$$

3. Будем рассуждать следующим образом.

Разложение (2.7) представляет точное решение во внутренней части круга $\alpha \leqslant 1$. В окрестности $\alpha = 1$ этот ряд расходится, но каждый член этого разложения определен при $\alpha \leqslant 1$, и поэтому при $\alpha \to 1$ эти функции должны иметь вполне определенное поведение. Это поведение для $w_1(\alpha, \theta)$ дается коэффициентами при δ в формулах (2.8), (2.9). Устремляя α к единице, получим из (2.8), (2.9), что на дуге единичной окружности *1-2* фиг. 3, [соответствующей *1-2* фиг. 2 (или ударной волне *8-2*), $w_1 = 0$, а на дуге *2-7*, фиг. 3, соответствующей скачку *2-7* (фиг. 2) (или конусу Маха *4-5*), $w_1 = W_{11}/W_1$, т. е. на плоскости α, θ получается в точности обычная линейная задача.

Фиг. 3

После нахождения $w_1(\alpha, \theta)$ «склеиваем» производные w_α, получающиеся из линейной теории с w_α, даваемых разложениями (2.8), (2.9) при $\alpha = 1$. Поскольку, согласно линейной теории, $w_\alpha < 0$ на дуге *1-2* (фиг. 3) и $w_\alpha > 0$, и на дуге *2-7* (фиг. 3), то «склеивание» возможно только, если принять, что границей конического течения служит дуга конуса Маха *1-2* (фиг. 2), и скачок *2-7* (фиг. 2). Из условия «склеивания» находятся $\psi_0^{1/2}(\theta)$, $\varphi_0^{1/2}(\theta)$, которые определяют скорость расширения потока в окрестности *1-2* и положение скачка *2-7*. В частности, для $\varphi_0(\theta)$ имеем

$$\varphi_0(\theta) = \frac{3}{8}\frac{(\gamma+1)^2 M_1^8}{m_1^5}[(w_{1\alpha})_{\alpha=1}]^2 \qquad (3.1)$$

и положение скачка *2-7*, фиг. 2, во второй вспомогательной системе координат дается формулой

$$r^\circ = r_1^\circ + \delta^2\varphi_0(\theta^\circ) + O(\delta^3) \qquad (3.2)$$

Для точки *7* (фиг. 2) $\theta = \theta^\circ = 0$, $\eta_7 = \eta_7^\circ = 0$, $r_7^\circ = \xi_7^\circ$ и, согласно (3.1), (3.2),

$$\xi_7^\circ = r_1^\circ + \delta^2\frac{3}{8}\frac{(\gamma+1)^2 M_1^{\circ 8}}{m_1^{\circ 5}}[(w_{1\alpha})_{\alpha=1,\,\theta=0}]^2 + O(\delta^3) \qquad (3.3)$$

Положение точки *7* в основной системе координат вычисляется по формуле

$$\xi_7 = \frac{\xi_7^\circ - \operatorname{tg}\sigma}{\xi_7^\circ \operatorname{tg}\sigma + 1} \qquad (3.4)$$

Согласно линейной теории

$$(w_{1\alpha})_{\alpha=1,\,\theta=0} = \frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{ctg}\beta}{m_1^2}\csc^2\theta_0 \qquad \left(\cos\theta_0 = \frac{1}{m_1}\operatorname{ctg}\beta\right) \qquad (3.5)$$

При помощи формул (3.3)—(3.5) и таблиц [5,6] автор вычислил ξ_7 для двух случаев, которые рассчитывались также и на электронной цифровой машине [7]. Приводим результаты, а также относительную ошибку Δ

γ	M_1	β	δ	$\xi_{7\,[7]}$	$\xi_{7\,(3.4)}$	Δ
1.4	4	30°	5°	0.196	0.199	1.5%
1.4	6	30°	7°	0.116	0.124	7%

4. Таким образом, возникновение скачков в точной теории может быть предсказано по результатам линейной теории (там, где $(w_\alpha)_{\alpha=1} > 0$, возникает скачок, там где $(w_\alpha)_{\alpha=1} < 0$,— течение расширения). Отметим, что этот вывод был впервые сделан М. Лайтхиллом [8], когда он применил свой метод (ПЛГ) к задаче нахождения второго приближения в теории конических течений. Изложенный способ действия более строгий; кроме того, здесь удалось, основываясь на линейной теории, определить положение скачка *2-7* с точностью $O(\delta^2)$, а не $O(\delta)$, как это сделано в работе [8].

Влияние области, где (1.1) гиперболического типа, вблизи *2-6-5* и других областей, стягивающихся в точку при $\delta \to 0$, в родственных задачах рассмотрено в диссертации автора (МГУ, 1962).

Поступила 19 XII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Булах Б. М. К теории нелинейных конических течений. ПММ, 1955, т. 19, вып. 4, стр. 393—409.
2. Булах М. Б. Замечание к статье Л. Р. Фауэлла «Точное и приближенное решение для сверхзвукового дельтаобразного крыла». ПММ, 1958, т. 22, вып. 3, стр. 404—407.
3. Булах Б. М. Замечание к статье Д. В. Рейна «Дифференциально-геометрические рассмотрения преобразования годографа для конического течения». ПММ, 1962, т. 26, вып. 4, стр. 793—797.
4. Булах Б. М. О некоторых свойствах сверхзвуковых конических течений газа. ПММ, 1961, т. 25, вып. 3, стр. 478—484.
5. Ферри А. Аэродинамика сверхзвуковых течений. Гостехиздат, 1952.
6. Пятизначные таблицы логарифмов чисел и тригонометрических функций. Геодезиздат, 1955.
7. Бабаев Д. А. Численное решение задачи обтекания верхней поверхности треугольного крыла сверхзвуковым потоком. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1962, т. 2, № 2, стр. 278—289.
8. Lighthill M. J. The Shock Strenth in Supersonic «Conical Flows». Philos. Mag., 1949, vol. 40, ser. 7, No. 311, p. 1202—1223.