О МЕТОДЕ ИНВАРИАНТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ УРАВНЕНИЙ ГАЗОДИНАМИКИ

Е. Д. Томилов (Томск)

Л. В. Овсянников [1] установил преобразование искомых функций и независимых переменных, входящих в дифференциальные уравнения движения невязкого и нетеплопроводящего газа, при котором эти уравнения сохраняют свой вид; это преобразование детально рассмотрено в работах [2,3]. Если известно какое-либо точное решение уравнений газодинамики, то формулы преобразования дают возможность получить новое точное решение тех же уравнений и тем самым сопоставить данному течению газа E' некоторое другое E, описываемое новым решением. Течение E должно иметь или то же или более высокое число измерений по сравнению с течением E', причем метод оказывается приложимым лишь при определенном значении показателя адиабаты, зависящего от числа измерений течения E и равного $^5/_3$ для трехмерного течения, 2 — для двумерного и 3 — для одномерного.

Плотность и давление в течении E оказались обратно пропорциональными некоторой степени $t - c$, где t — время, c — произвольная постоянная, имеющая размерность времени, поэтому результаты работы [2,3] для обычной газодинамики распространяются на динамику расширяющегося газа.

Если при этом из данного одномерного или плоского течения E' получаем течение E с бо́льшим числом измерений, то дополнительные компоненты скорости оказываются равными частному от деления соответствующей координаты на разность $t - c$. Исходя из этого, можно результаты работы [2,3] несколько обобщить, установив существование таких течений E', которым сопоставляется решение, дающее некоторое течение E в пространстве меньшего числа измерений.

Возьмем уравнения движения совершенного газа

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\qquad (uvw,\ xyz) \tag{1}$$

$$\frac{\partial \ln\rho}{\partial t}+u\frac{\partial \ln\rho}{\partial x}+v\frac{\partial \ln\rho}{\partial y}+w\frac{\partial \ln\rho}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)+u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)+w\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)=0 \tag{3}$$

Обозначения те же, что и в работе [2]. Пусть системе уравнений (1) — (3) удовлетворяет совокупность функций

$$u=u'(t,x,y),\quad v=v'(t,x,y),\quad w=\frac{z}{t-a},\quad \rho=\rho'(t,x,y),\quad p=p'(t,x,y) \tag{4}$$

Тогда совокупность функций

$$u=u_0(t,x,y)=\frac{a-\tau}{b}u'(\tau,\xi,\eta)+\frac{\xi}{b},\qquad \rho=\rho_0(t,x,y)=\left(\frac{a-\tau}{b}\right)^3\rho'(\tau,\xi,\eta) \tag{5}$$

$$v=v_0(t,x,y)=\frac{a-\tau}{b}v'(\tau,\xi,\eta)+\frac{\eta}{b},\qquad p=p_0(t,x,y)=\left(\frac{a-\tau}{b}\right)^5 p'(\tau,\xi,\eta)$$

будет удовлетворять системе уравнений двумерного движения газа, получающейся из системы (1) — (3), если в последней отбросить третье уравнение (1), положить $w = 0$ и считать все функции не зависящими от z. При этом

$$\tau=a-\frac{b^2}{t-c},\qquad \xi=\frac{b}{t-c}x,\qquad \eta=\frac{b}{t-c}y \tag{6}$$

а показатель адиабаты равен $^5/_3$. Во всех вышезаписанных формулах a, b, c — произвольные постоянные, имеющие размерность времени. В справедливости сказанного можно убедиться непосредственной подстановкой выражений (5), (6) в указанные уравнения двумерного движения газа и при этом учесть вид, принимаемый уравнениями (1) — (3) при подстановке в них решения (4).

Аналогично можно убедиться, что решению системы (1) — (3)

$$u = u'(t, x), \quad v = \frac{y}{t-a}, \quad w = \frac{z}{t-a}, \quad \rho = \rho'(t, x), \quad p = p'(t, x)$$

отвечает решение уравнений одномерного движения газа

$$u = u_0(t, x) = \frac{a-\tau}{b} u'(\tau, \xi) + \frac{\xi}{b}, \qquad \rho = \rho_0(t, x) = \left(\frac{a-\tau}{b}\right)^3 p'(\tau, \xi)$$

$$p = p_0(t, x) = \left(\frac{a-\tau}{b}\right)^5 p'(\tau, \xi), \qquad \tau = a - \frac{b^2}{t-c}, \qquad \xi = \frac{b}{t-c} x$$

при показателе адиабаты, снова равном $^5/_3$.

Таким же образом можно найти, что если совокупность функций

$$u = u'(t, x), \qquad v = \frac{y}{t-a}, \qquad \rho = \rho'(t, x), \qquad p = p'(t, x)$$

удовлетворяет системе уравнений двумерного движения газа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (uv, xy)$$

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \ln \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) + u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0$$

то совокупность функций

$$u = u_0(t, x) = \frac{a-\tau}{b} u'(\tau, \xi) + \frac{\xi}{b}, \qquad \tau = a - \frac{b^2}{t-c}, \qquad \xi = \frac{b}{t-c} x \tag{7}$$

$$\rho = \rho_0(t, x) = \left(\frac{a-\tau}{b}\right)^2 \rho'(\tau, \xi), \qquad p = p_0(t, x) = \left(\frac{a-\tau}{b}\right)^4 p'(\tau, \xi) \tag{8}$$

будет удовлетворять системе уравнений соответствующего одномерного движения газа при показателе адиабаты, равном 2.

Пусть, например, имеем решение двумерной задачи в виде

$$u' = \frac{x+\mu}{t+\nu}, \qquad v' = \frac{y}{t-a}, \qquad \rho' = \rho'(t), \qquad p' = p'(t)$$

Здесь μ, ν — постоянные. Ему отвечает по формулам (7), (8) решение уравнений одномерного движения газа

$$u = \frac{a-\tau}{b}\frac{\xi+\mu}{\tau+\nu} + \frac{\xi}{b} = \frac{b^\mu + (a+\nu)x}{(a+\nu)(t-c) - b^2} = \frac{x+\mu'}{t+\nu'}$$

$$\rho = \left(\frac{b}{t-c}\right)^2 \rho'(t), \qquad p = \left(\frac{b}{t-c}\right)^4 p'(t) \qquad \left(\mu' = \frac{b\mu}{a+\nu}, \quad \nu' = -\left(c + \frac{b^2}{a+\nu}\right)\right)$$

Таким образом, получили одномерное движение газа с тем же законом изменения скорости u, но с иной зависимостью давления и плотности от времени. Полученное решение можно рассматривать как решение одномерной задачи Коши, для которой в начальный момент $t = 0$ дано состояние газа (при $\nu' > 0$)

$$u = \frac{x+\mu'}{\nu'}, \qquad \rho = \rho_0 = \left(\frac{b}{c}\right)^2 \rho'(0), \qquad p = p_0 = \left(\frac{b}{c}\right)^4 p'(0)$$

Поступила 16 I 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Изд. Сиб. отд. АН СССР. Новосибирск, 1962.
2. Никольский А. А. Инвариантное преобразование уравнений движения идеального одноатомного газа и новые классы их точных решений. ПММ, 1963, т. 27. вып. 3.
3. Никольский А. А. Инвариантные преобразования уравнений движении идеального газа для специальных случаев. Инж. ж., 1963, т. 3, № 1.