О ЗАТУХАНИИ ОДНОРОДНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Б. В. Елисеев

(Москва)

Затухание турбулентного движения в несжимаемой жидкости, находящейся в магнитном поле, в пренебрежении нелинейными эффектами рассматривалось Ленертом [1] (см. также обзор [2]). При малых магнитных числах Рейнольдса затухание турбулентности изучалось в [3]. Однако рассмотрение, проведенное в [1, 2], является неполным. Фактически в [1] был рассмотрен частный случай начального возмущения, как будет показано в данной работе. В [1-3] не исследуется асимптотическое поведение полученных решений во времени.

Запишем линеаризованные уравнения магнитной гидродинамики для движения проводящей несжимаемой жидкости в магнитном поле

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{\partial^2 h_i}{\partial x_\alpha^2} + H_0\frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}\lambda_\alpha, \qquad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \qquad \left(\boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{H}_0}{H_0}\right) \tag{1}$$

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{H_0}{4\pi\rho}\lambda_\alpha\frac{\partial h_i}{\partial x_\alpha} + \nu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_\alpha^2}, \qquad \frac{\partial h_i}{\partial x_i} = 0, \qquad \mathbf{H} = H_0\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{h}$$

Здесь $\mathbf{H}_0$ — среднее магнитное поле, $\mathbf{h}$ — флюктуирующее поле, σ и ν — проводимость и кинематическая вязкость жидкости.

В уравнении для скорости было учтено, что в рассматриваемом случае

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p + \frac{H_\alpha^2}{8\pi}\right) = 0$$

где p — давление жидкости.

Введем обозначения

$$Q_1 = \frac{4\pi\rho}{H_0^2}\langle v_i v_j'\rangle, \qquad Q_2 = \frac{\sqrt{4\pi\rho}}{H_0^2}\langle v_i h_j' - h_i v_j'\rangle, \qquad Q_3 = \frac{1}{H_0^2}\langle h_i h_j'\rangle$$

Здесь нештрихованные величины берутся в точке x, а штрихованные — в точке $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{r}$; усреднение производится по пространству. Введем также безразмерные переменные

$$\tau = \frac{\sigma H_0^2}{\rho c^2}t, \qquad y = \frac{\sigma H_0}{c^2}\left(\frac{4\pi}{\rho}\right)^{1/2} x$$

Средние величины Q_α зависят только от разности $\mathbf{r} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$. Будем считать, что вектор $\boldsymbol{\lambda}$ направлен по r_1. Тогда из уравнений (1) для Q_α получим, как и в [1], следующую систему:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - 2R\nabla^2\right)Q_1 = \frac{\partial Q_2}{\partial r_1}, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial\tau} - 2\nabla^2\right)Q_3 = -\frac{\partial Q_2}{\partial r_1}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tau} - (1+R)\nabla^2\right]Q_2 = 2\frac{\partial}{\partial r_1}(Q_1 - Q_3), \qquad R = \frac{4\pi\sigma\nu}{c^2}$$

Отсюда для фурье-преобразований

$$\Phi_\alpha(\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\int Q_\alpha(\mathbf{r})\, e^{i\mathbf{kr}}\, d\mathbf{r}$$

получим систему уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + 2Rk^2\right)\Phi_1 = ik_1\Phi_2, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial\tau} + 2k^2\right)\Phi_3 = -ik_1\Phi_2$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + (1+R)k^2\right)\Phi_2 = 2ik_1(\Phi_1 - \Phi_3) \tag{2}$$

Система (2) имеет решение при произвольных начальных значениях Φ_i при $\tau = 0$. Ее решение, полученное Ленертом (при нахождении решения считалось, что искомые функции зависят от времени в виде $e^{m\tau}$), обладает тем свойством, что начальные значения функций Q_α выражаются через начальные значения одной из них, т. е. оно не является общим. Очевидно, что начальные значения функций Q_α (в частности, начальные значения кинетической и магнитной энергий) могут быть произвольными. При произвольных начальных значениях решение системы (2) таково:

$$\Phi_1 = \Phi_1^\circ \frac{1}{2\beta}[(p_1+2k^2)e^{p_1\tau}-(p_2+2k^2)e^{p_2\tau}] + \frac{ik_1e^{\alpha\tau}\Phi_2^\circ}{\beta^2}\times$$
$$\times\left[\frac{(p_1+2k^2)}{2}e^{\beta\tau}+\frac{(p_2+2k^2)}{2}e^{-\beta\tau}+k^2(R-1)\right]+\frac{2(\Phi_1^\circ+\Phi_3^\circ)}{\beta^2}k_1^2e^{\alpha\tau}(\operatorname{ch}\beta\tau-1)$$

$$\Phi_2 = \Phi_2^\circ e^{\alpha\tau}\left[1+\frac{4k_1^2}{\beta^2}(1-\operatorname{ch}\beta\tau)\right]+\frac{4ik_1\Phi_1^\circ}{\beta}\operatorname{sh}\beta\tau e^{\alpha\tau}+$$
$$+\frac{2ik_1}{\beta^2}(\Phi_1^\circ+\Phi_3^\circ)e^{\alpha\tau}\left[k^2(R-1)-\frac{(p_1+2Rk^2)}{2}e^{\beta\tau}-\frac{(p_2+2Rk^2)}{2}e^{-\beta\tau}\right]$$

$$\Phi_3 = \frac{\Phi_1^\circ}{2\beta}[(p_2+2Rk^2)e^{p_2\tau}-(p_1+2Rk^2)e^{p_1\tau}]+$$
$$+\frac{ik_1\Phi_2^\circ}{\beta^2}e^{\alpha\tau}\left[k^2(R-1)-\frac{p_1+2Rk^2}{2}e^{\beta\tau}-\frac{p_2+2Rk^2}{2}e^{-\beta\tau}\right]-$$
$$-\frac{2k_1^2(\Phi_1^\circ+\Phi_3^\circ)e^{\alpha\tau}}{\beta^2}\left[1+\frac{(p_1+2Rk^2)e^{\beta\tau}}{2(p_1+2k^2)}+\frac{(p_2+2Rk^2)e^{-\beta\tau}}{2(p_2+2k^2)}\right]$$
$$(p_{1,2} = -k^2(1+R)\pm\sqrt{k^4(R-1)^2-4k_1^2} = \alpha\pm\beta) \qquad (3)$$

Исследуем решение в двух частных случаях: при $R=1$ и $R\to\infty$. При $R=1$ из (3) получаем

$$\Phi_1 = [\Phi_1^\circ\cos 2k_1\tau + {}^1/_2 i\Phi_2^\circ\sin 2k_1\tau +$$
$$+ {}^1/_2(\Phi_1^\circ+\Phi_3^\circ)(1-\cos 2k_1\tau)]\exp(-2k^2\tau)$$

$$\Phi_2 = [i(\Phi_1^\circ-\Phi_3^\circ)\sin 2k_1\tau+\Phi_2^\circ\cos 2k_1\tau]\exp(-2k^2\tau)$$
$$\Phi_3 = [{}^1/_2(\Phi_1^\circ+\Phi_3^\circ)+{}^1/_2(\Phi_3^\circ-\Phi_1^\circ)\cos 2k_1\tau - {}^1/_2 i\Phi_2^\circ\sin 2k_1\tau]\exp(-2k^2\tau) \qquad (4)$$

Перейдем от фурье-преобразований Φ_α к самим функциям Q_α. Если записать систему (4) в виде

$$\Phi_\alpha = f_{\alpha\beta}(\mathbf{k})\Phi_\beta^\circ$$

то переход к функциям Q_α будет осуществляться по формуле

$$Q_\alpha(r,\tau) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{\infty}Q_\beta(\xi,0)\,d\xi\int_{-\infty}^{\infty}f_{\alpha\beta}(\mathbf{k})\,e^{i\mathbf{k}(\xi-\mathbf{r})}d\mathbf{k} \qquad (5)$$

Интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_{\alpha\beta}\,e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\xi)}d\mathbf{k}$$

в (5) берутся в смысле главного значения. Они сводятся к трем основным интегралам

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\exp(-2k^2\tau+i\mathbf{k}\rho)\cos 2k_1\tau\,d\mathbf{k} =$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^{3/2}\left\{\exp\left[-\frac{(2\tau-\rho_1)^2}{8\tau}\right]+\exp\left[-\frac{(2\tau+\rho_1)^2}{8\tau}\right]\right\}\exp\left(-\frac{\rho_2^2+\rho_3^2}{8\tau}\right)$$

$$I_2 = i\int_{-\infty}^{\infty}\sin 2k_1\tau\exp(-2k^2\tau+i\mathbf{k}\rho)\,d\mathbf{k} =$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^{3/2}\left\{\exp\left[-\frac{(2\tau-\rho_1)^2}{8\tau}\right]-\exp-\left[\frac{(2\tau+\rho_1)^2}{8\tau}\right]\right\}\exp\left(-\frac{\rho_2^2+\rho_3^2}{8\tau}\right)$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty}\exp(-2k^2\tau+i\mathbf{k}\rho)\,d\mathbf{k} = \left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2}{8\tau}\right)$$

Исследуя асимптотическое поведение функций Q_α при $\tau \to \infty$, необходимо учесть, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q_\alpha(\xi, t)\, d\xi = 0$$

вследствие условий соленоидальности рассматриваемых тензоров. При $t \to \infty$

$$I_1 = \left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^{3/2} e^{-1/2\tau} \operatorname{ch} {}^1/_2\rho_1, \qquad I_2 = -\left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^{3/2} e^{-1/2\tau} \operatorname{sh} {}^1/_2\, \rho_1$$

$$I_3 = \left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2}{8\tau}\right)$$

Однако первый член в I_3 при интегрировании по ξ в (5) исчезает, и при оценке асимптотики Q_α нужно принимать во внимание лишь второй член. Следовательно, члены с $\cos 2k_1\tau$ и $\sin 2k_1\tau$ дают экспоненциально убывающие интегралы, а остальные члены в (4) дают вклады в интегралы, убывающие как $t^{-5/2}$. Корреляции между скоростью и магнитным полем убывают экспоненциально, и, более того, вклад $Q_2(\mathbf{r}, 0)$ в $Q_1(\mathbf{r}, \tau)$ и $Q_2(\mathbf{r}, \tau)$ также экспоненциально падает. Таким образом, при $R = 1$, когда магнитная вязкость равна кинематической, корреляции между скоростью и магнитным полем убывают быстрее других корреляций; при этом магнитная и кинематическая энергии асимптотически падают как $t^{-5/2}$. Интересно, что при $\tau \to \infty$

$$\Phi_1 = {}^1/_2 (\Phi_1{}^\circ + \Phi_3{}^\circ) \exp(-2k^2\tau), \qquad \Phi_3 = \Phi_1$$

т. е. кинетическая и магнитная энергии убывают одинаково, причем с амплитудой, пропорциональной полусумме начальных значений магнитной и кинетической энергий.

При $R \to \infty$ выделим в $\mathbf{k}$-пространстве область $k \gg 1/R$. В области $k \gg 1/R$ можно приближенно представить p_1 и p_2 выражениями

$$p_1 = -2k^2 - 2k_1{}^2 / k^2R, \qquad p_2 = -2k^2R + 2k_1{}^2 / k^2R$$

и систему (3) записать, сохраняя основные члены разложения в виде

$$\Phi_1 = \frac{\Phi_3{}^\circ k_1{}^2 e^{-2k^2\tau}}{k^4R^2}, \qquad \Phi_2 = -\frac{2ik_1\Phi_3{}^\circ e^{-2k^2\tau}}{k^2R}, \qquad \Phi_3 = \Phi_3{}^\circ e^{-2k^2\tau} \quad (\tau \gg 1) \tag{6}$$

Будем считать выполненным условие $R \gg \tau \gg 1$. Тогда вклад части $\mathbf{k}$-пространства вне области $k \gg 1/R$ стремится к нулю при $R \to \infty$, и при переходе к самим функциям Q_α можно распространить соответствующее интегрирование на все $\mathbf{k}$-пространство. Как следует из (6), основной вклад во все корреляции дают начальные корреляции между компонентами магнитного поля. Именно магнитная энергия является преобладающей в последней стадии затухания турбулентности. Кинетическая энергия имеет по отношению к магнитной порядок $1/R^2$, корреляции между магнитным полем и скоростью — порядок $1/R$. Магнитная энергия асимптотически убывает как $t^{-5/2}$, также как и корреляции между скоростью и магнитным полем. Действительно, соответствующий интеграл для Q_3 в (5) может быть сведен к интегралу типа

$$\int_0^\infty dk \int_0^{1/2\pi} d\theta \int_0^{1/2\pi} d\varphi k \sin kz \sin\theta \exp(-2k^2\tau) =$$

$$= \frac{z}{4\tau} \int_0^\infty dk \int_0^{1/2\pi} d\theta \int_0^{1/2\pi} d\varphi \cos kz \exp(-2k^2\tau) \sin\theta$$

имеющего асимптотику $\tau^{-5/2}$. Однако асимптотическая величина магнитной энергии не содержит множителя $1/R$ и, следовательно, она имеет наибольший порядок величины в конечной стадии затухания турбулентности в идеально проводящей жидкости.

Затухание турбулентности в слабо проводящей жидкости при малых магнитных числах Рейнольдса рассматривалось в [3], где было получено, что спектральная плотность энергии убывает как

$$\exp\left\{-2\left[\nu k^2+\frac{(k_\alpha\lambda_\alpha)^2}{k^2}\frac{\rho c^2}{\sigma H_0^2}\right]t\right\}$$

В этой работе не учитывались флюктуации электрического поля. Однако можно показать, что учет этих флюктуаций не изменяет полученных результатов. Действительно, из уравнений магнитной гидродинамики для слабо проводящей жидкости

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{[\mathbf{j}\times\mathbf{H}_0]_i}{\rho c}+\nu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_\alpha^2}$$

$$\mathbf{j}=\sigma\left(\nabla U+\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{H}_0}{c}\right),\qquad \operatorname{div}\mathbf{j}=0,\qquad \operatorname{div}\mathbf{v}=0$$

(здесь U — электрический потенциал, $\mathbf{H}_0$ — внешнее поле), получаем уравнения для корреляционных функций

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial t}=\frac{\partial L_j}{\partial r_i}-\frac{\partial l_i}{\partial r_j}+\frac{\sigma H_0}{\rho c}\left(\varepsilon_{j\alpha\beta}\lambda_\beta\frac{\partial m_i}{\partial r_\alpha}-\varepsilon_{i\alpha\beta}\lambda_\beta\frac{\partial M_j}{\partial r_\alpha}\right)+\frac{\sigma H_0^2}{\rho c^2}(\lambda_\alpha\lambda_i Q_{\alpha j}+$$

$$+\lambda_\alpha\lambda_j Q_{i\alpha}-2Q_{ij})+2\nu\frac{\partial^2 Q_{ij}}{\partial r_\alpha^2}$$

$$\frac{\partial^2 M_i}{\partial r_\alpha^2}-\frac{H_0}{c}\varepsilon_{\alpha\gamma\beta}\lambda_\beta\frac{\partial Q_{\gamma i}}{\partial r_\alpha}=\frac{\partial^2 m_i}{\partial r_\alpha^2}+\frac{H_0}{c}\varepsilon_{\alpha\gamma\beta}\lambda_\beta\frac{\partial Q_{i\gamma}}{\partial r_\alpha}=0$$

$$\frac{\partial^2 L_j}{\partial r_\alpha^2}+\frac{\sigma H_0^2}{\rho c^2}\lambda_\alpha\lambda_i\frac{\partial Q_{\alpha j}}{\partial r_i}=-\frac{\partial^2 l_i}{\partial r_\alpha^2}+\frac{\sigma H_0^2}{\rho c^2}\lambda_\alpha\lambda_j\frac{\partial Q_{i\alpha}}{\partial r_j}=0$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial r_j}=\frac{\partial Q_{ij}}{\partial r_i}=0$$

$$Q_{ij}=Q_1=\langle v_i v_j'\rangle,\quad L_i=\left\langle\frac{p v_i'}{\rho}\right\rangle,\quad l_i=\left\langle\frac{p' v_i}{\rho}\right\rangle,\quad M_i=\langle U v_i'\rangle,\quad m_i=\langle U' v_i\rangle$$

Переходя к фурье-представлению и исключая корреляции давления и потенциала, имеем аналогично [3]

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}=-2\left(\nu k^2+\frac{k_1^2}{k^2}\frac{\rho c^2}{\sigma H_0^2}\right)\Phi_1 \tag{7}$$

Выражение (7) следует из уравнений (1), если пренебречь членом $\partial h_i / \partial t$. Из (2) получим тогда

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}=-2\left(Rk^2+\frac{k_1^2}{(1+R)\,k^2+k_1^2/k^2}\right) \tag{8}$$

Малым магнитным числам Рейнольдса соответствуют большие значения k и малые величины R. В этом приближении уравнения (7) и (8) совпадают. Интегрируя (7) и переходя к Q_1, получаем

$$Q_1(\mathbf{r},t)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\limits_{-\infty}^{\infty}Q_1(\boldsymbol{\xi},0)\,d\boldsymbol{\xi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-2\left(\nu k^2+\frac{k_1^2\rho c^2}{k^2\sigma H_0^2}\right)t+i\mathbf{k}(\boldsymbol{\xi}-\mathbf{r})\right]d\mathbf{k} \tag{9}$$

Второй интеграл в (9) можно преобразовать следующим образом:

$$8\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\exp\left[-2\left(\nu k^2+\frac{k_1^2\rho c^2}{k^2\sigma H_0^2}\right)t\right]\prod_{\alpha=1}^{3}\cos k_\alpha\rho_\alpha\,dk_1\,dk_2\,dk_3=$$

$$=\int\limits_0^\infty dk\int\limits_0^{1/2\pi}d\theta\int\limits_0^{1/2\pi}d\varphi\sum_{\alpha=1}^{8}\exp\left(-2\nu k^2 t-\frac{2\rho c^2 t\cos^2\theta}{\sigma H_0^2}+if_\alpha\right)k^2\sin\theta=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{8\sqrt{2}}\frac{1}{(\nu t)^{3/2}}\int\limits_0^{1/2\pi}d\theta\int\limits_0^{1/2\pi}d\varphi\sin\theta\sum_{\alpha=1}^{8}F\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},-\frac{f_\alpha^2}{8t}\right)\exp\left(-\frac{2\rho c^2 t\cos^2\theta}{\sigma H_0^2}\right) \tag{10}$$

Здесь F — вырожденная гипергеометрическая функция

$$F(\alpha, \beta, z) = 1 + \frac{\alpha}{\beta}\frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}\frac{z^2}{2!} + \cdots, \qquad \rho = \xi - \mathbf{r}$$

а функции f_α не зависят от времени.

Разложим функцию F в ряд и ограничимся первыми двумя членами при $t \to \infty$. Первый член разложения при интегрировании по ξ исчезает вследствие соленоидальности Q_1, а второй дает закон затухания $Q_1 \sim t^{-3}$. Отметим, что именно учет флюктуаций давления дает не экспоненциальный, а степенной закон затухания корреляций. Асимптотический закон вырождения турбулентности в слабо проводящей жидкости, как и в обычной гидродинамике [4], оказывается универсальным (не зависящим от начальных условий).

Автор приносит благодарность А. А. Веденову за обсуждение работы.

Поступила 23 II 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Lehnert B. The decay of magneto-turbulence in the presence of a magnetic field and Coriolis force. Quart. Appl. Math., 1955, vol. 12, No. 4.
2. Tatsumi T. Magneto-Fluid Dynamics. Progr. Theoret. Phys., Suppl. 1962, No. 24.
3. Lecocq P. Amortissement de la turbulence. État final. Spectre d'énergie. Compt. rend., 1962, t. 254, No. 21.
4. Миллионщиков М. Д. Вырождение однородной и изотропной турбулентности в вязкой несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1940, т. 22, стр. 236—240.

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ МЕЖДУ ПЛОСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

В. Н. Михайлов

(Москва)

Методом Вольтерра [1] с помощью преобразования С. В. Фальковича [2] получено решение задачи об интерференции между двумя параллельно-расположенными крыльями в сверхзвуковом потоке газа. Подобное преобразование было использовано также Б. И. Фридлендером [3] для расчета обтекания крестообразного крыла. В этой работе указывается на возможность изучения таким методом течения внутри прямоугольного параллелепипеда. В отличие от этого, в настоящей работе решение этой задачи получено путем сведения ее к задаче о течении между двумя параллельными крыльями.

1. На систему двух тонких крыльев, расположенных одно над другим, набегает сверхзвуковой поток идеального газа. Направим ось x прямоугольной системы координат x, y, z по направлению набегающего потока, а оси y и z выберем так, чтобы при нулевом угле атаки α поверхности крыльев мало отличались от плоскостей $z = 0$ и $z = h$. Обозначим через S^- область в плоскости $z = 0$, в которой нижнее крыло вызывает возмущение, а через S^+ — область возмущения верхнего крыла в плоскости $z = h$. Будем считать, что потенциал скоростей возмущенного течения удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \qquad (1.1)$$

Здесь принято, что число Маха на бесконечности равно $\sqrt{2}$, к другим числам Маха можно перейти при помощи преобразования Прандтля — Глауэрта.