Здесь F — вырожденная гипергеометрическая функция

$$F(\alpha, \beta, z) = 1 + \frac{\alpha}{\beta}\frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}\frac{z^2}{2!} + \cdots, \quad \rho = \xi - \mathbf{r}$$

а функции f_α не зависят от времени.

Разложим функцию F в ряд и ограничимся первыми двумя членами при $t \to \infty$. Первый член разложения при интегрировании по ξ исчезает вследствие соленоидальности Q_1, а второй дает закон затухания $Q_1 \sim t^{-3}$. Отметим, что именно учет флюктуаций давления дает не экспоненциальный, а степенной закон затухания корреляций. Асимптотический закон вырождения турбулентности в слабо проводящей жидкости, как и в обычной гидродинамике [4], оказывается универсальным (не зависящим от начальных условий).

Автор приносит благодарность А. А. Веденову за обсуждение работы.

Поступила 23 II 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Lehnert B. The decay of magneto-turbulence in the presence of a magnetic field and Coriolis force. Quart. Appl. Math., 1955, vol. 12, No. 4.
2. Tatsumi T. Magneto-Fluid Dynamics. Progr. Theoret. Phys., Suppl. 1962, No. 24.
3. Lecocq P. Amortissement de la turbulence. État final. Spectre d'énergie. Compt. rend., 1962, t. 254, No. 21.
4. Миллионщиков М. Д. Вырождение однородной и изотропной турбулентности в вязкой несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1940, т. 22, стр. 236—240.

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ МЕЖДУ ПЛОСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

В. Н. Михайлов

(Москва)

Методом Вольтерра [1] с помощью преобразования С. В. Фальковича [2] получено решение задачи об интерференции между двумя параллельно-расположенными крыльями в сверхзвуковом потоке газа. Подобное преобразование было использовано также Б. И. Фридлендером [3] для расчета обтекания крестообразного крыла. В этой работе указывается на возможность изучения таким методом течения внутри прямоугольного параллелепипеда. В отличие от этого, в настоящей работе решение этой задачи получено путем сведения ее к задаче о течении между двумя параллельными крыльями.

1. На систему двух тонких крыльев, расположенных одно над другим, набегает сверхзвуковой поток идеального газа. Направим ось x прямоугольной системы координат x, y, z по направлению набегающего потока, а оси y и z выберем так, чтобы при нулевом угле атаки α поверхности крыльев мало отличались от плоскостей $z = 0$ и $z = h$. Обозначим через S^- область в плоскости $z = 0$, в которой нижнее крыло вызывает возмущение, а через S^+ — область возмущения верхнего крыла в плоскости $z = h$. Будем считать, что потенциал скоростей возмущенного течения удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь принято, что число Маха на бесконечности равно $\sqrt{2}$, к другим числам Маха можно перейти при помощи преобразования Прандтля — Глауэрта.

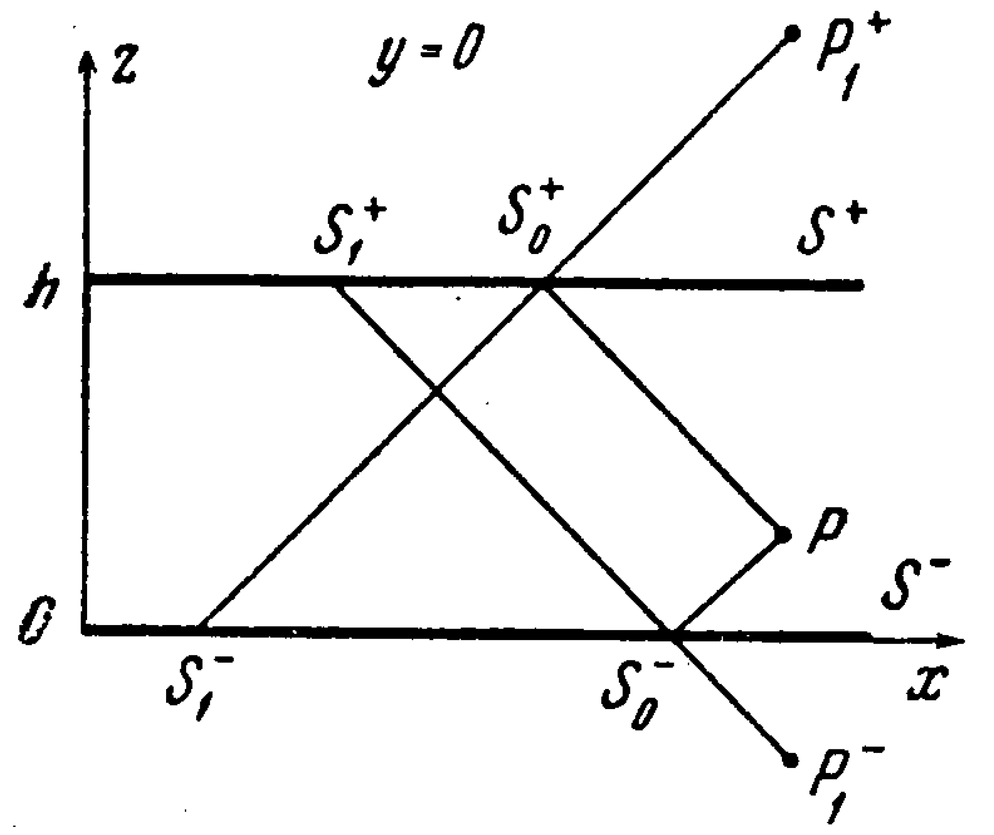
Рассмотрим сначала случай, когда передние кромки одного крыла не влияют на передние кромки другого крыла. Возьмем в пространстве между крыльями точку p (x_p, y_p, z_p). Характеристический конус с вершиной в этой точке, идущий в сторону убывающих значений x, вырежет на поверхностях S^+ и S^- соответственно области $S^+(x_p, y_p, z_p)$ и $S^-(x_p, y_p, z_p)$. Применяя в точке p формулу Вольтерра [1], получим

$$\Phi(x_p, y_p, z_p) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_p} \iint\limits_{S^+(p)+S^-(p)} \left(U(p)\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\,\frac{\partial U(p)}{\partial n}\right) dx\,dy \qquad (1.2)$$

Здесь

$$U(p) = \lg\left[\frac{x_p - x + \sqrt{(x_p - x)^2 - (z_p - z)^2 - (y_p - y)^2}}{\sqrt{(z_p - z)^2 + (y_p - y)^2}}\right]$$

n — направление внешней нормали к поверхностям S^+ и S^-. При выводе уравнения (1.2) учтено также, что на характеристических поверхностях Σ, которые разграничивают области возмущенного и невозмущенного потоков, потенциал Φ равен нулю.



Возьмем теперь точку q (x_q, y_q, z_q), лежащую вне пространства между крыльями. Характеристический конус с вершиной в этой точке вырежет в областях S^+ и S^- некоторые их части $S^+(q)$ и $S^-(q)$, которые вместе с боковой поверхностью характеристического конуса и поверхностью Σ образуют замкнутую область. Применим в этой области к функциям Φ и $U(q)$ формулу Грина [1], в результате получим

$$\iint\limits_{S^+(q)+S^-(q)} \left[U(q)\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\,\frac{\partial U(q)}{\partial n}\right] dx\,dy = 0 \qquad (1.3)$$

Выберем точку q симметрично точке p относительно плоскости $z = h$ (фигура), обозначим ее через p_1^+. Вследствие симметрии точек p и p_1^+ имеем на плоскости $z = h$

$$U(p_1^+) = U(p), \qquad \partial U(p_1^+)/\partial n = -\partial U(p)/\partial n, \qquad S^+(p_1^+) = S^+(p) \qquad (1.4)$$

Используя равенства (1.4), из уравнения (1.3) получаем

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S^+(p)} \Phi\,\frac{\partial U(p)}{\partial n}\,dx\,dy = &- \iint\limits_{S^+(p)} U(p)\,\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,dx\,dy - \\ &- \iint\limits_{S^-(p_1^+)} \left[U(p_1^+)\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\,\frac{\partial U(p_1^+)}{\partial n}\right] dx\,dy\end{aligned} \qquad (1.5)$$

Применим теперь аналогичное преобразование для точки $p_1^-(x_p, -y_p, z_p)$, симметричной точке p относительно плоскости $z = 0$, в результате будем иметь

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S^-(p)} \Phi\,\frac{\partial U(p)}{\partial n}\,dx\,dy = &- \iint\limits_{S^-(p)} U(p)\,\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,dx\,dy - \\ &- \iint\limits_{S^+(p_1^-)} \left[U(p_1^-)\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\,\frac{\partial U(p_1^-)}{\partial n}\right] dx\,dy\end{aligned} \qquad (1.6)$$

Подставляя (1.5) и (1.6) в (1.2), получим

$$\begin{aligned}\Phi(p) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_p}\Bigg\{2\iint\limits_{S^+(p)} U(p)\,\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,dx\,dy + 2\iint\limits_{S^-(p)} U(p)\,\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,dx\,dy + \quad (1.7)\\ + \iint\limits_{S^-(p_1^+)} \left[U(p_1^+)\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\,\frac{\partial U(p_1^+)}{\partial n}\right] \partial x\,\partial y + \iint\limits_{S^+(p_1^-)} \left[U(p_1^-)\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\,\frac{\partial U(p_1^-)}{\partial n}\right] dx\,dy\Bigg\}\end{aligned}$$

Очевидно, что $S^+(p_1^-) < S^+(p)$ и $S^-(p_1^+) < S^-(p)$. Может оказаться, что области $S^+(p_1^-) = 0$ и $S^-(p_1^+) = 0$, если же это не так, то можно применить преобразование (1.3) уже к областям $S^+(p_1^-)$ или $S^-(p_1^+)$, беря точки p_2^+ или p_2^- симметрично, соответственно точкам p_1^- или p_1^+ относительно плоскостей $z = h$ или $z = 0$. Этот процесс продолжим до тех пор, пока в правой части формулы (1.7) не исчезнут все интегралы от функции Φ, в результате получим

$$\Phi(p) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x_p}\sum_{i=0}\left[\iint\limits_{S^+(p_i^-)} U(p_i^-)\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,dx\,dy + \iint\limits_{S^-(p_i^+)} U(p_i^+)\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,dx\,dy\right] \qquad (1.8)$$

причем

$$z_{p_i^-} = -z_{p_{i-1}^+}, \qquad z_{p_i^+} = -z_{p_{i-1}^-} + 2h$$

Ряд в (1.8) обрывается, когда точки p_i^+, p_i^- выходят из области влияния крыльев.

Производя дифференцирование в уравнении (1.8), найдем

$$\Phi(p) = \sum_{i=0}[\Phi^+(p_i^-) + \Phi^-(p_i^+)] \qquad (1.9)$$

где

$$\Phi^+(p_i^-) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{S^+(p_i^-)}\frac{\partial\Phi/\partial n\,dx\,dy}{\sqrt{(x_p-x)^2-(y_p-y)^2-(z_{p_i^-}-h)^2}}$$

$$\Phi^-(p_i^+) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{S^-(p_i^+)}\frac{\partial\Phi/\partial n\,dx\,dy}{\sqrt{(x_p-x)^2-(y_p-y)^2-z_{p_i^+}^2}} \qquad (1.10)$$

Из (1.10) видно, что функция $\Phi^+(p_{p_i^-})$ есть не что иное, как значение потенциала обтекания изолированного верхнего крыла в точке p_i^-, а $\Phi^-(p_i^+)$ — значение потенциала обтекания изолированного нижнего крыла в точке p_i^+. Таким образом, потенциал течения между двумя параллельно расположенными крыльями выражается через потенциалы обтекания этих изолированных крыльев.

Если передние кромки крыльев сверхзвуковые, то формула (1.10) непосредственно дает решение задачи о течении между двумя плоскостями, так как производная $d\Phi / dn$ известна в этом случае из граничных условий. В случае дозвуковых передних кромок нахождение потенциала обтекания изолированного крыла также не вызывает принципиальных трудностей [4].

2. Предположим теперь, что передняя сверхзвуковая кромка нижнего крыла лежит в области влияния верхнего крыла. Обозначим через Φ_0 потенциал обтекания изолированного верхнего крыла.

Продолжим теперь мысленно нижнее крыло до пересечения с характеристической поверхностью, проходящей через переднюю кромку верхнего крыла, и зададим в новой области $\partial\Phi / \partial n = \partial\Phi_0 / \partial n$. Будем решать теперь задачу с граничными условиями на верхнем и нижнем новом фиктивном крыле. Очевидно, эта новая задача эквивалентна старой, а решение ее дается формулой (1.9).

3. Рассмотрим сверхзвуковое течение внутри полого прямоугольного параллелепипеда, грани которого мало отличаются от плоскостей $z = 0$, $z = h$, $y = 0$, $y = b$. Проекции поверхностей граней на эти плоскости обозначим соответственно через S^+, S^-, Q^+ и Q^-. Линеаризованные граничные условия будут иметь вид

$$\partial\Phi / \partial z = F^+(x, y) \quad \text{на } S^+, \qquad \partial\Phi / \partial z = F^-(x, y) \quad \text{на } S^- \qquad (3.1)$$

$$\partial\Phi / \partial y = L^+(x, z) \quad \text{на } Q^+, \qquad \partial\Phi / \partial y = L^-(x, z) \quad \text{на } Q^- \qquad (3.2)$$

и на характеристических поверхностях, проходящих через передние кромки граней, $\Phi = 0$.

Будем искать решение поставленной задачи в виде суммы $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$. Функция Φ_0 должна удовлетворять условиям (3.1) и, кроме того,

$$\partial\Phi_0 / \partial y = 0 \quad \text{на } Q^+ \text{ и } Q^- \qquad (3.3)$$

Потенциал Φ_1, наоборот, должен удовлетворять соотношениям (3.2), а на поверхностях S^+ и S^- дложно быть $\partial\Phi_1 / \partial z = 0$. Сумма подобранных таким образом функций, очевидно, решает поставленную задачу. Найдем функцию Φ_0.

Рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть уравнение передних кромок поверхностей S^+ и S^- задано соответственно в виде

$$x = x^+(y), \qquad x = x^-(y) \qquad (0 \leqslant y \leqslant b) \tag{3.4}$$

Образуем бесконечную в направлении оси y поверхность $S^{\cdot +}$, передние кромки которой зададим уравнением $x = x^{\cdot +}(y)$, причем

$$x^{\cdot +}(-y) = x^{\cdot +}(y), \qquad x^{\cdot +}(y \pm 2bk) = x^{\cdot +}(y) \qquad (k \text{ — целое число})$$

$$x^{\cdot +}(y) = x^+(y), \qquad \text{если } b \geqslant y \geqslant 0$$

т. е. область $S^{\cdot +}$ совпадает с областью S^+ в промежутке $[0, b]$, и каждая плоскость $y = \pm kb$ является плоскостью симметрии для этой поверхности. Таким же образом образуем область $S^{\cdot -}$ на основании области S^-.

Зададим теперь на области $S^{\cdot +}$ функцию $F^{\cdot +}$ равенствами

$$F^{\cdot +}(x, -y) = F^{\cdot +}(x, y), \qquad F^{\cdot +}(x, y \pm 2kb) = F^{\cdot +}(x, y)$$

$$F^{\cdot +}(x, y) = F^+(x, y), \qquad \text{если } b \geqslant y \geqslant 0$$

Функция $F^{\cdot +}(x, y)$ будет также симметрична относительно каждой плоскости $y = \pm kb$. На поверхности $S^{\cdot -}$ строим аналогично функцию $F^{\cdot -}(x, y)$, взяв за основу функцию $F^-(x, y)$.

Рассмотрим теперь задачу для волнового уравнения со следующими граничными условиями:

$$\frac{\partial\Phi^{\cdot}}{\partial z} = F^{\cdot +}(x, y) \quad \text{на } S^{\cdot +}, \qquad \frac{\partial\Phi^{\cdot}}{\partial z} = F^{\cdot -}(x, y) \quad \text{на } S^{\cdot +} \tag{3.5}$$

Так как граничные условия (3.5) симметричны относительно плоскостей $y = 0$ и $y = b$, то и решение также должно быть симметрично относительно этих плоскостей, поэтому должно автоматически выполняться условие $d\Phi^{\cdot} / dy = 0$ при $y = 0$ и $y = b$. Кроме того, граничные условия (3.5) совпадают в промежутке $[a, b]$ с условиями (3.1) по своему построению. Функция $\Phi^{\cdot}$ удовлетворяет всем условиям, поставленным для функции Φ_0, следовательно, они тождественно равны в промежутке $[a, b]$. Решение же задачи для Φ было получено в первом параграфе. Нахождение потенциала Φ_1 математически ничем не отличается от только что рассмотренной задачи. Таким образом, потенциал сверхзвукового течения внутри полого прямоугольного параметра представляется в виде квадратур.

Очевидно, таким же путем можно получить решение, если у параллелепипеда имеются только три грани.

Поступила 11 IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурса З. Курс математического анализа. т. 3, Гостехиздат, 1933.
2. Фалькович С. В. К теории крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке, ПММ, 1947, вып. 3.
3. Фридлендер Б. И. Крестообразное крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 6.
4. Красильщикова Е. А. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. Гостехиздат, 1952.